RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B87 (2021), 007–026

Higher order difference equations for interpolation Jack polynomials

By

Genki SHIBUKAWA*

Abstract

We give a new derivation of higher order difference equations for interpolation Jack polynomials originally found by Knop and Sahi (1996). Our derivation is based on the Sekiguchi operators and twisted Pieri formulas for ordinary Jack polynomials.

§ 1. Introduction －一変数－

補間 Jack 多項式 (interpolation or shifted Jack polynomials) は Sahi [Sa], Knapp-Sahi [KS], Okounkov-Olshanski [OO1] らにより導入された shifted Schur 多項式の, いわゆる factorial Schur [M1] とは別の, 連続変形 (Jack 版) である. shifted Schur 多項式は元々は一般線型群の普遍包絡環の中心元 (特に Capelli 元) の固有値 (Harish-Chandra image) という表現論的由来があるものだが [OO2], 補間 Jack 多項式はそういった起源とは独立に, 下降ベキ, あるいは二項係数の多変数類似として, Heckman-Opdam あるいは Beerend-Opdam といった多変数超幾何函数や量子可積分系に由来する多変数直交多項式系の明示公式 (binomial formulas) に現れてくる. 補間 Jack 多項式に関しては Knop-Sahi が高階の差分方程式に関して "考察" している [KS]. 更にもう 1 パラメータ変形した補間 Macdonald 多項式というクラスが導入されており, Okounkov により補間 Macdonald 多項式についての高階差分方程式が与えられている [O1]. しかし Okounkov の一連の公式についての証明 ("Idea of Proof") はいくぶん不明瞭であり, Pieri 公式は述べておらず, また補間 Jack 多項式への退化は与えられていない (Okounkov の結果の素直な退化極限では補間 Jack 多項式の差分方程式は得られない).

Received January 31, 2020. Revised May 31, 2020.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 33C52, 33C67, 43A90
Key Words: Jack 多項式, 補間 Jack 多項式, 差分方程式, Pieri 公式
本研究は科研費 (課題番号: 18J00233) の助成を受けたものである.
*Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kobe University, 1-1, Rokkodai, Nada-ku, Kobe, 657-8501, JAPAN.
e-mail: `g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp`

最近, 著者 [Sh1] は A 型の Macdonald 多項式の有理 (加法) 差分版の 2 (or 1) パラメータ変形とみなせる一連の離散型の多変数直交多項式系 (多変数 Meixner, Charlier, Krawtchouk 多項式) を補間 Jack 多項式を用いて導入し, 母函数, 直交性, 差分方程式 (or 隣接関係式) といった基本的性質を与えた. こうした先行研究を踏まえ, これらの離散多変数直交多項式系の満たす高階の差分方程式系の研究を行っているが, その研究過程で後述する Jack 多項式の twisted Pieri 公式と呼ばれる一連の公式が得られ, その応用として補間 Jack 多項式の差分方程式 (あるいは Pieri 公式) を導出した. 本稿はその一連の結果を, 多変数 Meixner 多項式等の元の文脈とは独立に述べたものである. なお, 本稿は RIMS 共同研究「表現論とその周辺分野の進展」の講究録 [Sh2] と内容が重複する部分があることを予めお断りしておく. 一応こちらは差分方程式がメイン, 「表現論とその周辺分野の進展」の方は Pieri 公式がメインの構成になっている (証明はメインの方のみ述べる) ので適宜ご参照いただきたい.

