Floquet ハミルトニアンに対する Mourre 評価について

神戸大学大学院・理学研究科数学専攻 * 清瀬　周
Amane Kiyose
Department of Mathematics, Graduate School of Science
Kobe University

§1. 序論

時間周期的なポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素 $H(t) = p^2/2 + V(t,x)$ に対するスペクトル理論と散乱理論では、$H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアン $K = -i\partial_t + H(t)$ が、Howland-Yajima の方法によって度々重要な役割を果たす。本稿では、足立匡義教授 (京都大学) との共同研究 [2] の内容である、標準的な Mourre 理論での K に対する新しい変形作用素と Mourre 評価を紹介する。

本研究では、以下の作用素を、$H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアン K に対する変形作用素として提起する。

$$A_{\lambda_0,\delta} = (\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes \frac{x \cdot p + p \cdot x}{2}.$$

また我々の Mourre 評価は次のような形である。

$$f_\delta(K-\lambda_0)i[K, A_{\lambda_0,\delta}]f_\delta(K-\lambda_0) \geq 2f_\delta(K-\lambda_0)^2 + C_{\lambda_0,f_\delta}.$$

$f_\delta(K-\lambda_0)$ はエネルギー K の λ_0 への局所化、C_{λ_0,f_δ} はコンパクト作用素の誤差である。

§2 では研究の動機を述べつつ、仮定と主結果についてまとめる。§3 では Mourre 評価の証明の概要を述べる。§4 では AC Stark ハミルトニアンに対する散乱問題への応用を紹介する。

〒657-8501 神戸市灘区六甲台町

§2. 仮定と主結果

$\mathscr{H} := L^2(\boldsymbol{R}^d)$ 上の時間依存 Schrödinger 方程式:

$$i\partial_t u(t) = H(t)u(t), \quad t \in \boldsymbol{R},$$
$$H(t) = H_0 + V(t), \quad H_0 = \frac{1}{2}p^2,$$

について考察する。$p = -i\nabla_x$ であり、$V(t)$ は周期 $T > 0$ を持つ t に関し周期的な $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^d$ 上の実数値関数 $V(t,x)$:

$$V(t+T,x) = V(t,x), \quad (t,x) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^d$$

を掛ける掛け算作用素である。後述の、$V(t,x)$ についての適当な条件のもとに $H(t)$ によって生成される解作用素 $U(t,s)$ の存在と一意性は保証できる (Yajima [5]).

$t \to \pm\infty$ の時の、$U(t,s)\varphi$, $\varphi \in \mathscr{H}$ の漸近挙動の研究では、所謂 $H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアン K をたびたび利用することがある。T-周期関数をトーラス $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}/(T\boldsymbol{Z})$ 上に移して考える。$\pi_T : [0,T) \ni t \mapsto [t] \in \boldsymbol{T}$ を用いて、

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{T}) := \{A \in \mathscr{P}(\boldsymbol{T}) \mid \pi_T^{-1}\langle A\rangle \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}) \cap [0,T)\}$$

上の完備有限測度

$$\mathfrak{m}_{\boldsymbol{T}} := \pi_{T*}(\mathfrak{m}_{\mathcal{L}(\boldsymbol{R})\cap[0,T)}) : \mathcal{L}(\boldsymbol{T}) \ni A \mapsto \mathfrak{m}_{\mathcal{L}(\boldsymbol{R})\cap[0,T)}(\pi_T^{-1}\langle A\rangle) \in [0,\infty]$$

を与える (π_T による誘導測度)。$\mathscr{K} := L^2(\boldsymbol{T};\mathscr{H}) \cong L^2(\boldsymbol{T}) \otimes L^2(\boldsymbol{R}^d)$ とする。$\{\hat{U}(\sigma)\}_{\sigma\in\boldsymbol{R}}$ を $\Phi \in \mathscr{K}$ に対して

$$(\hat{U}(\sigma)\Phi)(t) = U(t,t-\sigma)\Phi(t-\sigma), \quad t \in \boldsymbol{T}$$

と定める。厳密には、$[f] = \Phi$ に対して、

$$\hat{U}(\sigma)\Phi = [U(\pi_T^{-1}(\star), \pi_T^{-1}(\star) - \sigma)f(\star - [\sigma])].$$

これは $\mathscr{K}$ 上の強連続 1 パラメータユニタリ群であり、Stone の定理によって、$\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素 K が唯一つ存在して

$$\hat{U}(\sigma) = e^{-i\sigma K}$$

となる。K を $H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアンという。また、H_0 に結び付けられた Floquet ハミルトニアン K_0 を自由 Floquet ハミルトニアンという。その時

まず、K_0 は次の意味で $-i\partial_t + H_0$ の自然な自己共役拡張であると考えられる: $AC(\boldsymbol{T})$ を導関数が 2 乗可積分な $\boldsymbol{T}$ 上の絶対連続関数の空間とし、D_t を $AC(\boldsymbol{T})$ を定義域に持つ作用素 $-i\partial_t$ と定める。D_t は $L^2(\boldsymbol{T})$ 上自己共役で、スペクトル $\sigma(D_t)$ は $\mathscr{T} := \omega\boldsymbol{Z}$, $\omega := \frac{2\pi}{T}$. ゆえに D_t のレゾルベント集合の実軸上の部分 $\rho(D_t) \cap \boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R} \setminus \mathscr{T}$ と等しく

$$\boldsymbol{R} \setminus \mathscr{T} = \bigcup_{n \in \boldsymbol{Z}} I_n, \quad I_n := (n\omega, (n+1)\omega)$$

と分解できる。$AC(\boldsymbol{T}) \otimes C_0^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ は自由 Floquet ハミルトニアン K_0 のコアで、$AC(\boldsymbol{T}) \otimes C_0^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ 上の $D_t \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes H_0|_{C_0^\infty(\boldsymbol{R}^d)}$ は本質的に自己共役で

$$K_0 = \overline{D_t \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes H_0|_{C_0^\infty(\boldsymbol{R}^d)}} = \overline{D_t \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes H_0}.$$

我々の研究目的は、標準的な Mourre 理論での K に対する新しい変形作用素を得る事であるが、K に対する変形作用素自体は横山氏 [6] により既に得られていた事にまず注意したい。時間非依存の場合とは違い、時間依存問題では通常の変形作用素 $\hat{A}_0 = (x \cdot p + p \cdot x)/2$ では自由 Floquet ハミルトニアン $K_0 = -i\partial_t + H_0$ は

$$i[K_0, \hat{A}_0] = i[H_0, \hat{A}_0] = 2H_0$$

が K_0 有界にならないので、横山氏は $\tilde{A}_1 = \{x \cdot p(1+p^2)^{-1} + (1+p^2)^{-1} p \cdot x\}/2$ と p^2 のレゾルベントを掛けた変形作用素を導入する事で、

$$i[K_0, \tilde{A}_1] = i[H_0, \tilde{A}_1] = p^2(p^2/2+1)^{-1},$$

初めて K に対する Mourre 理論の有効性を示した。横山氏のポテンシャルの仮定と Mourre 評価は次のようである。

Yokoyama's Assumption. V は $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{R}^d$ 上の関数 $V(\pi_T^{-1}(t), x)$ による $\mathscr{K}$ 上の掛け算作用素で、以下を満たすとする。
(1) V と $[V, \tilde{A}_1]$ は K_0-コンパクト作用素に広がる。
(2) $[[V, \tilde{A}_1], \tilde{A}_1]$ は K_0-有界作用素に広がる。

例えば、$V(t,x) = V^L(t,x) + V^S(t,x)$ と分解でき、$V^L \in C(\boldsymbol{R}, C^\infty(\boldsymbol{R}^d))$ で $\delta > 0$ に対して

$$|\partial_x^\alpha V^L(t,x)| \le C_\alpha \langle x \rangle^{-\delta - |\alpha|}, \quad \alpha \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\})^d.$$

$V^S(t, \star)$ はコンパクトにサポートされており、$V^S \in C(\boldsymbol{R}, L^p(\boldsymbol{R}^d))$, $p > \max\{d/2, 1\}$.

Mourre Estimate of Yokoyama. V は前述の仮定を満たすとする。
(1) $\lambda \in \boldsymbol{R} \setminus \mathscr{T}$, $0 < \delta < d(\lambda, \mathscr{T})$, $f_\delta \in C_0^\infty([-\delta, \delta])$ に対し $\mathscr{K}$ 上のコンパクト作用素 C_{1,λ,f_δ} が存在し

$$f_\delta(K-\lambda)i[K, \tilde{A}_1]f_\delta(K-\lambda) \geq \frac{2(d(\lambda,\mathscr{T})-\delta)}{1+d(\lambda,\mathscr{T})-\delta} f_\delta(K-\lambda)^2 + C_{1,\lambda,f_\delta}.$$

(2) $\boldsymbol{R} \setminus \mathscr{T}$ 内の K の各固有値は多重度有限で、$\mathscr{T}$ にしか集積しない。$\mathscr{T} \cup \sigma_{\mathrm{pp}}(K)$ は可算閉集合。任意の $\lambda \in \boldsymbol{R} \setminus (\mathscr{T} \cup \sigma_{\mathrm{pp}}(K))$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$0 < \delta < d(\lambda, \mathscr{T})$ が存在し、任意の $f_\delta \in C_0^\infty([-\delta, \delta])$ に対して

$$f_\delta(K-\lambda)i[K, \tilde{A}_1]f_\delta(K-\lambda) \geq \left(\frac{2(d(\lambda,\mathscr{T})-\delta)}{1+d(\lambda,\mathscr{T})-\delta} - \varepsilon\right) f_\delta(K-\lambda)^2.$$

