λ-ハイブリッド写像の族に関する不動点定理

(FIXED POINT THEOREMS FOR A FAMILY OF λ-HYBRID MAPPINGS)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
横浜国立大学 教育学部
(COLLEGE OF EDUCATION, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1. はじめに

本論文では, ヒルベルト空間における非線形写像族の不動点定理を考察する. 1975 年に Baillon はヒルベルト空間における非拡大写像の不動点定理を示した.

定理 1.1 (Baillon [3]). *C をヒルベルト空間 H の空でない有界な閉凸集合とし, T を C から C への非拡大写像とする. 点列 $\{x_n\}$ を以下で定義する; C の任意の元 x とし, 任意の自然数 n に対して*

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ弱収束する.

この定理は, 非線形エルゴード定理と呼ばれる有名な結果である. 定理 1.1 の主張は不動点への収束性だけでなく, 存在性も示している. 本研究以降に Baillon 型の不動点定理は多くの研究者が研究を行なってきた (例えば, [1, 4, 5, 17, 27] 等を参照). 特に, Brcuk [4, 5] の研究では定理 1.1 をバナッハ空間へ拡張し, その証明の際に以下の有用な補助定理も示した.

補助定理 1.2 (Bruck [5]). *C を一様凸なバナッハ空間 E の有界閉凸部分集合とし, $N(C)$ を C からそれ自身への非拡大写像全体の集合とする. このとき, 以下が成立する.*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{T\in N(C), x\in C} \left\| \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x - T\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x\right) \right\| = 0.$$

一方, 1963 年に DeMarr [6] はバナッハ空間で可換な非拡大写像族に関する以下の共通不動点の存在定理を示した.

定理 1.3 (DeMarr [6]). *C をバナッハ空間 E のコンパクトな凸部分集合とする. このとき, C からそれ自身への可換な非拡大写像族は共通不動点を持つ.*

この研究以降, 多くの研究者により共通不動点の研究がなされてきたが存在定理のみならず, 不動点への軌道を求める収束定理に関する研究も数多く扱われてきた (例えば, [2, 12, 13, 16, 18–21, 25] 等を参照) . この中で Shimizu and Takahashi [19] の結果を紹介しよう.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 41A65.
Key words and phrases. 不動点, ヒルベルト空間, 収束定理, 存在定理, λ-ハイブリッド写像.

定理 1.4 (Shimizu and Takahashi [19]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸部分集合とする. S と T を C からそれ自身への非拡大写像で $ST = TS$ を満たし, 共通不動点が存在するとする. $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ 上の数列で

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

を満たすとする. 点列 $\{x_n\}$ を以下で定義する; $x \in C$, $x_0 = x$ とし, 任意の自然数 n に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} S^i T^j x_n$$

とする. このとき点列 $\{x_n\}$ は共通不動点 $P_F x$ へ強収束する. ただし, F は S と T の共通不動点全体の集合で, P_F は H から F の上への距離射影である.

この定理は Baillon 型 (定理 1.1) の手法を用いて, 2 つの非拡大写像の共通不動点への収束定理を示している. 本論文ではこれらの先行研究を参考に, Baillon 型の不動点定理の手法を用いたヒルベルト空間での共通不動点定理を扱う.

2. 準備

本論文では, H は実ヒルベルト空間 (real Hilbert space) とし内積 (inner product) を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表し, この内積から導かれるノルム (norm) を $\|\cdot\|$ で表す. また, C は H の空でない部分集合とする. 以降, 特に断りがない限り, 本論文では常に H は実ヒルベルト空間とし, C は H の "空でない" 部分集合とすることとする. また, $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}_0$ は順に正の整数全体の集合と非負の整数全体の集合を表すこととする. $i, j \in \mathbb{N}$ $(i \le j)$ に対して $N(i,j) := \{k \in \mathbb{N} : i \le k \le j\}$ とする. C を H の閉凸部分集合とする. このとき, H の任意の元 x に対して

$$\|x - x_0\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$$

となる C の元 x_0 が一意に存在する. そこで H の元 x に対し, このような C の元 x_0 を対応させる写像を H から C の上への距離射影 (metric projection) と呼び, P_C で表す.

T を C から H への写像とする. $F(T)$ は写像 T の不動点 (fixed point) 全体の集合とする, すなわち $F(T) = \{x \in C : x = Tx\}$. 次に 4 つの非拡大型写像の定義を示す.

