

Primal-dual splitting algorithms and its applications*

秋田県立大学・システム科学技術学部 知能メカトロニクス学科[†] 松下 慎也

Shin-ya Matsushita

Department of Intelligent Mechatronics, Faculty of Systems Science and Technology
Akita Prefectural University

1 はじめに

次の問題を考える:

$$\text{最小化 } f(x) + g(Dx), \quad (1.1)$$

ただし、 $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ は実ヒルベルト空間、 $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 、 $g: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は下半連続な真凸関数、 $D: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ は有界線形作用素とする。問題 (1.1) は、凸関数の和の最小化問題を表す数理モデルであり、情報学の分野におけるスパースモデリングや画像処理における画像復元問題等と密接に関係している ([9, 10] 参照)。

本論文では、凸最小化問題 (1.1) に対する解法である主-双対分割法 について検討する。主-双対分割法は以下のように定義される ([4, 5])。

$$\begin{cases} x_{k+1} = \text{prox}_{\tau f}(x_k - \tau D^* v_k), \\ v_{k+1} = \text{prox}_{\sigma g^*}(v_k + \sigma D(2x_{k+1} - x_k)), \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.2)$$

ただし、 $x_1 \in \mathcal{H}$ 、 $v_1 \in \mathcal{G}$ 、 $\tau, \sigma \in (0, \infty)$ 、 g^* と D^* はそれぞれ関数 g の共役関数と作用素 D の随伴作用素 (2 章参照)、 $\text{prox}_{\tau f}$ は関数 f に対する近接写像と呼ばれ、 $\text{prox}_{\tau f}(x) = \text{argmin}_{y \in \mathcal{H}} \{f(y) + \frac{1}{2\tau} \|y - x\|^2\}$ と定義される。 f が下半連続な真凸関数の時、 $\text{prox}_{\tau f}$ は一価写像となる ([1, 12, 13] 参照)。本論文を通して、以下の条件を仮定する。

- f と g の近接写像 prox_f と prox_g は容易に計算できる。

•

$$(\partial f + D^* \circ \partial g \circ D)^{-1}(0) \neq \emptyset^{*1} \quad (1.3)$$

This work was supported by the Ministry of Education, Culture, Sports, Science, and Technology [19K03639] and the Research Institute for Mathematical Sciences

〒015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老ノ口 84-4

<http://www.akita-pu.ac.jp/system/elect/sce/matsushita/>

*1 この条件は、制約想定 (例えば、 $0 \in \text{int}(D\text{dom}f - \text{dom}g)$ [1, Proposition 15.24]) が成り立つとき、問題 (1.1) の解の存在と等価な条件となる。

$\tau\sigma\|L\|^2 < 1$ のとき、点列 $\{x_k\}$ は問題 (1.1) の解に弱収束することが知られている (例えば、[5, Theorem 3.2])。さらに、 f が強凸関数^{*2}と仮定し、主-双対分割法の係数を改良すると強収束することが知られている ([2] 参照)。また、(1.2) に関連する最適化手法として、Forward-Backward 法や Douglas-Rachford 法がある ([1, 7, 8])。

本論文では、主-双対分割法 (1.2) に前処理を追加することで、生成された点列の強収束性が保証できることを示す。また、後半ではノイズ除去問題に対する数値実験について検討する。

2 準備

本論文を通して $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ を実ヒルベルト空間とし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ と $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ (resp. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{G}}$ と $\|\cdot\|_{\mathcal{G}}$) をそれぞれ $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{G}$) の内積とノルムとする。 $L: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ を線形作用素とする。任意の $(x, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}$ に対して、 $\langle Lx, v \rangle = \langle x, L^*v \rangle$ を満たす $L^*: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ を L の随伴作用素という。集合値写像 $A: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ のグラフを $\text{Gr}(A) = \{(x, x^*) | x^* \in A(x)\}$ と定義する。 $A: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ が