Limiting Absorption Principle of Yokoyama. $s > 1/2$ とする。
(1) 閉区間 $I \subset \boldsymbol{R} \setminus (\mathscr{T} \cup \sigma_{\mathrm{pp}}(K))$ に対して

$$\sup_{\mathfrak{Im} z \neq 0, \mathfrak{Re} z \in I} \|\langle \tilde{A}_1 \rangle^{-s}(K-z)^{-1}\langle \tilde{A}_1 \rangle^{-s}\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{K})} < \infty$$
$$\sup_{\mathfrak{Im} z \neq 0, \mathfrak{Re} z \in I} \|\langle x \rangle^{-s}(K-z)^{-1}\langle x \rangle^{-s}\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{K})} < \infty$$

(2) $\lambda \in I$ に対して $\boldsymbol{B}(\mathscr{K})$ 内で次の極限が存在。

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \langle \tilde{A}_1 \rangle^{-s}(K-(\lambda \pm i\varepsilon))^{-1}\langle \tilde{A}_1 \rangle^{-s},$$
$$\lim_{\varepsilon \to +0} \langle x \rangle^{-s}(K-(\lambda \pm i\varepsilon))^{-1}\langle x \rangle^{-s}.$$

$\langle \tilde{A}_1 \rangle^{-s}(K-(\lambda \pm i0))^{-1}\langle \tilde{A}_1 \rangle^{-s}$, $\langle x \rangle^{-s}(K-(\lambda \pm i0))^{-1}\langle x \rangle^{-s}$ は $\lambda \in \boldsymbol{R} \setminus (\mathscr{T} \cup \sigma_{\mathrm{pp}}(K))$ について Hölder 連続。

一方で、多体系への拡張を得る際には、

$$\hat{A}_0 = (\hat{A}_0)^a \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes (\hat{A}_0)_a$$

と変形作用素を分解できる事が重要であるが、横山氏の $\tilde{A}_1$ にはそのような特性がなかったため、多体系への拡張が期待できないという困難が存在した。そこで、本研究では多体系への拡張を見込んで、次のような新しい変形作用素を導入する。$\lambda_0 \in \boldsymbol{R} \setminus \mathscr{T}$ とする。唯一つ $n_{\lambda_0} \in \boldsymbol{Z}$ が存在して $\lambda_0 \in I_{n_{\lambda_0}}$ となる。δ を $0 < \delta < \mathrm{dist}(\lambda_0, \mathscr{T})$ と取る。$\lambda_0 - \delta \in I_{n_{\lambda_0}}$ だから、$\lambda_0 - \delta \in \boldsymbol{R} \setminus \mathscr{T} = \rho(D_t) \cap \boldsymbol{R}$. λ_0 における K に対する Mourre 評価を得るため、p^2 のレゾルベント $(1+p^2)^{-1}$ ではなく、D_t のレゾルベント

$(\lambda_0-\delta-D_t)^{-1}$ を通常の変形作用素 $\hat{A}_0=(x\cdot p+p\cdot x)/2$ に掛け、$\mathscr{K}\cong L^2(\boldsymbol{T})\otimes L^2(\boldsymbol{R}^d)$ 上の自己共役作用素

$$A_{\lambda_0,\delta}=\overline{(\lambda_0-\delta-D_t)^{-1}\otimes\hat{A}_0}$$

を導入する。まず我々の変形作用素 $A_{\lambda_0,\delta}$ は自由 Floquet ハミルトニアンとの交換子が

$$\begin{aligned}
i[K_0,A_{\lambda_0,\delta}]&=i[D_t\otimes\mathrm{Id},(\lambda_0-\delta-D_t)^{-1}\otimes\hat{A}_0]+i[\mathrm{Id}\otimes H_0,(\lambda_0-\delta-D_t)^{-1}\otimes\hat{A}_0]\\
&=i[D_t,(\lambda_0-\delta-D_t)^{-1}]\otimes\hat{A}_0+(\lambda_0-\delta-D_t)^{-1}\otimes i[H_0,\hat{A}_0]\\
&=(\lambda_0-\delta-D_t)^{-1}\otimes 2H_0\\
&=(\lambda_0-\delta-D_t)^{-1}\{2(K_0-D_t)\}
\end{aligned}$$

K_0-有界である:

$$i[K_0,A_{\lambda_0,\delta}]\langle K_0\rangle^{-1}=2\{(\lambda_0-\delta-D_t)^{-1}K_0\langle K_0\rangle^{-1}-(\lambda_0-\delta-D_t)^{-1}D_t\langle K_0\rangle^{-1}\}.$$

更に $i[i[K_0,A_{\lambda_0,\delta}],A_{\lambda_0,\delta}]\langle K_0\rangle^{-1}$ も有界である。本研究の変形作用素 $A_{\lambda_0,\delta}$ の最も重要な工夫点は、$\hat{A}_0$ の部分の形を変えていない事であり、多体系への拡張を考えると

$$(\lambda_0-\delta-D_t)^{-1}\otimes\{(\hat{A}_0)^a\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes(\hat{A}_0)_a\}$$

という分解ができるため、拡張が期待できる。実際、足立氏 [1] によって、最近 3 体系に対する変形作用素 A_R

$$\begin{aligned}
&A_R=\sum_{a\in\mathscr{A}}j_{a,R}A_aj_{a,R},\qquad A_a=A^a_{\mathrm{AK}}+A_{\mathrm{Y},a},\\
&A^a_{\mathrm{AK}}=(3\omega/2-D_t)^{-1}\otimes(\langle x^a,p^a\rangle+\langle p^a,x^a\rangle)/2,\\
&A_{\mathrm{Y},a}=(\langle x_a,p_a(\omega/4+(p_a)^2/2)^{-1}\rangle+\langle(\omega/4+(p_a)^2/2)^{-1}p_a,x_a\rangle)/2
\end{aligned}$$

が我々の型の A^a_{AK} と横山氏の型の $A_{\mathrm{Y},a}$ を貼り合わせる事で構成されている。A^a_{AK} は部分系ハミルトニアンと結び付けられた Floquet ハミルトニアンに対する変形作用素、$A_{\mathrm{Y},a}$ はクラスター間ハミルトニアンに対する変形作用素である。但し、一般の多体系 $(N\geq 4)$ への拡張に関して同様の事ができるかはまだわかっていない。本研究では 1 体の場合の新しい変形作用素 $A_{\lambda_0,\delta}$ と Mourre 評価を与える事によって、多体系への拡張のための、最初の段階を証明する事を目的としている。

また、我々はポテンシャル $V(t,x)$ について次のような新しい条件 (V) を与える。

Condition (V)**.** $V(t,x)$ は $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^d$ 上の実数値関数で t に関して周期 T の関数 $V^{\mathrm{sing}}(t,x)$ と $V^{\mathrm{reg}}(t,x)$ の和に分解される。$d<3$ の時は $V^{\mathrm{sing}}=0$. $d\geq 3$ の時は V^{sing}

は $\infty > q_0 > d$ で $C(\boldsymbol{R}, L^{q_0}(\boldsymbol{R}^d))$ に属し $\operatorname{supp} V^{\mathrm{sing}}(t,\star)$ は t に関して共通の $\boldsymbol{R}^d$ のコンパクト部分集合に含まれる。$(\partial_t V^{\mathrm{sing}})(t,\star)$ と $|(\nabla V^{\mathrm{sing}})(t,\star)|$ は $\infty > q_1 > d/2$ で $C(\boldsymbol{R}, L^{q_1}(\boldsymbol{R}^d))$ に属する。$d=3$ の時は $q_0 > 3$ より $1/(2q_0)+1/2 < 1/6+1/2 = 2/3 = 2/d$ だから $q_1 := (1/(2q_0)+1/2)^{-1} > d/2$ と定義する。この時 $1/q_1 = 1/(2q_0)+1/2$. $V^{\mathrm{reg}}(t,x)$ は $C^2(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^d)$ に属し $\rho > 0$ で減衰条件

$$\sup_{t\in\boldsymbol{R}} |(\partial_t^k \partial_x^\alpha V^{\mathrm{reg}})(t,x)| \le C\langle x\rangle^{-\rho-(k+|\alpha|)}, \quad k+|\alpha| \le 2$$

を満たす。

V^{sing} としては、$|x|^{-\gamma}$ 型の局所特異性を念頭に置いている。§4 で $|x+c(t)|^{-\gamma}$, c は T-周期関数、という例を考えるが、その場合 $\gamma < 1$ でなければならない事がわかる。従って残念ながら Coulomb 型の特異性を許す事はできない。

また、横山氏の仮定と対比すれば、我々の条件 (V) は、正則部分が C^2 級にまで弱まっている。t に関する微分の条件が必要であるが、それによって解作用素の存在と一意性の保証ができる。実際、谷島氏 [5] の仮定 $(A.1)$ と $(A.2)$ を満たす事が次のように確かめられる。$I \subset \boldsymbol{R}$ をコンパクト区間とする。$(A.1)$ については、$\alpha = 2$, $p = q_0$, $\beta > 1$ は任意と選べば良い。$q_0 > d$ より $1/2 < 1 - d/(2q_0)$ で任意の $\beta > 1$ に対して

$$V = V^{\mathrm{sing}} + V^{\mathrm{reg}} \in C(I, L^{q_0}(\boldsymbol{R}^d)) + C(I, L^\infty(\boldsymbol{R}^d)) \subset L^2(I, L^{q_0}(\boldsymbol{R}^d)) + L^\beta(I, L^\infty(\boldsymbol{R}^d)).$$