まず prototype として, 殆ど自明ではあるが, 一変数の結果からはじめよう. 一変数の補間 Jack 多項式 $P_m^{\mathrm{ip}}(z)$ を, 次の 2 条件 $(1)^{\mathrm{ip}}$, $(2)^{\mathrm{ip}}$ を満たす z の m 次多項式として定める.

$$
\begin{aligned}
&(1)^{\mathrm{ip}}\ P_k^{\mathrm{ip}}(m)=0, \quad \text{unless } k<m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\
&(2)^{\mathrm{ip}}\ P_m^{\mathrm{ip}}(z)=z^m+(\text{lower terms}).
\end{aligned}
$$

標題の補間 Jack 多項式の差分方程式, Pieri 公式は次のようなものである.

$$kP_k^{\mathrm{ip}}(z)=zP_k^{\mathrm{ip}}(z)-zP_k^{\mathrm{ip}}(z-1), \tag{1.1}$$

$$zP_k^{\mathrm{ip}}(z)=P_{k+1}^{\mathrm{ip}}(z)+kP_k^{\mathrm{ip}}(z). \tag{1.2}$$

すなわち, 差分方程式 (1.1) は次数 k を固定した変数 z に関する差分の関係式であり, Pieri 公式 (1.2) は変数 z を固定した次数 k に関する隣接関係式である. これらを多変数化するのが, 本稿の目的である. 一変数の場合は, 補間 Jack 多項式が下降ベキ

$$P_m^{\mathrm{ip}}(z)=z(z-1)\cdots(z-m+1)$$

そのものなので, (1.1), (1.2) 共に容易にわかるが, ここでは一見回りくどいが多変数にも通用する方法で証明してみよう.

非負整数 m について

$$P_m(z):=z^m,\quad \Phi_m(z):=\frac{P_m(z)}{P_m(1)}=z^m,\quad \Psi_m(z):=\frac{P_m(z)}{P_m^{\mathrm{ip}}(m)}=\frac{P_m(1)}{P_m^{\mathrm{ip}}(m)}\Phi_m(z)=\frac{z^m}{m!}$$

とおき,

$$\partial_z:=\frac{d}{dz}$$

とする. 必要となるのは以下の 5 種の公式である.

1. **関口作用素** (一変数ではただの Euler 作用素のみ)

$$(z\partial_z)\Phi_m(z) = \Phi_m(z)m, \tag{1.3}$$

$$(z\partial_z)\Psi_m(z) = \Psi_m(z)m. \tag{1.4}$$

2. **Jack 多項式の Pieri 公式**

$$\partial_z\Phi_m(z) = \Phi_{m-1}(z)m, \tag{1.5}$$

$$\partial_z\Psi_m(z) = \Psi_{m-1}(z), \tag{1.6}$$

$$z\Phi_m(z) = \Phi_{m+1}(z), \tag{1.7}$$

$$z\Psi_m(z) = \Psi_{m+1}(z)(m+1). \tag{1.8}$$

3. **二項公式 (binomial formula)**

$$\Phi_x(1+z) = \sum_{0\le k\le x} \binom{x}{k}\Phi_k(z) = \sum_{0\le k\le x} \frac{P_k^{\mathrm{ip}}(x)}{P_k(1)}\Psi_k(z). \tag{1.9}$$

ただし x は非負整数.

以上の 3 つは良く知られているが, これに併せて次が必要となる.

4. **Mysterious summation**

$$(x+1) - x = 1. \tag{1.10}$$

5. **Jack 多項式の twisted Pieri 公式**

$$\left[\frac{(\mathrm{ad}\ \partial_z)^1}{1!} z\partial_z\right]\Phi_k(z) = \Phi_{k-1}(z)k, \tag{1.11}$$

$$\left[\frac{(\mathrm{ad}\ \partial_z)^1}{1!} z\partial_z\right]\Psi_k(z) = \Psi_{k-1}(z). \tag{1.12}$$

ただし, ad は $\mathbb{C}[z,\partial_z]$ における通常の adjoint

$$(\mathrm{ad}\ A)(B) := AB - BA$$

である.