(1) 単調とは、

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad ((x, x^*), (y, y^*) \in \text{Gr}(A)); \quad (2.1)$$

(2) 極大単調とは、

$$A \text{ が単調、} B: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H} \text{ が単調でかつ } \text{Gr}(A) \subset \text{Gr}(B) \Rightarrow A = B;$$

を満たす時をいう。集合値写像 A に対するリゾルベントは $J_A(x) = \{u \in \mathcal{H} : x \in (I + A)(u)\}$ と定義される。 A が極大単調作用素の時、 J_A は一価写像、つまり $J_A(x) = (I + A)^{-1}(x)$ となる $u \in \mathcal{H}$ とする。 $0 \in A(u)$ が成り立つとき、 u を A の零点という。また、 A の零点全体の集合を $A^{-1}(0)$ 、つまり $A^{-1}(0) = \{u \in \mathcal{H} : 0 \in A(u)\}$ とする。

$f: \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする。 f に対する劣微分を以下のように定義する。

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathcal{H} : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \ (\forall x \in \mathcal{H})\}.$$

このとき、 $\partial f: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ は極大単調になることが知られている [1, 12, 13]。また、 $u \in (\partial f)^{-1}(0) \Leftrightarrow f(u) = \argmin_{y \in \mathcal{H}} f(y)$ が成り立つ。 f に対する近接写像 $\text{prox}_{\gamma f}$ ($\gamma > 0$) を以下のように定義する。

$$\text{prox}_{\gamma f}(x) = \argmin_{y \in \mathcal{H}} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|y - x\|^2 \right\}.$$

f の共役関数 f^* は $p \in \mathcal{H}$ に対して $f^*(p) = \sup\{\langle p, x \rangle - f(x) : x \in \mathcal{H}\}$ と定義される。 f と f^* の近接写像には Moreau's decomposition と呼ばれる以下の関係が成り立つ。

$$I = \text{prox}_{\sigma f} + \sigma \text{prox}_{(1/\sigma)f^*} \circ (1/\sigma)I. \quad (2.2)$$

(2.2) より、主-双対分割法 (1.2) で現れる g^* の近接写像は g の近接写像を用いて計算できる。本節で述べた概念については、文献 [1, 12, 13] を参照するとよい。

^{*2} f が強凸であるとは、ある $\gamma > 0$ が存在して、 $f(x) - (\gamma/2)\|x\|_{\mathcal{H}}^2$ ($x \in \mathcal{H}$) が凸関数となる時をいう。

主定理を得るため、次の結果は重要である。

定理 2.1. ([11, Theorem 3.1]) $A: \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ は極大単調作用素で $A^{-1}(0) \neq \emptyset$ とする。また、点列 $\{x_k\}$ は以下の方法によって生成された点列とする。

$$x_{k+1} = J_{r_k A}((1 - \alpha_k)u + \alpha_k x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

ただし、 $u, x_1 \in \mathcal{H}$ で、 $\{r_k\} \subset (0, \infty)$ と $\{\alpha_k\} \subset (0, 1)$ は以下の条件を満たす。

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ かつ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$.
- ある $a > 0$ が存在し、 $\{r_k\} \subset [a, \infty)$.

このとき $\{x_k\}$ は点 $P_{A^{-1}(0)}(u) \in A^{-1}(0)$ に強収束する。ここで、 $P_{A^{-1}(0)}: \mathcal{H} \rightarrow A^{-1}(0)$ は $A^{-1}(0)$ の上への距離射影を表す。

注意 2.1. 定理 2.1 の最適化手法は、文献 [6] で扱われた最適化手法と直接関係している。

3 主結果

定理 2.1 を用いて、問題 (1.1) に関する強収束定理を示す。

定理 3.1. $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, g: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は下半連続な真凸関数、 $D: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ は有界線形作用素とする。点列 $\{x_k\}$ は以下の方法によって生成された点列とする。

$$\begin{cases} \bar{x}_k = \alpha_k x + (1 - \alpha_k)x_k, \\ \bar{v}_k = \alpha_k v + (1 - \alpha_k)v_k, \\ x_{k+1} = \text{prox}_{\tau f}(\bar{x}_k - \tau D^* \bar{v}_k), \\ v_{k+1} = \text{prox}_{\sigma g^*}(\bar{v}_k + \sigma D(2x_{k+1} - \bar{x}_k)), \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.1)$$