$(A.2)$ については、まず $\operatorname{supp} V^{\mathrm{sing}}(t,\star)$, $(t\in\boldsymbol{R})$ は、共通のコンパクト集合 C に含まれるから、$\psi_C \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ を $\psi_C(x) = 1$ on C と選ぶ。この時、任意の $q_0 \ge \tilde{p} \ge 1$ に対して、$1/\tilde{p} = 1/q_0 + (1/\tilde{p} - 1/q_0)$ での Hölder の不等式により、任意の $t, t_0 \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\|V^{\mathrm{sing}}(t,\star) - V^{\mathrm{sing}}(t_0,\star)\|_{\tilde{p}} &= \|(V^{\mathrm{sing}}(t,\star) - V^{\mathrm{sing}}(t_0,\star))\psi_C\|_{\tilde{p}} \\ &\le \|V^{\mathrm{sing}}(t,\star) - V^{\mathrm{sing}}(t_0,\star)\|_{q_0} \|\psi_C\|_{(1/\tilde{p}-1/q_0)^{-1}}\end{aligned}$$

だから、$V^{\mathrm{sing}} \in C(I, L^{\tilde{p}}(\boldsymbol{R}^d))$ となる。$d \ge 4$ の場合は $\tilde{p} = p = q_0$ と選べば良く、$d = 3$ の場合は $q_0 > 3 > 2 \ge 1$ より $\tilde{p} = 2$ と選べる。また、$\partial_t V$ の条件については、まず正則部分は $\partial_t V^{\mathrm{reg}} \in C^1(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^d) \subset L^\beta(I, L^\infty(\boldsymbol{R}^d))$. 特異部分については、任意の $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R}}\int_{\boldsymbol{R}^d} \partial_t V^{\mathrm{sing}}(t,x)\varphi(t,x)\,dxdt &= -\int_{\boldsymbol{R}}\int_{\boldsymbol{R}^d} V^{\mathrm{sing}}(t,x)\psi_C(x)\partial_t\varphi(t,x)\,dxdt \\ &= -\int_{\boldsymbol{R}}\int_{\boldsymbol{R}^d} V^{\mathrm{sing}}(t,x)\partial_t(\psi_C(x)\varphi(t,x))\,dxdt\end{aligned}$$

$$= \int_{\boldsymbol{R}} \int_{\boldsymbol{R}^d} \partial_t V^{\mathrm{sing}}(t,x) \psi_C(x) \varphi(t,x) dx dt$$

だから、

$$\partial_t V^{\mathrm{sing}}(t,x) = \partial_t V^{\mathrm{sing}}(t,x)\psi_C(x), \text{ for a.e.}(t,x)$$

となるが、更に両辺は t について連続だから、任意の t に対して

$$\partial_t V^{\mathrm{sing}}(t,x) = \partial_t V^{\mathrm{sing}}(t,x)\psi_C(x), \text{ for a.e.}x.$$

従って V^{sing} の時と同じ方法で、任意の $\alpha_1 \geq 1$ と任意の $1 \leq p_1 \leq q_1$ に対して、$1/p_1 = 1/q_1 + (1/p_1 - 1/q_1)$ での Hölder の不等式より、

$$\partial_t V^{\mathrm{sing}} \in C(I, L^{p_1}(\boldsymbol{R}^d)) \subset L^{\alpha_1}(I, L^{p_1}(\boldsymbol{R}^d))$$

となる。$d \geq 5$ の時は $q_0 > d$ から、$1/2 \geq 5/(2d) = 1/(2d) + 2/d > 1/(2q_0) + 2/d$, $q_1 > d/2$ より $2/d > 1/q_1$ だから $q_1 > (1/(2q_0) + 2/d)^{-1} > 2.$ 従って、$p_1 := (1/(2q_0) + 2/d)^{-1} = 2dq_0/(d + 4q_0)$ と選べる。$d = 4$ の時は $q_1 > 4/2 = 2$ より $1/(2q_0) + 1/2 > 1/q_1$ だから $q_1 > 2q_0/(q_0 + 1).$ $2q_0 > 2q_0/(q_0 + 1)$ と合わせれば、$2q_0/(q_0 + 1) < p_1 := \min\{2q_0, q_1\} \leq 2q_0$ と選べる。$d = 3$ の時は $1/q_1 = 1/(2q_0) + 1/2$ だから $q_1 = 2q_0/(q_0 + 1).$ 従って、$q_2 := q_1$ と選べば良い。従って、V が条件 (V) を満たす時、谷島氏の仮定 $(A.1)$, $(A.2)$ が満たされるので、$H(t)$ によって解作用素 $U(t,s)$ が一意的に生成され、$H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアン K が $\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素として定義される。この時

$$\mathscr{D}(K) = \mathscr{D}(K_0)$$

であり、K は次の意味で $-i\partial_t + H(t)$ の自然な自己共役拡張と考えられる。$AC(\boldsymbol{T}) \otimes C_0^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ 上の $D_t \otimes \mathrm{Id} + \int_{\boldsymbol{T}}^{\oplus} H(\pi_T^{-1}(t))dt$ は本質的に自己共役で、

$$K = \overline{D_t \otimes \mathrm{Id} + \int_{\boldsymbol{T}}^{\oplus} H(\pi_T^{-1}(t))dt}.$$

また、任意の $\lambda_0 \in \boldsymbol{R} \setminus \mathscr{T}$, $0 < \delta < d(\lambda_0, \mathscr{T})$ に対して、

$$\langle K_0 \rangle^{-1/2} i[V, A_{\lambda_0,\delta}] \langle K_0 \rangle^{-1}, \quad \langle K_0 \rangle^{-1} i[i[V, A_{\lambda_0,\delta}], A_{\lambda_0,\delta}] \langle K_0 \rangle^{-1}$$

の有界性も保証できる。これらを $i[K_0, A_{\lambda_0,\delta}]$ と $i[i[K_0, A_{\lambda_0,\delta}], A_{\lambda_0,\delta}]$ の K_0-有界性と合わせれば、

$$\langle K \rangle^{-1/2} i[K, A_{\lambda_0,\delta}] \langle K \rangle^{-1}, \quad i[K_0, A_{\lambda_0,\delta}] \langle K \rangle^{-1}, \quad \langle K \rangle^{-1} i[i[K, A_{\lambda_0,\delta}], A_{\lambda_0,\delta}] \langle K \rangle^{-1}$$

の有界性が確かめられる (Hypotheses of Perry, Sigal, Simon [3]). 更に、K_0 の局所コンパクト性を用いれば、

$$V\langle K_0\rangle^{-1}, \quad \langle K_0\rangle^{-1}i[V, A_{\lambda_0,\delta}]\langle K_0\rangle^{-1}$$

はコンパクトであり、従って、任意の $f \in S^{-m}$, $m > 0$ に対して、

$$f(K) - f(K_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{C}} \partial_{\overline{z}}\tilde{f}(z)(z-K)^{-1}V(z-K_0)^{-1}dz \wedge d\overline{z}$$

はコンパクトである。

ここで主結果を述べる。

Theorem (Mourre Estimate). V は条件 (V) を満たすとする。
(1) 任意の $\lambda_0 \in \boldsymbol{R}\setminus\mathscr{T}$, $0<\delta<d(\lambda_0,\mathscr{T})$, $f_\delta \in C_0^\infty([-\delta,\delta])$ に対して、$\mathscr{K}$ 上のコンパクト作用素 C_{λ_0,f_δ} が存在して

$$f_\delta(K-\lambda_0)i[K, A_{\lambda_0,\delta}]f_\delta(K-\lambda_0) \geq 2f_\delta(K-\lambda_0)^2 + C_{\lambda_0,f_\delta}.$$

$\sigma_{\mathrm{pp}}(K)\cap[\lambda_0-\delta/2, \lambda_0+\delta/2]$ は有限集合で、$[\lambda_0-\delta/2, \lambda_0+\delta/2]$ 内の K の固有値は多重度有限である。
(2) $\boldsymbol{R}\setminus\mathscr{T}$ 内の K の各固有値は多重度有限で、$\mathscr{T}$ にしか集積しない。$\mathscr{T}\cup\sigma_{\mathrm{pp}}(K)$ は可算閉集合である。任意の $\lambda_0 \in \boldsymbol{R}\setminus(\mathscr{T}\cup\sigma_{\mathrm{pp}}(K))$, $\varepsilon>0$ に対し、ある $0<\delta<d(\lambda_0,\mathscr{T})$ が存在して、任意の $f_\delta \in C_0^\infty([-\delta,\delta])$ に対して

$$f_\delta(K-\lambda_0)i[K, A_{\lambda_0,\delta}]f_\delta(K-\lambda_0) \geq (2-\varepsilon)f_\delta(K-\lambda_0)^2.$$

Theorem (Limiting Absorption Principle).
(1) 任意の $\lambda_0 \in \boldsymbol{R}\setminus(\mathscr{T}\cup\sigma_{\mathrm{pp}}(K))$, $0<\varepsilon<2$ に対して、$\delta>0$ を $[\lambda_0-2\delta, \lambda_0+2\delta]\subset \boldsymbol{R}\setminus(\mathscr{T}\cup\sigma_{\mathrm{pp}}(K))$ かつ

$$f_{2\delta}(K-\lambda_0)i[K, A_{\lambda_0,2\delta}]f_{2\delta}(K-\lambda_0) \geq (2-\varepsilon)f_{2\delta}(K-\lambda_0)^2$$