- T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, C の任意の元 x, y に対して
$$\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$$
が成立するときをいう;
- T が非伸張 (nonspreading) であるとは, C の任意の元 x, y に対して
$$\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + 2\langle x - Tx, y - Ty\rangle$$
が成立するときをいう ([15] を参照) ;
- T がハイブリッド (hybrid) であるとは, C の任意の元 x, y に対して
$$\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + \langle x - Tx, y - Ty\rangle$$
が成立するときをいう ([24] を参照) ;
- $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. T が λ-ハイブリッド (λ-hybrid) であるとは C の任意の元 x, y に対して
$$\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + 2(1-\lambda)\langle x - Tx, y - Ty\rangle$$
が成立するときをいう ([1] を参照) .

T を λ-ハイブリッド写像としたとき次が成立する ([1, 15, 24] 等を参照).

- $F(T)$ は閉凸集合である;

- $\lambda = 1$ のとき, T は非拡大である;
- $\lambda = 0$ のとき, T は非伸張である;
- $\lambda = 1/2$ のとき, T はハイブリッドである.

すなわち, λ-ハイブリッド写像は非拡大, 非伸張, ハイブリッドの 3 つのクラスを含んだ写像のクラスである. また, J を添字集合とし, $\{T_j\}_{j\in J}$ を C から H への写像族とする. このとき, $\{T_j\}_{j\in J}$ が (λ)-ハイブリッド写像族であるとは, 任意の $j \in J$ に対して, ある実数 λ_j が存在し T_j が λ_j-ハイブリッド写像であることと定義する. すなわち, (λ)-ハイブリッド写像族の各写像は異なる実数 λ で λ-ハイブリッド写像でも良いという意味である.

ここで, λ-ハイブリッド写像の具体例を示す ([1] を参照).

例 2.1 (Aoyama, Iemoto, Kohsaka and Takahashi [1])**.** $\lambda \in [0, 1)$ とし,

$$\alpha = \frac{\lambda(1-\lambda) + \sqrt{2(1-\lambda)}}{1-\lambda^2},$$

とする. $B = \{x \in H : \|x\| \le \alpha\}$ とし, H から H への写像 T を以下で定義する.

$$Tx = \begin{cases} 0 & (x \in B); \\ x/\|x\| & (x \notin B). \end{cases}$$

このとき, T は λ-ハイブリッドである.

3. 共通不動点定理

本節では (λ)-ハイブリッド写像族に関する共通不動点定理を議論する. まず, はじめに収束定理に必要な 2 つの数列を定義する: 数列 $\{c_j\}$ が条件 (s) を満たすとは,

$$任意の\ j \in \mathbb{N}\ に対して\ c_j \in (0,1)\ かつ, \sum_{j=1}^{\infty} c_j = 1$$

を満たすときをいう. また, 二重数列 $\{c_{n,j}\}$ が条件 (ds) を満たすとは, 条件 (s) を満たす数列 $\{c_j\}$ を用いて, $c_{1,1} = 1$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ $(n \ge 2)$ に対して

$$c_{n,j} = c_j \ (j = 1, \dots, n-1)\ かつ\ c_{n,n} = \sum_{j=n}^{\infty} c_j = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} c_j$$

と定義されることとする. 条件 (ds) を満たす二重数列 $\{c_{n,j}\}$ は以下のような性質を持つ;

$$任意の\ j \in \mathbb{N}\ に対し \lim_{n\to\infty} c_{n,j} = c_j,\ かつ任意の\ n \in \mathbb{N}\ に対し \sum_{j=1}^{n} c_{n,j} = 1.$$

次に条件 (s) を満たす数列 $\{c_j\}$ と条件 (ds) を満たす二重数列 $\{c_{n,j}\}$ の具体例を示す.

例 3.1. 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し $c_j = 1/2^j$ とおくと数列 $\{c_j\}$ は条件 (s) を満たす. この数列 $\{c_j\}$ を用いた, 条件 (ds) を満たす二重数列は次のようになる;

$$\{c_{1,j}\}_{j\in N(1,1)} = \{1\},\ \{c_{2,j}\}_{j\in N(1,2)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\},\ \{c_{3,j}\}_{j\in N(1,3)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\},$$

$$\{c_{4,j}\}_{j\in N(1,4)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right\},\ \{c_{5,j}\}_{j\in N(1,5)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right\}, \dots$$

まず初めに, 共通不動点の存在を仮定した以下の 2 つの収束定理を得る.