ただし、 $x, x_1 \in \mathcal{H}, v, v_1 \in \mathcal{G}, \tau, \sigma > 0$ と $\{\alpha_k\}$ は以下の条件を満たす。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty \quad \text{かつ} \quad \sigma \tau \|L\|^2 < 1. \quad (3.2)$$

このとき、 $\{x_k\}$ は問題 (1.1) の解に強収束する。

証明. 証明で現れる直積空間に関する詳細は [5, 14] を参照するとよい。

$\mathcal{K} := \mathcal{H} \times \mathcal{G}$ とし、 $(x, u), (y, v) \in \mathcal{K}$ に対して、内積とノルムを

$$\langle (x, u), (y, v) \rangle_{\mathcal{K}} := \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} + \langle u, v \rangle_{\mathcal{G}}, \quad \|(x, u)\|_{\mathcal{K}} := \sqrt{\langle (x, u), (x, u) \rangle_{\mathcal{K}}}$$

とすると、 $\mathcal{K}$ はヒルベルト空間となる。集合値写像 $M: \mathcal{K} \rightrightarrows \mathcal{K}$ を以下のように定義する。

$$M(x, v) := (\partial f(x), (\partial g)^{-1}(v)).$$

このとき、 ∂f と ∂g の極大単調性より $\mathbf{M}$ は極大単調作用素となる ([1, Propositions 20.22 and 20.23])。線形連続作用素 $\mathbf{S}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{S}(x, v) := (D^*v, -Dx).$$

このとき、 $\mathbf{S}^* = -\mathbf{S}$ となり $\mathbf{S}$ は極大単調。また、 $\text{dom} \mathbf{S} = \mathcal{K}$ より $\mathbf{M} + \mathbf{S}$ も極大単調となる ([1, Corollary 25.5])。ここで、

$$(\bar{x}, \bar{v}) \in (\mathbf{M} + \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{0}) \Leftrightarrow (0, 0) \in (\partial f(\bar{x}) + D^*\bar{v}, (\partial g)^{-1}(\bar{v}) - D\bar{x}) \quad (3.3)$$

となる。(3.3) と劣微分の和の性質より

$$0 \in \partial f(\bar{x}) + D^*\partial g D(\bar{x}) \subset \partial(f + g \circ D)(\bar{x}) \quad (3.4)$$

が成り立つ。このとき、 $\bar{x}$ は問題 (1.1) の解となる。ここで、(1.3) は $(\mathbf{M} + \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{0}) \neq \emptyset$ と等価であることが知られている ([1, Proposition 26.33])。

次に、有界線形作用素 $\mathbf{V}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ を次のように定義する。

$$\mathbf{V}(x, v) = \left(\frac{1}{\tau}x - D^*v, -Dx + \frac{1}{\sigma}v \right).$$

このとき、 $\mathbf{V}$ は自己共役で ρ -strongly positive となる。ここで、 $\rho = 1 - \sqrt{\tau\sigma\|L\|^2} > 0$ 。このとき、 V^{-1} が存在し、 $\|V^{-1}\| \leq 1/\rho$ となる ([14])。