と選べば、任意の $s>1/2$ に対して

$$\sup_{\mathfrak{Im}z\neq 0, \mathfrak{Re}z\in[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]} \|\langle A_{\lambda_0,2\delta}\rangle^{-s}(K-z)^{-1}\langle A_{\lambda_0,2\delta}\rangle^{-s}\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{K})} < \infty.$$

$\langle A_{\lambda_0,2\delta}\rangle^{-s}(K-z)^{-1}\langle A_{\lambda_0,2\delta}\rangle^{-s}$ は $z \in S_{\lambda_0,\delta,\pm}$ の $\boldsymbol{B}(\mathscr{K})$-値 $\theta(s)$-Hölder 連続関数である。

$$\theta(s) = (\min\{s-1/2,\rho\})/(\min\{s-1/2,\rho\}+1),$$

$$S_{\lambda_0,\delta,\pm} = \left\{\zeta \in \boldsymbol{C} \;\middle|\; 0 < \pm\mathfrak{Im}\,\zeta \leq 1, \mathfrak{Re}\,\zeta \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]\right\}.$$

任意の $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ に対して $\boldsymbol{B}(\mathscr{K})$ 内で次の極限が存在する。

$$\lim_{\epsilon \to +0} \langle A_{\lambda_0,2\delta}\rangle^{-s}(K - (\lambda \pm i\epsilon))^{-1}\langle A_{\lambda_0,2\delta}\rangle^{-s}.$$

$\langle A_{\lambda_0,2\delta}\rangle^{-s}(K - (\lambda \pm i0))^{-1}\langle A_{\lambda_0,2\delta}\rangle^{-s}$ は λ に関する $\theta(s)$-Hölder 連続関数である。
(2) 任意の $1/2 < s \leq 1$ と任意の閉区間 $I \subset \boldsymbol{R} \setminus (\mathscr{T} \cup \sigma_{\mathrm{pp}}(K))$ に対して

$$\sup_{\mathfrak{Im} z \neq 0, \mathfrak{Re} z \in I} \|\langle x\rangle^{-s}(K - z)^{-1}\langle x\rangle^{-s}\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{K})} < \infty.$$

$\langle x\rangle^{-s}(K - z)^{-1}\langle x\rangle^{-s}$ は $z \in S_{I,\pm}$ の $\boldsymbol{B}(\mathscr{K})$-値 $\theta(s)$-Hölder 連続関数である。

$$S_{I,\pm} = \left\{\zeta \in \boldsymbol{C} \;\middle|\; 0 < \pm\mathfrak{Im}\,\zeta \leq 1, \mathfrak{Re}\,\zeta \in I\right\}.$$

任意の $\lambda \in I$ に対して $\boldsymbol{B}(\mathscr{K})$ 内で次の極限が存在する。

$$\lim_{\epsilon \to +0} \langle x\rangle^{-s}(K - (\lambda \pm i\epsilon))^{-1}\langle x\rangle^{-s}.$$

$\langle x\rangle^{-s}(K - (\lambda \pm i0))^{-1}\langle x\rangle^{-s}$ は λ に関する $\theta(s)$-Hölder 連続関数である。

§3. Mourre 評価の証明について

任意の $\lambda_0 \in \boldsymbol{R} \setminus \mathscr{T}$ と $0 < \delta < \mathrm{dist}(\lambda_0, \mathscr{T})$ に対して、まず次を証明する。

$$\sup_{|\sigma| \leq 1} \|K_0 e^{i\sigma A_{\lambda_0,\delta}}(K_0 + i)^{-1}\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{K})} < \infty.$$

自由 Floquet ハミルトニアン K_0 と $A_{\lambda_0,\delta}$ を直積分分解する方法が鍵となる。$L^2(\boldsymbol{T})$ は D_t の固有ベクトルからなる完全正規直交系を持ち、k 番目は固有値 $k\omega$ に対応している。各 $k \in \boldsymbol{Z}$ に対する固有射影を P_k とすれば、

$$D_t = \bigoplus_{k \in \boldsymbol{Z}} k\omega P_k|_{AC(\boldsymbol{T})}.$$

これを用いれば、K_0 が

$$K_0 = \overline{\bigoplus_{k \in \boldsymbol{Z}} P_k|_{AC(\boldsymbol{T})} \otimes (k\omega + H_0)}$$

と分解される事は知られている。

Lemma 1. (1)　任意の $\varphi \in L^2(\boldsymbol{T})$, $\{\psi_k\}_{k\in\boldsymbol{Z}} \in \ell^\infty(\boldsymbol{Z};\mathscr{H})$ に対し $\mathscr{K}$ 上の級数 $\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi\otimes\psi_k$ は無条件収束で、

$$\|\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi\otimes\psi_k\|_{\mathscr{K}}^2 = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \|P_k\varphi\|_{L^2(\boldsymbol{T})}^2 \|\psi_k\|_{\mathscr{H}}^2 \le \sup_{k\in\boldsymbol{Z}} \|\psi_k\|_{\mathscr{H}}^2 \|\varphi\|_{L^2(\boldsymbol{T})}^2.$$

(2)　任意の $z \in \boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R}$ に対して、

$$(K_0 - z)^{-1} = \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1}}.$$

(3)

$$A_{\lambda_0,\delta} = \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1}\hat{A}_0}.$$

(4)　任意の $\sigma \in \boldsymbol{R}$ に対して、

$$e^{-i\sigma A_{\lambda_0,\delta}} = \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}}.$$

Proof. (1)　$L^2(\boldsymbol{T})$ の今の完全正規直交系を $\{e_k\}_{k\in\boldsymbol{Z}}$ と書き、$\mathscr{H}$ の一つの完全正規直交系 $\{e'_l\}_{l\in\boldsymbol{N}}$ を取る。その時 $\{e_k\otimes e'_l\}_{(k,l)\in\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{N}}$ は $\mathscr{K}$ の完全正規直交系である。任意の $\varphi \in L^2(\boldsymbol{T})$, $\{\psi_k\}_{k\in\boldsymbol{Z}} \in \ell^\infty(\boldsymbol{Z},\mathscr{H})$ に対し、Parseval の等式から、

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\sum_{l\in\boldsymbol{N}} |(\varphi,e_k)_{L^2(\boldsymbol{T})}(\psi_k,e'_l)_{\mathscr{H}}|^2 &= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} |(\varphi,e_k)_{L^2(\boldsymbol{T})}|^2 \sum_{l\in\boldsymbol{N}} |(\psi_k,e'_l)_{\mathscr{H}}|^2 \\
&= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} |(\varphi,e_k)_{L^2(\boldsymbol{T})}|^2 \|\psi_k\|_{\mathscr{H}}^2 \\
&\le \sup_{k\in\boldsymbol{Z}} \|\psi_k\|_{\mathscr{H}}^2 \|\varphi\|_{L^2(\boldsymbol{T})}^2 < +\infty.
\end{aligned}$$

従って、$(\varphi,e_k)_{L^2(\boldsymbol{T})}(\psi_k,e'_l)_{\mathscr{H}} e_k\otimes e'_l$ は $(k,l)\in\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{N}$ について $\mathscr{K}$ 上総和可能だから、

$$P_k\varphi\otimes\psi_k = (\varphi,e_k)_{L^2(\boldsymbol{T})} e_k \otimes \sum_{l\in\boldsymbol{N}} (\psi_k,e'_l)_{\mathscr{H}} e'_l = \sum_{l\in\boldsymbol{N}} (\varphi,e_k)_{L^2(\boldsymbol{T})}(\psi_k,e'_l)_{\mathscr{H}} e_k\otimes e'_l$$

も $k\in\boldsymbol{Z}$ について $\mathscr{K}$ 上総和可能である。

$$\begin{aligned}
\|\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi\otimes\psi_k\|_{\mathscr{K}}^2 &= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\sum_{l\in\boldsymbol{Z}} (P_k\varphi\otimes\psi_k, P_l\varphi\otimes\psi_l)_{\mathscr{K}} \\
&= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\sum_{l\in\boldsymbol{Z}} (P_k\varphi,P_l\varphi)_{L^2(\boldsymbol{T})}(\psi_k,\psi_l)_{\mathscr{H}} = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \|P_k\varphi\|_{L^2(\boldsymbol{T})}^2 \|\psi_k\|_{\mathscr{H}}^2 \\
&\le \sup_{k\in\boldsymbol{Z}} \|\psi_k\|_{\mathscr{H}}^2 \sum_{l\in\boldsymbol{Z}} \|P_l\varphi\|_{L^2(\boldsymbol{T})}^2 = \sup_{k\in\boldsymbol{Z}} \|\psi_k\|_{\mathscr{H}}^2 \|\varphi\|_{L^2(\boldsymbol{T})}^2.
\end{aligned}$$

(2)　$z \in \boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{R}$ とする。$\mathfrak{Im} z \neq 0$ だから、任意の $\varphi \in L^2(\boldsymbol{T})$, $\psi \in \mathscr{H}$ に対し、$\|(k\omega + H_0 - z)^{-1}\| \leq 1/|\mathfrak{Im} z|$, $(k \in \boldsymbol{Z})$ であり、(1) によって $\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1}(\varphi \otimes \psi)$ が定義できる。

$$
\begin{aligned}
&(K_0 - z) \bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1}(\varphi \otimes \psi) \\
&= \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k|_{AC(\boldsymbol{T})} \otimes (k\omega + H_0 - z)} \circ \bigoplus_{l\in\boldsymbol{Z}} P_l \otimes (l\omega + H_0 - z)^{-1}(\varphi \otimes \psi) \\
&= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \sum_{l\in\boldsymbol{Z}} P_k P_l \varphi \otimes (k\omega + H_0 - z)(l\omega + H_0 - z)^{-1}\psi \\
&= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \varphi \otimes \psi = \varphi \otimes \psi.
\end{aligned}
$$