定理 3.2 ([10]). a, b を $a \leq b$ を満たす開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を閉区間 $[a, b]$ 上の数列とする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の閉凸部分集合とし, $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を C からそれ自身への (λ)-ハイブリッド写像族とする. 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: x_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = a_n x_n + (1-a_n)\sum_{j=1}^{n} c_{n,j} T_j x_n$$

とする. このとき $\emptyset \neq F := \cap_{j\in\mathbb{N}} F(T_j)$ とすると, $\{x_n\}$ は F のある点 z に弱収束する.

定理 3.3 ([10]). b を開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を開区間 $(0,1)$ 上の数列で

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

を満たすとする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の閉凸部分集合とし, $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を C からそれ自身への (λ)-ハイブリッド写像族とする. 点列 $\{u_n\}$ を次のように構成する: q, u_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$u_{n+1} = a_n q + (1-a_n)\left(b u_n + (1-b)\sum_{j=1}^{n} c_{n,j} T_j u_n\right)$$

とする. このとき $\emptyset \neq F := \cap_{j\in N} F(T_j)$ とすると, 点列 $\{u_n\}$ は F の元 $v = P_F q$ へ強収束する.

注意 3.4. 定理 3.2 及び 3.3 は [10] において, 写像族の条件はより一般的な仮定で証明されている. 本論文では, λ-ハイブリッド写像の着目しているため, (λ)-ハイブリッド写像族に限定した形で引用した.

次に, DeMarr 型 (定理 1.3) の次の共通不動点の存在定理を得る.

定理 3.5 ([10]). C を H の有界な閉凸部分集合とし, J を添字集合する. $\{T_j\}_{j\in J}$ を C からそれ自身への可換な (λ)-ハイブリッド写像族とする. このとき $\{T_j\}_{j\in J}$ の共通不動点が存在する. すなわち, $\cap_{j\in J} F(T_j)$ は空集合ではない.

ここで定理 3.5 の証明には, 次の補助定理が必要になる.

補助定理 3.6 ([10]). $k \in \mathbb{N}$ とし, C を H の有界な部分集合とする. $L := \sup_{x,y\in C}\|x-y\|$ とし, $\{T_j\}_{j\in N(1,k)}$ を C からそれ自身への有限な写像列とする. T_1 を λ-ハイブリッド写像とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, C から H への写像 S_n を以下で定義する.

$$S_n = \frac{1}{n^k}\sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\cdots\sum_{i_k=0}^{n-1} T_1^{i_1} T_2^{i_2}\cdots T_k^{i_k}.$$

このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次の不等式が成立する.

$$\sup_{x,y\in C}\big\langle (S_n x - y) + (S_n x - T_1 y), y - T_1 y\big\rangle \leq \frac{1+2|1-\lambda|}{n} L^2.$$

補助定理 3.6 の証明から次の Bruck 型 (補助定理 3.7) の補助定理が示せる ([10] を参照).

補助定理 3.7 ([10]). C を H の有界な閉凸部分集合とし, $\lambda_1(C)$ を λ が $|1-\lambda| \leq 1$ を満たす λ-ハイブリッド写像全体の集合とする. このとき, 次の不等式が成立する.

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{T\in\lambda_1(C), x\in C}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} T^i x - T\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} T^i x\right)\right\| = 0.$$

注意 3.8. 補助定理 3.7 は, 補助定理 1.2 の写像の条件がより広いクラスで証明されており, 集合 C の閉性の条件も外れている. ただし, 補助定理 1.2 はバナッハ空間の成果であるので正確な意味で拡張になっていないが, 補助定理 1.2 をヒルベルト空間で考えた場合には拡張になっている.

ここで定理 3.2 及び 3.3 と定理 3.5 の直接的な結果として次の 2 つの不動点定理を得る.

系 3.9 ([10]). a, b を $a \le b$ を満たす開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を閉区間 $[a,b]$ 上の数列とする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の有界な閉凸部分集合とし, $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を C からそれ自身への 可換な (λ)-ハイブリッド写像族とする. 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: x_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = a_n x_n + (1-a_n)\sum_{j=1}^{n} c_{n,j} T_j x_n$$

とする. このとき $F := \cap_{j\in\mathbb{N}} F(T_j)$ とすると, $\{x_n\}$ は F のある点 z に弱収束する.