一方、(3.1) より

$$\begin{aligned} x_{k+1} = \text{prox}_{\tau f}(\bar{x}_k - \tau D^*\bar{v}_k) &\Leftrightarrow \bar{x}_k - \tau D^*\bar{v}_k \in x_{k+1} + \tau \partial f(x_{k+1}) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\tau}(\bar{x}_k - x_{k+1}) - D^*(\bar{v}_k - \bar{v}_{k+1}) \in \tau \partial f(x_{k+1}) + D^*\bar{v}_{k+1} \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \text{prox}_{\sigma g^*}(\bar{v}_k + \sigma D(2x_{k+1} - \bar{x}_k)) \\ &\Leftrightarrow \bar{v}_k + \sigma D(2x_{k+1} - \bar{x}_k) \in v_{k+1} + \sigma(\partial g)^{-1}(v_{k+1}) \\ &\Leftrightarrow -D(\bar{x}_k - x_{k+1}) + \frac{1}{\sigma}(\bar{v}_k - v_{k+1}) \in (\partial g)^{-1}(v_{k+1}) - Dx_{k+1} \end{aligned}$$

ここで、

$$\mathbf{v}_k := (x_k, v_k), \mathbf{v} := (x, v)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\tau}(\bar{x}_k - x_{k+1}) - D^*(\bar{v}_k - \bar{v}_{k+1}), -D(\bar{x}_k - x_{k+1}) + \frac{1}{\sigma}(\bar{v}_k - v_{k+1}) \right) \\ &= \mathbf{V}(\alpha_k \mathbf{v} + (1 - \alpha_k) \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k+1}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

また、

$$(\tau \partial f(x_{k+1}) + D^*\bar{v}_{k+1}, (\partial g)^{-1}(v_{k+1}) - Dx_{k+1}) = (\mathbf{M} + \mathbf{S})(\mathbf{v}_{k+1}) \quad (3.6)$$

となる。(3.5) と (3.6) より、

$$\begin{aligned}
 & V(\alpha_k \mathbf{v} + (1 - \alpha_k) \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k+1}) \in (\mathbf{M} + \mathbf{S})(\mathbf{v}_{k+1}) \\
 \Leftrightarrow & V(\alpha_k \mathbf{v} + (1 - \alpha_k) \mathbf{v}_k) \in (\mathbf{V} + \mathbf{M} + \mathbf{S})(\mathbf{v}_{k+1}) \\
 \Leftrightarrow & \mathbf{v}_{k+1} = (\mathbf{I} + \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{M} + \mathbf{S}))^{-1}(\alpha_k \mathbf{v} + (1 - \alpha_k) \mathbf{v}_k)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

となる。ここで、以下の内積とノルムを持つヒルベルト空間 $\mathcal{K}_V$ を考える。任意の $(x, u), (y, v) \in \mathcal{K}$ に対して、

$$\langle (x, u), (y, v) \rangle_{\mathcal{K}_V} := \langle (x, u), V(y, v) \rangle_{\mathcal{K}}, \| (x, u) \|_{\mathcal{K}_V} := \sqrt{\langle (x, u), V(x, u) \rangle_{\mathcal{K}}}.$$

$\mathbf{M} + \mathbf{S}$ は $\mathcal{K}$ で極大単調であり、 $\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{M} + \mathbf{S})$ は $\mathcal{K}_V$ で極大単調となる。また、 V の性質より、 $\mathcal{K}$ における強収束と $\mathcal{K}_V$ における強収束は等価となる ([5, 14])。

(3.7) より、提案手法 (3.1) は $\mathcal{K}_V$ において定理 2.1 のアルゴリズムと同じ構造を持つ。ただし、 $A = \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{M} + \mathbf{S})$ 、 $r_k \equiv 1$ である。従って、 $\{\mathbf{v}_k\}$ は $P_{(\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{M} + \mathbf{S}))^{-1}(\mathbf{0})}(\mathbf{v})$ に強収束することが示される。ここで、

$$(\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{M} + \mathbf{S}))^{-1}(\mathbf{0}) = (\mathbf{M} + \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{0})$$