従って、任意の $u \in L^2(\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathrm{alg}} \mathscr{H}$ に対し

$$
(K_0 - z) \bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1} u = u.
$$

任意の $v \in L^2(\boldsymbol{T}) \otimes \mathscr{H} \cong \mathscr{K}$ に対し、$\{u_j\}_{j\in\boldsymbol{N}} \subset L^2(\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathrm{alg}} \mathscr{H}$ が存在して、

$$
(u_j, \bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1} u_j) \to (v, \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1}} v) \ (j \to \infty).
$$

$K_0 - z$ は閉作用素で、

$$
(K_0 - z) \bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1} u_j = u_j \to v \ (j \to \infty)
$$

だから、$\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1}} v \in \mathscr{D}(K_0)$,

$$
v = (K_0 - z) \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1}} v.
$$

従って

$$
(K_0 - z) \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}.
$$

同様に

$$
\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (k\omega + H_0 - z)^{-1}} (K_0 - z) = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}(K_0)}.
$$

(3)　まず、任意の $k \in \boldsymbol{Z}$ に対して、$|\lambda_0 - \delta - k\omega| \geq \mathrm{dist}(\lambda_0, \mathscr{T}) - \delta$ より

$$
|(\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1}| \leq (\mathrm{dist}(\lambda_0, \mathscr{T}) - \delta)^{-1}
$$

という事に注意すれば、任意の $\varphi \in L^2(\boldsymbol{T})$, $\psi \in \mathscr{D}(\hat{A}_0)$ に対し、(1) より $\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi \otimes (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1}\hat{A}_0\psi$ は定義できる。$(D_t - z)^{-1} = \bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}}(k\omega - z)^{-1}P_k$, $(z \in \rho(D_t))$ を用いれば、

$$\{(\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes \hat{A}_0\}(\varphi \otimes \psi) = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}}(\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1}P_k\varphi \otimes \hat{A}_0\psi$$
$$= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi \otimes (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1}\hat{A}_0\psi$$

だから、

$$A_{\lambda_0,\delta} = \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1}\hat{A}_0}.$$

(4)　任意の $\sigma \in \boldsymbol{R}$, $\sum_{m=1}^N \alpha_m\varphi_m \otimes \psi_m \in L^2(\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathrm{alg}} \mathscr{H}$ に対して、

$$\|\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}\sum_{m=1}^N \alpha_m\varphi_m \otimes \psi_m\|^2_{\mathscr{K}}$$
$$= \sum_{m=1}^N\sum_{n=1}^N \alpha_m\overline{\alpha_n}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\sum_{l\in\boldsymbol{Z}}(P_k\varphi_m \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}\psi_m, P_l\varphi_n \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-l\omega}\hat{A}_0}\psi_n)_{\mathscr{K}}$$
$$= \sum_{m=1}^N\sum_{n=1}^N \alpha_m\overline{\alpha_n}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\sum_{l\in\boldsymbol{Z}}(P_k\varphi_m, P_l\varphi_n)_{L^2(\boldsymbol{T})}(e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}\psi_m, e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-l\omega}\hat{A}_0}\psi_n)_{\mathscr{H}}$$
$$= \sum_{m=1}^N\sum_{n=1}^N \alpha_m\overline{\alpha_n}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}(P_k\varphi_m, P_k\varphi_n)_{L^2(\boldsymbol{T})}(\psi_m, \psi_n)_{\mathscr{H}}$$
$$= \sum_{m=1}^N\sum_{n=1}^N \alpha_m\overline{\alpha_n}(\psi_m, \psi_n)_{\mathscr{H}}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\sum_{l\in\boldsymbol{Z}}(P_k\varphi_m, P_l\varphi_n)_{L^2(\boldsymbol{T})}$$
$$= \sum_{m=1}^N\sum_{n=1}^N \alpha_m\overline{\alpha_n}(\psi_m, \psi_n)_{\mathscr{H}}(\varphi_m, \varphi_n)_{L^2(\boldsymbol{T})} = \|\sum_{m=1}^N \alpha_m\varphi_m \otimes \psi_m\|^2_{\mathscr{K}}.$$

従って、$\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}}$ は等長である。全射性と群特性も (2) と同じ計算からわかる。$\varphi \in L^2(\boldsymbol{T})$, $\psi \in \mathscr{H}$, $\varepsilon > 0$ とする。

$$\|\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}(\varphi \otimes \psi) - \bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes \mathrm{Id}(\varphi \otimes \psi)\|^2_{\mathscr{K}}$$
$$= \|\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi \otimes (e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}\psi - \psi)\|^2_{\mathscr{K}} = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\|P_k\varphi\|^2_{L^2(\boldsymbol{T})}\|e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}\psi - \psi\|^2_{\mathscr{H}}.$$

$e^{-i\sigma'\hat{A}_0}$ の強連続性より、$|\sigma'| < \delta_0$ とすると、$\|e^{-i\sigma'\hat{A}_0}\psi - \psi\|_{\mathscr{H}} < \varepsilon$ とできる。今、$|\sigma| < \delta_0(\mathrm{dist}(\lambda_0, \mathscr{T}) - \delta)$ と取れば、任意の $k \in \boldsymbol{Z}$ に対して、$|\lambda_0 - \delta - k\omega| \geq \mathrm{dist}(\lambda_0, \mathscr{T}) - \delta$ だから、

$$\left|\frac{\sigma}{\lambda_0 - \delta - k\omega}\right| < \frac{\delta_0(\mathrm{dist}(\lambda_0, \mathscr{T}) - \delta)}{\mathrm{dist}(\lambda_0, \mathscr{T}) - \delta} = \delta_0.$$

従って、

$$\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \|P_k\varphi\|^2_{L^2(\boldsymbol{T})} \|e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}\psi - \psi\|^2_{\mathscr{H}} \leq \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \|P_k\varphi\|^2_{L^2(\boldsymbol{T})}\varepsilon^2 = \|\varphi\|^2_{L^2(\boldsymbol{T})}\varepsilon^2.$$

三角不等式を用いれば、任意の $\sum_{m=1}^N \alpha_m\varphi_m \otimes \psi_m \in L^2(\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathrm{alg}} \mathscr{H}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\|\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}(\sum_{m=1}^N \alpha_m\varphi_m \otimes \psi_m) - \bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes \mathrm{Id}(\sum_{m=1}^N \alpha_m\varphi_m \otimes \psi_m)\|_{\mathscr{K}} \\
&\leq \sum_{m=1}^N |\alpha_m| \|\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}(\varphi_m \otimes \psi_m) - \bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes \mathrm{Id}(\varphi_m \otimes \psi_m)\|_{\mathscr{K}} \\
&\to 0 \ (\sigma \to 0).
\end{aligned}$$

故に $\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}}$ は $\sigma = 0$ で強連続であり、群特性と合わせると $\boldsymbol{R}$ 上強連続である。従って $\{\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}}\}_{\sigma\in\boldsymbol{R}}$ は $\mathscr{K}$ 上の強連続 1 パラメータユニタリ群である。$\mathscr{D}(\hat{A}_0)$ は $\mathscr{H}$ で稠密だから、$L^2(\boldsymbol{T}) \otimes \mathscr{D}(\hat{A}_0)$ は $\mathscr{K}$ で稠密である。任意の $\sigma \in \boldsymbol{R}$ に対して、$e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}$ は $\mathscr{D}(\hat{A}_0)$ を不変にするから、$\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}}$ は $L^2(\boldsymbol{T}) \otimes \mathscr{D}(\hat{A}_0)$ を不変にする。任意の $\varphi \in L^2(\boldsymbol{T})$, $\psi \in \mathscr{D}(\hat{A}_0)$ に対し、

$$\begin{aligned}
&\|\frac{1}{\varepsilon}(\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi \otimes e^{-i\frac{\sigma+\varepsilon}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}\psi - \bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}\psi) \\
&\qquad + i\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}(\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1}\hat{A}_0\psi\|^2_{\mathscr{K}} \\
&= \|\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi \otimes \{\frac{1}{\varepsilon}(e^{-i\frac{\sigma+\varepsilon}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}\psi - e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}\psi) \\
&\qquad + ie^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}(\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1}\hat{A}_0\psi\}\|^2_{\mathscr{K}} \\
&= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \|P_k\varphi\|^2_{L^2(\boldsymbol{T})} \|\frac{1}{\varepsilon}(e^{-i\frac{\varepsilon}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}\psi - \psi) + i(\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1}\hat{A}_0\psi\|^2_{\mathscr{H}} \\
&=: \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \|P_k\varphi\|^2_{L^2(\boldsymbol{T})}\alpha(k, \varepsilon).
\end{aligned}$$