一変数の場合, (1.10), (1.11), (1.12) はほぼ自明だが, これも多変数用の証明しておこう. まず (1.10) は, Pieri 公式 (1.5), (1.7) より

$$[\partial_z, z]\Phi_x(z) = \Phi_x(z)(x+1) - \Phi_x(z)x = ((x+1)-x)\Phi_x(z).$$

他方, 作用素としての交換関係 $[\partial_z, z] = 1$ より

$$[\partial_z, z]\Phi_x(z) = 1\cdot\Phi_x(z)$$

となるので, $\Phi_x(z)$ についての係数比較より結論を得る.
同様に (1.11) については, 関口作用素 (1.3), (1.4) と Pieri 公式 (1.5), (1.6) より

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{(\mathrm{ad}\ \partial_z)^1}{1!}z\partial_z\right]\Phi_k(z) &= \partial_z((z\partial_z)\Phi_k(z)) - (z\partial_z)(\partial_z\Phi_k(z)) \\
&= (\partial_z\Phi_k(z))k - (z\partial_z)\Phi_{k-1}(z))k \\
&= (\Phi_{k-1}(z)k - \Phi_{k-1}(z)(k-1))k \\
&= (k-(k-1))\Phi_k(z)k.
\end{aligned}
$$

ここで mysterious summation (1.10) を使えば結論を得る. (1.12) に関しても同様である.

以上の結果から補間 Jack 多項式 $P_k^{\mathrm{ip}}(z)$ の差分方程式 (1.1)(と Pieri 公式 (1.2)) を導出できる. まず多項式の関係式なので任意の整数 x について示せば十分である. ついで $e^{\pm\partial_z}$ が z の ± 1 シフト作用素であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
(z\partial_z)\Phi_x(1+z) &= (z\partial_z)e^{\partial_z}\Phi_x(z) \\
&= e^{\partial_z}[e^{-\,\mathrm{ad}\ (\partial_z)}(z\partial_z)]\Phi_x(z).
\end{aligned}
$$

よって twisted Pieri 公式 (1.11) と二項公式 (1.9) から

$$
\begin{aligned}
(z\partial_z)\Phi_x(1+z) &= e^{\partial_z}\sum_{p=0}^{1}\left[\frac{(-\,\mathrm{ad}\ (\partial_z))^p}{p!}(z\partial_z)\right]\Phi_x(z) \\
&= e^{\partial_z}(\Phi_x(z)x - \Phi_{x-1}(z)x) \\
&= x\Phi_x(1+z) - x\Phi_{x-1}(1+z) \\
&= \sum_{k=0}^{x}\left(x\frac{P_k^{\mathrm{ip}}(x)}{P_k(1)} - x\frac{P_k^{\mathrm{ip}}(x-1)}{P_k(1)}\right)\Psi_k(z). \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

他方, 先に二項公式 (1.9) で展開してから関口作用素 (1.4) を当てると

$$
(z\partial_z)\Phi_x(1+z) = \sum_{k=0}^{x}\frac{P_k^{\mathrm{ip}}(x)}{P_k(1)}(z\partial_z)\Psi_k(z) = \sum_{k=0}^{x}k\frac{P_k^{\mathrm{ip}}(x)}{P_k(1)}\Psi_k(z). \tag{1.14}
$$

よって (1.13) と (1.14) において $\Psi_k(z)$ の係数を比較すると差分方程式

$$
kP_k^{\mathrm{ip}}(x) = xP_k^{\mathrm{ip}}(x) - xP_k^{\mathrm{ip}}(x-1)
$$

を得る. Pieri 公式 (1.2) についても同様である.

本稿ではこの論法を多変数化し, 一般の r 変数の補間 Jack 多項式についての差分方程式 (と Pieri 公式) を導出する. 主結果の証明は, 上述の論法で用いた必要な公式に関してはその多くの多変数類似が既知であるので, 殆ど一変数と parallel にできる. しかし Pieri 公式を $\Phi_k(z)$ 版と $\Psi_k(z)$ 版の 2 種類用意しなければならない点が幾分面倒であり, 更にそ

れらを用いて twisted Pieri 公式 (1.11) と (1.12) の多変数類似を導出する step が一番の難所となる．正確にいえば, 多変数 Meixner 多項式の高階差分方程式 (Pieri 公式) の研究過程でまず twisted Pieri 公式が得られ, その応用として補間 Jack 多項式の差分方程式と Pieri 公式が得られたというのが研究の経緯である．