が成り立つ。これと (3.3) と (3.4) より、 $\{x_k\}$ が問題 (1.1) の解に強収束することが示される。□

4 応用

問題 (1.1) の具体例について検討する。

4.1 画像復元問題

画像復元とは、既知の観測データ（劣化がある画素値など）から未知のパラメータ（元画像の画素値）を推定する問題である。画像復元問題における観測の過程は以下のようにモデル化できる。

$$\mathbf{b} = \Phi \mathbf{x}^* + \delta. \tag{4.1}$$

ここで、 $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ は既知の行列、 $\delta \in \mathbb{R}^m$ は未知のノイズとする。このとき、画像復元問題は、既知の観測データ $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ から未知の元画像 $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ を推定する問題である ([2–4] 参照)。特に $m = n$, $\Phi = \mathbf{I}_n$ とした場合、画像復元問題はノイズ除去問題となる。

4.2 全変動正則化

サイズが $N \times N$ の画像を $n := N \times N$ 次元のベクトルとして扱う (n は画素数に相当する)。また、画像の画素は $x_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq N$) と表す。

以降では、ノイズ除去問題（つまり、 $\Phi = \mathbf{I}_n$ の時）について検討する。このとき、観測データ $\mathbf{b}$ は

$$\mathbf{b} = \mathbf{x}^* + \delta \tag{4.2}$$

によって得られる。 $\mathbf{b}$ および自然画像には次の性質がある。

- $\mathbf{b}$ は (ノイズを含むが) ある程度元画像 $\mathbf{x}^*$ に近い。
- 自然画像は隣接画素間に強い相関がある。

上記の性質を考慮し、次の問題を考える。

$$\text{最小化 } \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_1 + \lambda \text{TV}(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

ここで、 $\|\cdot\|_1$ は l^1 ノルム^{*3}、 $\lambda > 0$ は正則化パラメータ、 $\text{TV}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を以下で定義する。

$\mathcal{Y} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ とし、 $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{Y}, x_{i,j} \mapsto (L_1 x_{i,j}, L_2 x_{i,j})$ を

$$L_1 x_{i,j} := \begin{cases} x_{i+1,j} - x_{i,j} & (i < N) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}, \quad L_2 x_{i,j} := \begin{cases} x_{i,j+1} - x_{i,j} & (j < N) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定義する。 L_1 と L_2 は縦/横の隣接画素間差分を表し、 L は有界線形作用素で $\|L\| \leq \sqrt{8}$ が成り立つことが知られている ([3] 参照)。ここで、TV は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \text{TV}(\mathbf{x}) &:= \|L\mathbf{x}\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} (|x_{i+1,j} - x_{i,j}| + |x_{i,j+1} - x_{i,j}|) + \sum_{i=1}^{N-1} |x_{i+1,N} - x_{i,N}| + \sum_{j=1}^{N-1} |x_{N,j+1} - x_{N,j}|. \end{aligned}$$

ノイズを含んだ観測画像 $\mathbf{b}$ から未知の元画像を推定するノイズ除去問題は、問題 (4.3) として定式化される ([4] 参照)。 $f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_1$ 、 $g(\mathbf{y}) := \lambda \|\mathbf{y}\|_1$ 、 $D := L$ とおくことで、問題 (4.3) は問題 (1.1) の具体例となる。TV は全変動と呼ばれ、問題 (4.3) は全変動を正則化項に持つ最適化問題として知られている。

近接写像 $\text{prox}_{\tau f}$ は軟判定閾値関数^{*4}を利用すると計算でき、近接写像 $\text{prox}_{\sigma g^*}$ は Moreau's decomposition を利用することで計算できる。

3 章の結果を問題 (4.3) に適用し、得られた結果を紹介する。

- 使用言語 : MATLAB2020a
- 画像 : サイズ 256×256 のグレイスケール画像
- $\tau = 0.7$ 、 $\sigma = 0.9/(8 * \tau)$ 、 $\lambda = 0.7$ 、 $\alpha_k = 1/k$

数値実験では、元画像 (図 1) に対して、ノイズを付加した画像 (図 2) を観測画像 $\mathbf{b}$ として使用した。提案手法を適用し、繰り返し回数 $k = 20$ で得られた近似画像を図 3 に示す。