任意の $k \in \boldsymbol{Z}$ に対して、$(\lambda_0 - \delta - k\omega)^{-1}\hat{A}_0$ も自己共役で、$\psi \in \mathscr{D}(\hat{A}_0)$ だから $\alpha(k,\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0, \varepsilon \neq 0)$. 不等式 $|e^{ix}-1| \leq |x|$, $x \in \boldsymbol{R}$ より、

$$\begin{aligned}\alpha(k,\varepsilon) &= \int_{\boldsymbol{R}} \Big|\frac{e^{-i\frac{\varepsilon\kappa}{\lambda_0-\delta-k\omega}}-1}{\varepsilon} + i\frac{\kappa}{\lambda_0-\delta-k\omega}\Big|^2 d\|E_{\hat{A}_0}(\kappa)\psi\|_{\mathscr{H}}^2 \\ &\leq 4\int_{\boldsymbol{R}} \Big|\frac{\kappa}{\lambda_0-\delta-k\omega}\Big|^2 d\|E_{\hat{A}_0}(\kappa)\psi\|_{\mathscr{H}}^2 \leq 4(\mathrm{dist}(\lambda_0,\mathscr{T})-\delta)^{-2}\|\hat{A}_0\psi\|_{\mathscr{H}}^2.\end{aligned}$$

最後の項は k, ε に依らない定数で、$\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\|P_k\varphi\|_{L^2(\boldsymbol{T})}^2 = \|\varphi\|_{L^2(\boldsymbol{T})}^2 < \infty$ だから、Lebesgue の収束定理より、$\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\|P_k\varphi\|_{L^2(\boldsymbol{T})}^2\alpha(k,\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0, \varepsilon \neq 0)$. 従って、$\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}}(\varphi\otimes\psi)$ は強微分可能で、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\sigma}\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}}(\varphi\otimes\psi)\Big|_{\sigma=0} &= -i\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi \otimes (\lambda_0-\delta-k\omega)^{-1}\hat{A}_0\psi \\ &= -iA_{\lambda_0,\delta}(\varphi\otimes\psi).\end{aligned}$$

従って、$e^{-i\sigma A_{\lambda_0,\delta}} = \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}}$ が得られた。 □

以上より、

$$\begin{aligned}&e^{i\sigma A_{\lambda_0,\delta}}(K_0+i)^{-1}e^{-i\sigma A_{\lambda_0,\delta}} \\ &= \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes e^{i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}} \circ \overline{\bigoplus_{l\in\boldsymbol{Z}} P_l \otimes (l\omega+H_0+i)^{-1}} \circ \overline{\bigoplus_{m\in\boldsymbol{Z}} P_m \otimes e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-m\omega}\hat{A}_0}} \\ &= \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes \{e^{i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}(k\omega+H_0+i)^{-1}e^{-i\frac{\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}\hat{A}_0}\}}.\end{aligned}$$

ここで、$\hat{A}_0$ は伸張の生成作用素 $(e^{i\sigma'\hat{A}_0}\psi)(x) = e^{\sigma' d/2}\psi(e^{\sigma'}x)$ であり、その Fourier 変換との交換関係 $\mathcal{F}e^{-i\sigma'\hat{A}_0} = e^{i\sigma'\hat{A}_0}\mathcal{F}$ に注意すれば、$\sigma' = \sigma/(\lambda_0-\delta-k\omega)$ に対し

$$\begin{aligned}e^{i\sigma'\hat{A}_0}(k\omega+H_0+i)^{-1}e^{-i\sigma'\hat{A}_0} &= e^{i\sigma'\hat{A}_0}\mathcal{F}^{-1}(k\omega+\star^2/2+i)^{-1}\mathcal{F}e^{-i\sigma'\hat{A}_0} \\ &= e^{i\sigma'\hat{A}_0}e^{-i\sigma'\hat{A}_0}\mathcal{F}^{-1}(k\omega+e^{-2\sigma'}\star^2/2+i)^{-1}\mathcal{F} \\ &= (k\omega+e^{-2\sigma'}H_0+i)^{-1}.\end{aligned}$$

まとめると、任意の $|\sigma| \leq 1$ に対して、

$$\begin{aligned}&K_0e^{i\sigma A_{\lambda_0,\delta}}(K_0+i)^{-1}e^{-i\sigma A_{\lambda_0,\delta}} \\ &= \overline{\bigoplus_{l\in\boldsymbol{Z}} P_l|_{AC(\boldsymbol{T})} \otimes (l\omega+H_0)} \circ \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes (k\omega+e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}}H_0+i)^{-1}}\end{aligned}$$

$$= \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes \{(k\omega + H_0)(k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}} H_0 + i)^{-1}\}}.$$

この作用素ノルムは、次の計算を用いて評価する。

Lemma 2. 任意の $\{T(k)\}_{k\in\boldsymbol{Z}} \in \ell^\infty(\boldsymbol{Z}; \boldsymbol{B}(\mathscr{H}))$ に対して、$\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes T(k)} \in \boldsymbol{B}(\mathscr{K})$ であり、

$$\|\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes T(k)}\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{K})} \leq \sup_{k\in\boldsymbol{Z}} \|T(k)\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{H})}.$$

Proof. F_1, F_2 をそれぞれ $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{N}$ の任意の有限部分集合、$\{c_{l,m}\}_{(l,m)\in F_1\times F_2}$ を任意の複素数列とする。$\sum_{(l,m)\in F_1\times F_2} c_{l,m} e_l \otimes e'_m$ は、$\mathscr{K}$ の稠密な部分空間 L.h.$(\{e_l \otimes e'_m \mid (l,m) \in \boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{N}\})$ の任意の要素を表している。

$$\begin{aligned}
&\|\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes T(k) \sum_{(l,m)\in F_1\times F_2} c_{l,m} e_l \otimes e'_m\|^2_{\mathscr{K}} \\
&= \sum_{(l,m)\in F_1\times F_2} \sum_{(l',m')\in F_1\times F_2} c_{l,m}\overline{c_{l',m'}} \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \sum_{k'\in\boldsymbol{Z}} (P_k e_l, P_{k'} e_{l'})_{L^2(\boldsymbol{T})} (T(k)e'_m, T(k')e'_{m'})_{\mathscr{H}} \\
&= \sum_{(l,m)\in F_1\times F_2} \sum_{(l',m')\in F_1\times F_2} c_{l,m}\overline{c_{l',m'}} (e_l, e_{l'})_{L^2(\boldsymbol{T})} (T(l)e'_m, T(l')e'_{m'})_{\mathscr{H}} \\
&= \sum_{l\in F_1} \sum_{m\in F_2} \sum_{m'\in F_2} c_{l,m}\overline{c_{l,m'}} (T(l)e'_m, T(l)e'_{m'})_{\mathscr{H}} \\
&= \sum_{l\in F_1} (\sum_{m\in F_2} c_{l,m} T(l) e'_m, \sum_{m'\in F_2} c_{l,m'} T(l) e'_{m'})_{\mathscr{H}} = \sum_{l\in F_1} \|T(l) \sum_{m\in F_2} c_{l,m} e'_m\|^2_{\mathscr{H}} \\
&\leq \sup_{k\in\boldsymbol{Z}} \|T(k)\|^2_{\boldsymbol{B}(\mathscr{H})} \sum_{l\in F_1} \|\sum_{m\in F_2} c_{l,m} e'_m\|^2_{\mathscr{H}} = \sup_{k\in\boldsymbol{Z}} \|T(k)\|^2_{\boldsymbol{B}(\mathscr{H})} \sum_{l\in F_1} \sum_{m\in F_2} |c_{l,m}|^2 \\
&= \sup_{k\in\boldsymbol{Z}} \|T(k)\|^2_{\boldsymbol{B}(\mathscr{H})} \|\sum_{(l,m)\in F_1\times F_2} c_{l,m} e_l \otimes e'_m\|^2_{\mathscr{K}}.
\end{aligned}$$

従って $\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes T(k)$ は L.h.$(\{e_l \otimes e'_m \mid (l,m) \in \boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{N}\})$ 上有界だから、$\mathscr{K}$ 上へのただ一つの有界な拡張を持つ。一方それは $\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes T(k)}$ と一致する。 □

そこで、$\|(k\omega + H_0)(k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}} H_0 + i)^{-1}\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{H})}$ を評価するため、$[0,\infty)\times\boldsymbol{R}$ 上の関数

$$\eta_\sigma(\kappa,\tau) = \frac{(\tau+\kappa)^2}{(\tau + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0-\delta-\tau}}\kappa)^2 + 1}$$

を導入し、次の通り解析する。任意の $k \in \boldsymbol{Z}$ に対して、

$$\eta_\sigma(\kappa, k\omega) \leq M^2_{\lambda_0,\delta}, \quad \kappa \in [0,\infty).$$

作用素解析によって、

$$
\begin{aligned}
&\|(k\omega + H_0)(k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}}H_0 + i)^{-1}\varphi\|_{\mathscr{H}}^2 \\
= &\int_0^\infty |(k\omega+\kappa)(k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}}\kappa + i)^{-1}|^2 d\|E_{H_0}(\kappa)\varphi\|^2 \\
= &\int_0^\infty \eta_\sigma(\kappa, k\omega) d\|E_{H_0}(\kappa)\varphi\|^2 \le M_{\lambda_0,\delta}^2 \|\varphi\|_{\mathscr{H}}^2,\ \varphi \in \mathscr{H},
\end{aligned}
$$