§ 2. Preliminaries

ここでは [FK], [Ka], [Ko], [L], [M2], [St], [VK] から必要となる多変数類似について list する．まず r を正の整数, $d \neq 0$ を複素数として,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &:= \{\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r \mid m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 0\}, \\
\delta &:= (r-1, r-2, \ldots, 2, 1, 0) \in \mathcal{P}, \\
e_{r,k}(\mathbf{z}) &:= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r} z_{i_1} \cdots z_{i_k} \quad (k = 1, \ldots, r), \quad e_{r,0}(\mathbf{z}) := 1, \quad |\mathbf{z}| := e_{r,1}(\mathbf{z}), \\
E_k(\mathbf{z}) &:= \sum_{j=1}^r z_j^k \partial_{z_j}, \quad D_k(\mathbf{z}) := \sum_{j=1}^r z_j^k \partial_{z_j}^2 + d \sum_{1 \leq j \neq l \leq r} \frac{z_j^k}{z_j - z_l} \partial_{z_j} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})
\end{aligned}
$$

とする．また分割 μ, λ についての支配的順序 (dominant order) を

$$
\mu \geq \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 \geq \lambda_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \geq \lambda_1 + \lambda_2 \\ \qquad \vdots \\ \mu_1 + \cdots + \mu_{r-1} \geq \lambda_1 + \cdots + \lambda_{r-1} \\ \mu_1 + \cdots + \mu_r = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r \quad (|\mu| = |\lambda|) \end{cases},
$$

$$
\mu > \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \geq \lambda \\ \mu \neq \lambda \end{cases}
$$

で定める．更に分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し, 単項型対称多項式 $m_\lambda^{(r)}(\mathbf{z})$ を

$$
m_\lambda^{(r)}(\mathbf{z}) := \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_r.\lambda} z_1^{\nu_1} \cdots z_r^{\nu_r}
$$

により定義する．ただし,

$$
\mathfrak{S}_r.\lambda := \{\sigma.\lambda := (\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma^{-1}(r)}) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_r\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^{(r)}.
$$

任意の分割 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathcal{P}$ と複素数の r 組 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_r) \in \mathbb{C}^r$ について, **Jack 多項式 (Jack polynomials)** $P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right)$ を以下の 2 条件を満たし一意に決まる $|\mathbf{m}|$ 次斉

次多項式として定義する.

$$(1)\ D_2(\mathbf{z})P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)=P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)\sum_{j=1}^{r}m_j\left(m_j-1-d(r-j)\right),$$

$$(2)\ P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)=m_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})+\sum_{\mathbf{m}>\mathbf{k}}c_{\mathbf{mk}}m_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}).$$

また**補間 Jack 多項式 (interpolation Jack polynomials)** $P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)$ を次の 2 条件で一意に定まる多項式として定義する.

$$(1)^{\mathrm{ip}}\ P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)=0,\quad \text{unless } \mathbf{k}\subset\mathbf{m}\in\mathcal{P}$$

$$(2)^{\mathrm{ip}}\ P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)=P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)+(\text{lower terms}).$$

ここで $\mathbf{k}\subset\mathbf{m}$ は分割 $\mathbf{k}$, $\mathbf{m}$ をそれぞれ Young 図形としてみた時に, $\mathbf{k}$ が $\mathbf{m}$ に含まれることとする. 更に便宜上, 次のようにおく.

$$\begin{aligned}
\Phi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})&:=\frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}\ (\text{normalized Jack polynomials}),\\
\Psi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})&:=\frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)}{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}=\frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}\Phi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}),\\
\binom{\mathbf{z}}{\mathbf{k}}^{(d)}&:=\frac{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{z}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{k}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}\ (\text{generalized (or Jack) binomial coefficients}).
\end{aligned}$$