系 3.10 ([10]). b を開区間 $(0,1)$ 上の実数とし, $\{a_n\}$ を開区間 $(0,1)$ 上の数列で

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

を満たすとする. $\{c_j\}$ を条件 (s) を満たす数列とし, $\{c_{n,j}\}$ を条件 (ds) を満たす二重数列とする. C を H の有界な閉凸部分集合とし, $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を C からそれ自身への可換な (λ)-ハイブリッド写像族とする. 点列 $\{u_n\}$ を次のように構成する: q, u_1 を C の任意の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$u_{n+1} = a_n q + (1-a_n)\left(b u_n + (1-b)\sum_{j=1}^{n} c_{n,j} T_j u_n\right)$$

とする. このとき $F := \cap_{j\in N} F(T_j)$ とすると, 点列 $\{u_n\}$ は F の元 $v = P_F q$ へ強収束する.

最後に (λ)-ハイブリッド写像族において異なる実数 λ における 2 つの可換な λ-ハイブリッド写像の例を示す ([11] を参照).

例 3.11 ([11]). $H = \mathbb{R}^2$ とし, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\}$ とする. C からそれ自身へ写像 T と S を以下で定義する: 任意の C の元 (x,y) 対して

$$T(x,y) = (-x, y), \quad S(x,y) = (x, |x|y).$$

このとき, C は有界な閉凸集合となることは明らかで S と T は可換な写像となる. すなわち $TS = ST$ である. また, T は非拡大となるが非伸張ではなく, S は非伸張となるが非拡大ではない, さらに, それぞれの不動点集合と共通不動点集合は

$$F(T) = \{(x,y) : x = 0\}, \quad F(S) = \{(x,y) : y = 0\}, \quad F(T) \cap F(S) = \{(0,0)\}$$

である.

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 19K03632, 19H01479 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **11** (2010), 335–343.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces*, Austral. Math. Soc., **57** (1998), 117–127.

[3] J.-B. Baillon, *Un theoreme de type ergodique pour les contractions non lineaire s dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser., A-B **280** (1975), 1511–1514.

[4] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math., **32** (1979), 107–116.

[5] R. E. Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math., **38** (1981), 304–314.

[6] R. DeMarr, *Common fixed points for commuting contraction mappings*, Pacific J. Math., **13** (1963), 1139–1141.

[7] J. G. Falset, E. L. Fuster, and T. Suzuki, *Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **375** (2011), 185–195.

[8] 家元繁・高橋渉,「ヒルベルト空間における非拡大写像と非伸張写像の共通不動点への弱収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 **1683** (2010), 1–8.

[9] 茨木貴徳,「ヒルベルト空間における非線形写像族の共通不動点へ収束定理」京都大学数理解析研究所講究録, 投稿中.

[10] T. Ibaraki and Y. Takeuchi, *New convergence theorems for common fixed points of a wide range of nonlinear mappings*, J. Nonlinear Anal. Optim., **9** (2018), 95–114.

[11] T. Ibaraki and Y. Takeuchi, *A mean convergence theorem finding a common attractive point of two nonlinear mappings*, Yokohama Math. J., **66** (2020), 61–77.

[12] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., **80** (1979), 493–501.

[13] S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **2** (1993), 333–342.

[14] P. Kocourek, W. Takahashi and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and weak convergence theorems for genelalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math., **14** (2010), 2497–2511.

[15] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. **91** (2008), 166–177.

[16] P. K. F. Kuhfittig, *Common fixed points of nonexpansive mappings by iteration*, Pacific J. Math., **97** (1981), 137–139.

[17] Y. Kurokawa and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonspreading mappings in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal., **73** (2010), 1562–1568.

[18] J. Linhart, *Beiträge zur Fixpunkttheorie nichtexpandierender Operatoren*, Monatsh. Math., **76** (1972), 239–249 (German).

[19] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **211** (1997), 71–83.

[20] T. Suzuki, *Convergence theorems to common fixed points for infinite families of nonexpansive mappings in strictly convex Banach spaces*, Nihonkai Math. J., **14** (2003), 43–54.

[21] T. Suzuki, *Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Fixed Point Theory and Applications, *2005* (2005), 103–123.

[22] T. Suzuki, *Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **340** (2008), 1088-1095.

[23] 竹内幸雄,「狭義凸 Banach 空間における写像の吸引点集合」京都大学数理解析研究所講究録 **2114** (2019), 144–151.

[24] W. Takahashi, *Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal., **11** (2010), 79–88.

[25] W. Takahashi and T. Tamura, *Limit theorems of operators by convex combinations of nonexansive retractions in Banach spaces*, J. Approx. Theory, **91** (1997), 386–397.

[26] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space*,J. Nonlinear Convex Anal., **12** (2011), 399–406.

[27] W. Takahashi and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and ergodic theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math., **15** (2011), 457–472.