ここで E_{H_0} は H_0 のスペクトル測度である。以上より、

$$
\begin{aligned}
&\sup_{|\sigma|\le 1} \|K_0 e^{i\sigma A_{\lambda_0,\delta}}(K_0+i)^{-1}\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{K})} \\
= &\sup_{|\sigma|\le 1} \|K_0 e^{i\sigma A_{\lambda_0,\delta}}(K_0+i)^{-1}e^{-i\sigma A_{\lambda_0,\delta}}\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{K})} \\
= &\sup_{|\sigma|\le 1} \|\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes \{(k\omega+H_0)(k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}}H_0 + i)^{-1}\}}\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{K})} \\
\le &\sup_{|\sigma|\le 1}\sup_{k\in\boldsymbol{Z}} \|(k\omega+H_0)(k\omega + e^{-\frac{2\sigma}{\lambda_0-\delta-k\omega}}H_0 + i)^{-1}\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{H})} \le M_{\lambda_0,\delta}.
\end{aligned}
$$

従って $\mathscr{D}(K_0)$ は $e^{i\sigma A_{\lambda_0,\delta}}$-不変で、$V$ は K_0-有界だから、標準的な議論によって

$$
\sup_{|\sigma|\le 1} \|K e^{i\sigma A_{\lambda_0,\delta}}(K+i)^{-1}\|_{\boldsymbol{B}(\mathscr{K})} < \infty.
$$

Mourre 評価についても同様に、$i[K_0, A_{\lambda_0,\delta}]$ と $f_\delta(K_0-\lambda_0)$ を分解して考える。まず $i[K_0, A_{\lambda_0,\delta}]$ については、

$$
\begin{aligned}
i[K_0, A_{\lambda_0,\delta}] &= \overline{2(\lambda_0-\delta-D_t)^{-1}\otimes H_0} = 2\overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}}(\lambda_0-\delta-k\omega)^{-1}P_k\otimes H_0} \\
&= \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\otimes 2(\lambda_0-\delta-k\omega)^{-1}H_0}.
\end{aligned}
$$

Lemma 3. 任意の $f \in C_0(\boldsymbol{R})$ と $\mu \in \boldsymbol{R}$ に対して、

$$
f(K_0-\mu) = \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k \otimes f(H_0-(\mu-k\omega))}.
$$

Proof. 任意の $\varphi \in L^2(\boldsymbol{T})$, $\psi \in \mathscr{H}$ に対して、Stone の公式より、

$$
\begin{aligned}
&f(K_0-\mu)(\varphi\otimes\psi) \\
= &\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{R}} f(\kappa)\{(K_0-\mu-\kappa-i\varepsilon)^{-1} - (K_0-\mu-\kappa+i\varepsilon)^{-1}\}(\varphi\otimes\psi)d\kappa
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{R}} f(\kappa) \bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi \otimes \{(k\omega + H_0 - \mu - \kappa - i\varepsilon)^{-1} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - (k\omega + H_0 - \mu - \kappa + i\varepsilon)^{-1}\}\psi d\kappa \\
&=: \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{R}} f(\kappa) \bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi \otimes \psi'(\varepsilon,\kappa,k) d\kappa.
\end{aligned}
$$

$\varepsilon > 0$ とする。$\boldsymbol{Z}$ の任意の有限部分集合 F に対して、

$$
\begin{aligned}
\|\sum_{k\in F} f(\kappa)P_k\varphi\otimes\psi'(\varepsilon,\kappa,k)\|^2_{\mathscr{K}} &= |f(\kappa)|^2 \sum_{k\in F}\|P_k\varphi\|^2_{L^2(\boldsymbol{T})}\|\psi'(\varepsilon,\kappa,k)\|^2_{\mathscr{H}} \\
&\le |f(\kappa)|^2 \sum_{k\in \boldsymbol{Z}}\|P_k\varphi\|^2_{L^2(\boldsymbol{T})}\|\psi'(\varepsilon,\kappa,k)\|^2_{\mathscr{H}} \\
&= \|\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} f(\kappa)P_k\varphi\otimes\psi'(\varepsilon,\kappa,k)\|^2_{\mathscr{K}}
\end{aligned}
$$

だから、Lebesgue の収束定理によって

$$
\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{R}} f(\kappa)\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi\otimes\psi'(\varepsilon,\kappa,k)d\kappa &= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\int_{\boldsymbol{R}} f(\kappa)P_k\varphi\otimes\psi'(\varepsilon,\kappa,k)d\kappa \\
&= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi\otimes\int_{\boldsymbol{R}} f(\kappa)\psi'(\varepsilon,\kappa,k)d\kappa.
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\|\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi\otimes\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{R}} f(\kappa)\psi'(\varepsilon,\kappa,k)d\kappa - \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\varphi\otimes f(H_0-(\mu-k\omega))\psi\|^2_{\mathscr{K}} \\
&= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\|P_k\varphi\|^2_{L^2(\boldsymbol{T})}\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{R}} f(\kappa)\psi'(\varepsilon,\kappa,k)d\kappa - f(H_0-(\mu-k\omega))\psi\|^2_{\mathscr{H}}.
\end{aligned}
$$

右辺は、まず任意の $k\in\boldsymbol{Z}$ に対して、再び Stone の公式より $\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{R}} f(\kappa)\psi'(\varepsilon,\kappa,k)d\kappa - f(H_0-(\mu-k\omega))\psi\|_{\mathscr{H}} \to 0 \quad (\varepsilon\downarrow 0)$. また Stone の公式の証明より、

$$
\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{R}} f(\kappa)\psi'(\varepsilon,\kappa,k)d\kappa\|_{\mathscr{H}} \le \|f\|_\infty\|\psi\|_{\mathscr{H}}
$$

だから、Lebesgue の収束定理によって $\varepsilon\downarrow 0$ の時 0 に収束する。 □

以上より、

$$
f_\delta(K_0-\lambda_0)i[K_0,A_{\lambda_0,\delta}]f_\delta(K_0-\lambda_0) = \overline{\bigoplus_{k\in\boldsymbol{Z}} P_k\otimes\frac{2}{\lambda_0-\delta-k\omega}H_0 f_\delta(H_0-(\lambda_0-k\omega))^2}.
$$

$\lambda_0 - k\omega < 0$, $(k \geq n_{\lambda_0} + 1)$ の場合、$H_0 = p^2/2$, $f_\delta \in C_0^\infty([-\delta, \delta])$ かつ

$$\kappa - (\lambda_0 - k\omega) \geq k\omega - \lambda_0 \geq \mathrm{dist}(\lambda_0, \mathscr{T}) > \delta, \quad \kappa \in [0, \infty)$$

だから $f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega)) = 0$. $\lambda_0 - k\omega > 0$, $(k \leq n_{\lambda_0})$ の場合、$\kappa \in [0, \infty)$ で $\kappa - (\lambda_0 - k\omega) \geq -\delta$, $(\kappa > \lambda_0 - k\omega - \delta)$ となるものを考え、作用素解析によって、

$$\begin{aligned} H_0 f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega))^2 &= \int_0^\infty \kappa f_\delta(\kappa - (\lambda_0 - k\omega))^2 E_{H_0}(d\kappa) \\ &\geq (\lambda_0 - k\omega - \delta) \int_0^\infty f_\delta(\kappa - (\lambda_0 - k\omega))^2 E_{H_0}(d\kappa) \\ &= (\lambda_0 - k\omega - \delta) f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega))^2. \end{aligned}$$

故に、Lemma 2 と全く同様の計算によって、

$$\begin{aligned} f_\delta(K_0 - \lambda_0) i[K_0, A_{\lambda_0,\delta}] f_\delta(K_0 - \lambda_0) &= \overline{\bigoplus_{k \in \boldsymbol{Z}} P_k \otimes \frac{2}{\lambda_0 - \delta - k\omega} H_0 f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega))^2} \\ &\geq \overline{\bigoplus_{k \leq n_{\lambda_0}} P_k \otimes \frac{2(\lambda_0 - \delta - k\omega)}{\lambda_0 - \delta - k\omega} f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega))^2} \\ &= \overline{\bigoplus_{k \in \boldsymbol{Z}} P_k \otimes 2 f_\delta(H_0 - (\lambda_0 - k\omega))^2} \\ &= 2 f_\delta(K_0 - \lambda_0)^2. \end{aligned}$$

故に、$f_\delta(K - \lambda_0) - f_\delta(K_0 - \lambda_0)$ と $\langle K_0 \rangle^{-1} i[V, A_{\lambda_0,\delta}] \langle K_0 \rangle^{-1}$ のコンパクト性から、標準的な議論によって、$\mathscr{K}$ 上のコンパクト作用素 C_{λ_0, f_δ} が存在して、Mourre 評価

$$f_\delta(K - \lambda_0) i[K, A_{\lambda_0,\delta}] f_\delta(K - \lambda_0) \geq 2 f_\delta(K - \lambda_0)^2 + C_{\lambda_0, f_\delta}$$

が得られる。

§4. AC Stark ハミルトニアンに対する散乱問題への応用

時間周期的な電場 $E(t) \in \boldsymbol{R}^d$ 内の 1 体系を考察する。$E(t)$ は $C^0(\boldsymbol{R})$ に属し周期 T, 平均零と仮定する:

$$E_{\mathrm{m}} := \frac{1}{T} \int_0^T E(t)\, dt = 0.$$

系のハミルトニアン $\hat{H}(t)$ は $L^2(\boldsymbol{R}^d)$ 上の

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0(t) + V(x), \quad \hat{H}_0(t) = \frac{1}{2} p^2 - E(t) \cdot x$$