ただし, $\mathbf{1}:=(1,\dots,1)\in\mathcal{P}$ とした. ここで用いた正規化定数は明示的に書ける. 実際 [M2] (10.20), [Ko] (4.8) より

$$P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)=\prod_{(i,j)\in\mathbf{m}}\frac{j-1+\frac{d}{2}(r-i+1)}{m_i-j+\frac{d}{2}(m'_j-i+1)}=\prod_{1\le i<j\le r}\frac{\left(\frac{d}{2}(j-i+1)\right)_{m_i-m_j}}{\left(\frac{d}{2}(j-i)\right)_{m_i-m_j}}. \tag{2.1}$$

ここで m'_j は分割 $\mathbf{m}$ の転置 $\mathbf{m}'$ の j 成分, $(i,j)\in\mathbf{m}$ は分割 $\mathbf{m}$ をその Young 図形

$$\mathbf{m}=\{s=(i,j)\mid 1\le i\le r,1\le j\le m_i\}$$

と同一視したものであり, 任意の $m\in\mathbb{Z}_{\ge0}$, $x\in\mathbb{C}$ に対し

$$(x)_m:=\begin{cases}x(x+1)\cdots(x+m-1) & (m\ne0)\\ 1 & (m=0)\end{cases}$$

とした. また [Ko] の (7.4), (7.5) より

$$
\begin{aligned}
P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right) &= \prod_{(i,j)\in\mathbf{m}}\left(m_i-j+1+\frac{d}{2}(m'_j-i)\right)\\
&= \prod_{j=1}^{r}\left(\frac{d}{2}(r-j)+1\right)_{m_j}\prod_{1\le i<j\le r}\frac{\left(\frac{d}{2}(j-i-1)+1\right)_{m_i-m_j}}{\left(\frac{d}{2}(j-i)+1\right)_{m_i-m_j}}. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Example 2.1. $r=2$ **の場合** 一般超幾何函数

$$
{}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_{n+1}\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix};x\right) := \sum_{k\ge 0}\frac{(a_1)_k\cdots(a_{n+1})_k}{k!(b_1)_k\cdots(b_n)_k}x^k
$$

を用いると, 任意の分割 $\mathbf{m}=(m_1,m_2)\in\mathcal{P}$ と複素数の対 $\mathbf{z}=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$, $z_1z_2\neq 0$ について,

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right) &= z_1^{m_1}z_2^{m_2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-m_1+m_2,\frac{d}{2}\\ 1-m_1+m_2-\frac{d}{2}\end{matrix};\frac{z_2}{z_1}\right),\\
P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right) &= (-1)^{m_1+m_2}(-z_1)_{m_2}(-z_2)_{m_1}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m_1+m_2,\frac{d}{2},-m_1+1-\frac{d}{2}+z_1\\ 1-m_1+m_2-\frac{d}{2},-m_1+1+z_2\end{matrix};1\right)
\end{aligned}
$$

となる ($z_1z_2=0$ の場合も極限をとることができる). 更に

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right) &= \frac{(d)_{m_1-m_2}}{\left(\frac{d}{2}\right)_{m_1-m_2}},\quad P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right) = \frac{\left(\frac{d}{2}+1\right)_{m_1}m_2!(m_1-m_2)!}{\left(\frac{d}{2}+1\right)_{m_1-m_2}},\\
\Phi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) &= \frac{\left(\frac{d}{2}\right)_{m_1-m_2}}{(d)_{m_1-m_2}}z_1^{m_1}z_2^{m_2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-m_1+m_2,\frac{d}{2}\\ 1-m_1+m_2-\frac{d}{2}\end{matrix};\frac{z_2}{z_1}\right),\\
\Psi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) &= \frac{\left(\frac{d}{2}+1\right)_{m_1-m_2}}{\left(\frac{d}{2}+1\right)_{m_1}(m_1-m_2)!m_2!}z_1^{m_1}z_2^{m_2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-m_1+m_2,\frac{d}{2}\\ 1-m_1+m_2-\frac{d}{2}\end{matrix};\frac{z_2}{z_1}\right).
\end{aligned}
$$