^{*3} $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^N |x_i|$

^{*4} l^1 ノルムに対する近接写像 $\text{prox}_{\gamma|\cdot|}$ は次のように定義される。 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\text{prox}_{\gamma|\cdot|}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \text{prox}_{\gamma|\cdot|}(x_1) \\ \vdots \\ \text{prox}_{\gamma|\cdot|}(x_n) \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } \text{prox}_{\gamma|\cdot|}(x) = \begin{cases} x + \gamma & (x \leq -\gamma) \\ 0 & (-\gamma \leq x \leq \gamma) \\ x - \gamma & (\gamma \leq x) \end{cases}.$$

特に絶対値関数の近接写像 $\text{prox}_{\gamma|\cdot|}$ を軟判定閾値関数と呼ぶ。

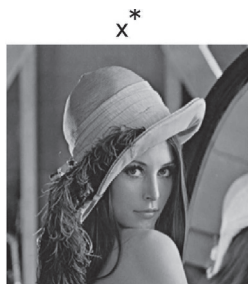
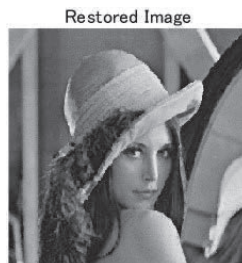


図 1 元画像



図 2 観測画像

図 3 近似画像 ($k = 20$)

5 まとめ

本論文では主-双対分割法 (1.2) に前処理を追加した最適化手法 (3.1) を提案した。提案手法は、ヒルベルト空間において強収束することが保障される。

謝辞

高橋渉先生（東京工業大学名誉教授）は、2020 年 11 月 19 日にご逝去されました。私は学部・修士時代に高橋先生の御著書を通して数学を学ばせて頂き、東工大博士後期課程時代には先生の研究室で非線形解析学と凸解析学について直接御指導を頂きました。高橋先生は数学を素直に捉えることの大切さを私に教えてくださいました。これまで暖かい激励とご指導、ご鞭撻を頂いた高橋先生に心より感謝を申し上げ、御冥福をお祈り申し上げます。

参考文献

- [1] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, New York, 2017.
- [2] R. I. Bot, E. R. Csetnek, A. Heinrich, and C. Hendrich, *On the convergence rate improvement of a primal-dual splitting algorithm for solving monotone inclusion problems*, Math. Program., **150** (2015), 251-279.
- [3] A. Chambolle, *An algorithm for total variation minimization and applications*, J. Math. Imaging Vis., **20**, (2004) 89-97.
- [4] A. Chambolle and T. Pock, *A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging*, J. Math. Imaging Vis., **40** (2011), 120-145.
- [5] L. Condat, *A primal-dual splitting method for convex optimization involving Lipschitzian, proximable and linear, composite terms*, J. Optim. Theory Appl., **158** (2013), 460-479.

- [6] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory, **106** (2000), 226-240.
- [7] P.-L. Lions and B. Mercier, *Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators*, SIAM J. Numer. Anal., **16** (1979), 964-979.
- [8] S. Matsushita, *On splitting methods for monotone operators*, 数理解析研究所講究録, to appear.
- [9] 永原正章, スパースモデリングのための凸最適化-近接勾配法による高速アルゴリズム, システム/制御/情報, **61** (2017), 20-28.
- [10] 小野峻佑, 近接分離アルゴリズムとその応用-信号処理・画像処理的観点から-, オペレーションズ・リサーチ, **64** (2019), 316-325.
- [11] S. Saejung, *A supplement to a regularization method for the proximal point algorithm*, J. Global Optim., **56** (2013), 121-129.
- [12] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis. fixed points theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama 2000.
- [13] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.
- [14] B. C. Vũ, *A splitting algorithm for dual monotone inclusions involving cocoercive operators*, Adv. Comput. Math., **38** (2013), 667-681