である。$\hat{H}_0(t)$, $\hat{H}(t)$ が生成する解作用素を $\hat{U}_0(t,s)$, $\hat{U}(t,s)$ と書く。後述の短距離型のポテンシャル V に対して、波動作用素 $\hat{W}^{\pm} = \text{s-lim}_{t\to\infty} \hat{U}(t,0)^* \hat{U}_0(t,0)$ の漸近完全性

$$\mathrm{Ran}\,(\hat{W}^{\pm}) = L^2_{\mathrm{c}}(\hat{U}(T,0))$$

を考察する。$L^2_{\mathrm{c}}(\hat{U}(T,0))$ は Floquet 作用素 $\hat{U}(T,0)$ の連続スペクトル部分空間である。ここで、T-周期関数

$$b_0(t) := \int_0^t E(s)\,ds,\ b_{0,\mathrm{m}} := \frac{1}{T}\int_0^T b_0(s)\,ds,\ b(t) := b_0(t) - b_{0,\mathrm{m}},\ c(t) := \int_0^t b(s)\,ds$$

と Avron-Herbst 型公式

$$\hat{U}_0(t,s) = \mathscr{T}(t)e^{-i(t-s)H_0}\mathscr{T}(s)^*, \quad \hat{U}(t,s) = \mathscr{T}(t)U(t,s)\mathscr{T}(s)^*,$$
$$\mathscr{T}(t) = e^{-ia(t)}e^{ib(t)\cdot x}e^{-ic(t)\cdot p}, \quad a(t) = \int_0^t \frac{1}{2}|b(s)|^2\,ds,$$

によって、我々の問題は次の時間周期的なポテンシャルを持つ $\mathscr{H} = L^2(\boldsymbol{R}^d)$ 上のハミルトニアン $H(t)$ の問題に変形される:

$$H(t) = H_0 + V(x + c(t)), \quad H_0 = \frac{1}{2}p^2.$$

Avron-Herbst 型公式の $U(t,s)$ は $H(t)$ によって生成される解作用素を表わしている。更に、波動作用素のユニタリ変換

$$\hat{W}^{\pm} = \mathscr{T}(0)W^{\pm}\mathscr{T}(0)^*, \quad W^{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t\to\infty} U(t,0)^* e^{-itH_0},$$

によって、$\hat{W}^{\pm}$ の漸近完全性も $W^{\pm}$ の漸近完全性

$$\mathrm{Ran}\,(W^{\pm}) = \mathscr{H}_{\mathrm{c}}(U(T,0))$$

に帰着される。ここでポテンシャル V についての短距離型の条件を与える。

Short-Range Condition $(V)_{\mathrm{SR}}$**.** $V(x)$ は $\boldsymbol{R}^d$ 上の実数値関数で $\hat{V}^{\mathrm{sing}}(x)$ と $\hat{V}^{\mathrm{SR}}(x)$ の和である。$d < 3$ ならば $\hat{V}^{\mathrm{sing}} = 0$. $d \geq 3$ ならば $\hat{V}^{\mathrm{sing}}$ は $\infty > q_0 > d$ で $L^{q_0}(\boldsymbol{R}^d)$ に属し、コンパクト台を持つ。$|(\nabla \hat{V}^{\mathrm{sing}})|$ は $\infty > q_1 > d/2$ で $L^{q_1}(\boldsymbol{R}^d)$ に属する。$d = 3$ の場合は、q_1 を $1/q_1 = 1/(2q_0) + 1/2 < 2/d$ によって定義する。$\hat{V}^{\mathrm{SR}}(x)$ は $C^2(\boldsymbol{R}^d)$ に属し $\rho_{\mathrm{SR}} > 1$ で減衰条件

$$|(\partial_x^\alpha \hat{V}^{\mathrm{SR}})(x)| \leq C\langle x\rangle^{-\rho_{\mathrm{SR}}-|\alpha|}, \quad |\alpha| \leq 2$$

を満たす。

§2 で言及したように、もし $\hat{V}^{\mathrm{sing}}$ が $|x|^{-\gamma}$ 型の局所特異性を持っているならば、$-\gamma q_0 + d > 0$ でなければならず、従って $\gamma < d/q_0 < 1$ である。また逆に $\gamma < 1$ の時は $\hat{V}^{\mathrm{sing}}$ の条件を満たす事も確かめられる。

この時 $V(x+c(t)) = \hat{V}^{\mathrm{sing}}(x+c(t)) + \hat{V}^{\mathrm{SR}}(x+c(t))$ は条件 (V) を $\rho = \rho_{\mathrm{SR}} - 1 > 0$ で満たす。この ρ の値は、

$$\partial_t^2(\hat{V}^{\mathrm{SR}}(x+c(t))) = E(t)\cdot(\nabla\hat{V}^{\mathrm{SR}})(x+c(t)) + \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} b_j(t)b_k(t)(\partial_j\partial_k\hat{V}^{\mathrm{SR}})(x+c(t))$$

の第一項に一階だけの微分が残ってしまう事に起因していて、実際 Peetre の不等式より

$$\begin{aligned}
&|\partial_t^2(\hat{V}^{\mathrm{SR}}(x+c(t)))| \\
&\le |E(t)\cdot(\nabla\hat{V}^{\mathrm{SR}})(x+c(t))| + \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} |b_j(t)b_k(t)(\partial_j\partial_k\hat{V}^{\mathrm{SR}})(x+c(t))| \\
&\lesssim |E(t)|\langle x+c(t)\rangle^{-\rho_{\mathrm{SR}}-1} + \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} |b_j(t)b_k(t)|\langle x+c(t)\rangle^{-\rho_{\mathrm{SR}}-2} \\
&\lesssim \max_{0\le s\le T}|E(s)|\langle c(s)\rangle^{\rho_{\mathrm{SR}}+1}\langle x\rangle^{-\rho_{\mathrm{SR}}-1} + \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\max_{0\le s\le T}|b_j(s)b_k(s)|\langle c(s)\rangle^{\rho_{\mathrm{SR}}+2}\langle x\rangle^{-\rho_{\mathrm{SR}}-2} \\
&\lesssim \langle x\rangle^{-(\rho_{\mathrm{SR}}-1)-2}
\end{aligned}$$

である。従って、$\hat{V}^{\mathrm{SR}}$ を長距離型のポテンシャルに取り換える事はできない。

我々の波動作用素

$$W^{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t\to\infty} U(t,0)^* e^{-itH_0}$$

の漸近完全性の証明では、Howland-Yajima の方法が用いられる。K_0 と K を、$\mathscr{K} = L^2(\boldsymbol{T};\mathscr{H})$ 上の、それぞれ H_0 と $H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアンとする。Howland-Yajima の方法とは次のような理論である: もし $W^{\pm}$ の存在が保証されているならば、$W^{\pm}$ の漸近完全性は Floquet ハミルトニアンに対する波動作用素

$$\mathscr{W}^{\pm}(K,K_0) = \operatorname*{s-lim}_{\sigma\to\pm\infty} e^{i\sigma K}e^{-i\sigma K_0}$$

の漸近完全性から導かれる (Yajima [4, §4]).

今は $\hat{V}^{\mathrm{sing}} = 0$ の場合についてだけ紹介する。極限吸収原理と Kato のスムース理論によって $\langle x\rangle^{-s}$, $s > 1/2$ の局所 K-スムース性が得られる: 任意の閉区間 $I \subset \boldsymbol{R}\setminus(\mathscr{T}\cup\sigma_{\mathrm{pp}}(K))$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|\langle x\rangle^{-s}E_K(I)e^{-i\sigma K}\Phi\|_{\mathscr{K}}^2\,d\sigma \le C\|\Phi\|_{\mathscr{K}}^2, \quad \Phi\in\mathscr{K}.$$

また V を 0 に取り換えれば、$\langle x\rangle^{-s}$, $s>1/2$ の局所 K_0-スムース性も得られる。Lavine の局所スムース性の定理によって、I° 上の局所波動作用素

$$\operatorname*{s-lim}_{\sigma\to\pm\infty} e^{i\sigma K}e^{-i\sigma K_0}E_{K_0}(I^\circ), \quad \operatorname*{s-lim}_{\sigma\to\pm\infty} e^{i\sigma K_0}e^{-i\sigma K}E_{K}(I^\circ)$$

が存在する。これらの局所波動作用素を貼り合わせれば、

$$\mathscr{W}^{\pm}(K,K_0)=\operatorname*{s-lim}_{\sigma\to\pm\infty} e^{i\sigma K}e^{-i\sigma K_0}$$

と共役波動作用素

$$\mathscr{W}^{\pm}(K_0,K)=\operatorname*{s-lim}_{\sigma\to\pm\infty} e^{i\sigma K_0}e^{-i\sigma K}P_{\mathrm{c}}(K)$$

の存在が得られるが、良く知られているようにそれは $\mathscr{W}^{\pm}(K,K_0)$ の完全性を意味する。

参考文献

[1] T. Adachi, On the Mourre estimates for three-body Floquet Hamiltonians, preprint. arXiv:1904.10190

[2] T. Adachi and A. Kiyose, On the Mourre estimates for Floquet Hamiltonians, Lett. Math. Phys. **109** (2019), 2513–2529.

[3] P. Perry, I. M. Sigal and B. Simon, Spectral analysis of N-body Schrödinger operators, Annals of Mathematics, **114** (1981), 519–567.

[4] K. Yajima, Scattering theory for Schrödinger equations with potentials periodic in time, J. Math. Soc. Japan **29** (1977), 729–743.

[5] K. Yajima, Existence of solutions for Schrödinger evolution equations, Comm. Math. Phys. **110** (1987), 415–426.

[6] K. Yokoyama, Mourre theory for time-periodic systems, Nagoya Math. J. **149** (1998), 193–210.