$d=2$ **の場合** 任意の分割 $\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_r)\in\mathcal{P}$ と複素数の r 組 $\mathbf{z}=(z_1,\dots,z_r)\in\mathbb{C}^r$ について,

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbf{m}}(\mathbf{z};1) &= s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) := \frac{\det\left(z_i^{m_j+r-j}\right)_{1\le i,j\le r}}{\Delta(\mathbf{z})},\\
P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z};1) &= \frac{\det\left(P^{\mathrm{ip}}_{m_j+r-j}(z_i+r-i;1)\right)_{1\le i,j\le r}}{\Delta(\mathbf{z})}.
\end{aligned}
$$

ここで $s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})$ はよく知られた Schur 函数, $P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z};1)$ は shifted Schur 多項式である．更に

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbf{m}}(\mathbf{1};1)=s_{\mathbf{m}}(\mathbf{1})&=\prod_{1\le i<j\le r}\frac{(j-i)_{m_i-m_j}}{(j-i+1)_{m_i-m_j}},\\
P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta;1\right)&=\prod_{j=1}^{r}(r-j+1)_{m_j}\prod_{1\le i<j\le r}\frac{(j-i)_{m_i-m_j}}{(j-i+1)_{m_i-m_j}},\\
\Phi^{(2)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})&=\prod_{1\le i<j\le r}\frac{(j-i+1)_{m_i-m_j}}{(j-i)_{m_i-m_j}}s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}),\\
\Psi^{(2)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})&=\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{(r-j+1)_{m_j}}\prod_{1\le i<j\le r}\frac{(j-i+1)_{m_i-m_j}}{(j-i)_{m_i-m_j}}s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}).
\end{aligned}
$$

Remark. ここで導入した Jack 多項式と他の文献に出てくる Jack 多項式との関連についての注意を述べる．まず各 Jack 多項式の記号とその $\mathbf{z}=\mathbf{1}$ での特殊値を list しよう．本稿は基本的に Faraut-Korányi [FK] に従っている．特に

$$
\Psi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})=d_{\mathbf{m}}\frac{1}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}\Phi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})
$$

である．ただし,

$$
\begin{aligned}
n:=&r+\frac{d}{2}r(r-1),\\
(\alpha)_{\mathbf{m}}:=&\prod_{j=1}^{r}\left(\alpha-\frac{d}{2}(j-1)\right)_{m_j},\\
d_{\mathbf{m}}:=&\prod_{1\le i<j\le r}\frac{m_i-m_j+\frac{d}{2}(j-i)}{\frac{d}{2}(j-i)}\frac{\left(\frac{d}{2}(j-i+1)\right)_{m_i-m_j}}{\left(\frac{d}{2}(j-i-1)+1\right)_{m_i-m_j}}\quad\text{([FK], p315)}
\end{aligned}
$$

である．実際, 後述の Jack 多項式 $P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)$ 及び補間 Jack 多項式 $P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{z}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)$ に関する特殊値公式 (2.1) と (2.2) より

$$
d_{\mathbf{m}}\frac{1}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}=\frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}.
$$

Jack 多項式の記号として標準的な Stanley 流儀の $J^{\left(\frac{2}{d}\right)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})$ と Macdonald 流儀の $P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)$ については, $J^{\left(\frac{2}{d}\right)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})$ と $P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)$ の関係が

$$
J^{\left(\frac{2}{d}\right)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})=\left(\frac{2}{d}\right)^{|\mathbf{m}|}\prod_{(i,j)\in\mathbf{m}}\left(m_i-j+\frac{d}{2}(m'_j-i+1)\right)P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)\quad\text{[M2] (10.22)}
$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) &= \frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{m}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}\\ &= \left(\frac{d}{2}\right)^{|\mathbf{m}|}\prod_{(i,j)\in\mathbf{m}}\frac{1}{\left(m_i-j+\frac{d}{2}(m'_j-i+1)\right)}\frac{1}{P_{\mathbf{m}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}J_{\mathbf{m}}^{\left(\frac{2}{d}\right)}(\mathbf{z}).\end{aligned}$$

また Kaneko の流儀 $C_{\mathbf{m}}^{\left(\frac{2}{d}\right)}(\mathbf{z})$ と我々の流儀 $\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z})$ との関係は, [Ka] の (18) と特殊値公式 (2.1) と (2.2) より

$$\begin{aligned}C_{\mathbf{m}}^{\left(\frac{2}{d}\right)}(\mathbf{1}) &= |\mathbf{m}|!\prod_{(i,j)\in\mathbf{m}}\frac{\left(j-1+\frac{d}{2}(r-i+1)\right)}{\left(m_i-j+\frac{d}{2}(m'_j-i+1)\right)\left(m_i-j+1+\frac{d}{2}(m'_j-i)\right)}\\ &= |\mathbf{m}|!\frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{m}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}.\end{aligned}$$

よって

$$\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \frac{1}{|\mathbf{m}|!}C_{\mathbf{m}}^{\left(\frac{2}{d}\right)}(\mathbf{z})$$

となる. これらをまとめて書くと次のようになる.

$$\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = d_{\mathbf{m}}\frac{1}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \frac{1}{P_{\mathbf{m}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right) = \frac{1}{|\mathbf{m}|!}C_{\mathbf{m}}^{\left(\frac{2}{d}\right)}(\mathbf{z}). \tag{2.3}$$

	表記	$\mathbf{z}=\mathbf{1}$ での特殊値
Faraut-Korányi	$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z})$	1
Stanley	$J_{\mathbf{m}}^{\left(\frac{2}{d}\right)}(\mathbf{z})$	$\left(\frac{2}{d}\right)^{\|\mathbf{m}\|}\prod_{(i,j)\in\mathbf{m}}\left(j-1+\frac{d}{2}(r-i+1)\right)$ ([St] Thm. 5.4)
Macdonald	$P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)$	$\prod_{(i,j)\in\mathbf{m}}\frac{j-1+\frac{d}{2}(r-i+1)}{m_i-j+\frac{d}{2}(m'_j-i+1)}$ ([M2] (10.20))
Kaneko	$C_{\mathbf{m}}^{\left(\frac{2}{d}\right)}(\mathbf{z})$	$\|\mathbf{m}\|!\prod_{(i,j)\in\mathbf{m}}\frac{\left(j-1+\frac{d}{2}(r-i+1)\right)}{\left(m_i-j+\frac{d}{2}(m'_j-i+1)\right)\left(m_i-j+1+\frac{d}{2}(m'_j-i)\right)}$ ([Ka] (18))
S	$\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z})$	$\prod_{(i,j)\in\mathbf{m}}\frac{\left(j-1+\frac{d}{2}(r-i+1)\right)}{\left(m_i-j+\frac{d}{2}(m'_j-i+1)\right)\left(m_i-j+1+\frac{d}{2}(m'_j-i)\right)}$

Table 1. Jack 多項式の記法と正規化定数

次に一変数の補間 Jack 多項式の Pieri 公式 (と差分方程式) の導出の際に必要となった

1. 関口作用素
2. **Jack 多項式の Pieri 公式**

3. 二項公式
4. **Mysterious summation**
5. **Jack 多項式の twisted Pieri 公式**

の 5 つの公式の多変数化について順次述べよう.

1. **関口作用素** (Sekiguchi [Se], Debiard [D], Macdonald [M2])

$\Delta(\mathbf{z})$ を差積 $\Delta(\mathbf{z}) := \prod_{1\le i<j\le r}(z_i - z_j)$ とし, 関口作用素 (とその母函数) を

$$H_{k,r}^{(d)}(\mathbf{z}) := \sum_{l=0}^{k}\left(\frac{2}{d}\right)^{k-l}\sum_{\substack{I\subset[r]\\|I|=l}}\frac{1}{\Delta(\mathbf{z})}\left(\prod_{i\in I}z_i\partial_{z_i}\right)\Delta(\mathbf{z})\sum_{\substack{J\subset[r]\setminus I\\|J|=k-l}}\left(\prod_{j\in J}z_j\partial_{z_j}\right),$$

$$S_r^{(d)}(u;\mathbf{z}) := \sum_{l=0}^{r}H_{l,r}^{(d)}(\mathbf{z})u^{r-l}$$

とおくと,

$$S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)I_r^{(d)}(u;\mathbf{m}), \tag{2.4}$$

$$H_{l,r}^{(d)}(\mathbf{z})P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z};\frac{d}{2}\right)e_{r,l}(\mathbf{m}). \tag{2.5}$$

ただし $[r] := \{1,2,\ldots,r\}$ で

$$I_r^{(d)}(u;\mathbf{m}) := \prod_{k=1}^{r}\left(u+r-k+\frac{2}{d}m_k\right) = \left(\frac{2}{d}\right)^r\prod_{k=1}^{r}\left(m_k+\frac{d}{2}(u+r-k)\right).$$

2. **Jack 多項式の Pieri 公式** (Lassalle [L], et al.)

$$E_0(\mathbf{z})\Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{r}\Phi_{\mathbf{x}_i}^{(d)}(\mathbf{z})\left(x_i+\frac{d}{2}(r-i)\right)h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{x}), \tag{2.6}$$

$$E_0(\mathbf{z})\Psi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{1\le i\le r,\\ \mathbf{x}_i\in\mathcal{P}}}\Psi_{\mathbf{x}_i}^{(d)}(\mathbf{z})h_{+,i}^{(d)}(\mathbf{x}_i), \tag{2.7}$$

$$e_{r,1}(\mathbf{z})\Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{r}\Phi_{\mathbf{x}^i}^{(d)}(\mathbf{z})h_{+,i}^{(d)}(\mathbf{x}), \tag{2.8}$$

$$e_{r,1}(\mathbf{z})\Psi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{1\le i\le r,\\ \mathbf{x}^i\in\mathcal{P}}}\Psi_{\mathbf{x}^i}^{(d)}(\mathbf{z})\left(x_i+1+\frac{d}{2}(r-i)\right)h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{x}^i). \tag{2.9}$$

ただし

$$e_{r,1}(\mathbf{z}) := \sum_{j=1}^{r}z_j,\ E_0(\mathbf{z}) := \sum_{j=1}^{r}\partial_{z_j},\ h_{\pm,i}^{(d)}(\mathbf{x}) := \prod_{1\le k\ne i\le r}\frac{x_i-x_k-\frac{d}{2}(i-k)\pm\frac{d}{2}}{x_i-x_k-\frac{d}{2}(i-k)},$$

$$\mathbf{x}_i := \mathbf{x}-\epsilon_i,\quad \mathbf{x}^i := \mathbf{x}+\epsilon_i,\quad \epsilon_i := (0,\ldots,0,\overset{\overset{i}{\vee}}{1},0,\ldots,0)\in\mathbb{Z}^r.$$

ここで $\mathbf{x}_i \notin \mathcal{P}$ (resp. $\mathbf{x}^i \notin \mathcal{P}$) なら $h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{x}) = 0$ (resp. $h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}) = 0$) となることに注意しよう.

3. **二項公式** (Knop-Sahi [KS], Okounkov-Olshanski [OO1], et al.)
任意の分割 $\mathbf{x}$ について,

$$\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}+\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{x}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}^{(d)} \Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{x}} \frac{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)} \Psi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}). \tag{2.10}$$

以上の 3 つの公式はいずれも既知の公式であるので証明は省く.

4. **Mysterious summation**
一変数のときは自明だった mysterious summation $(x+1)-x=1$ は以下のようになる.

Lemma 2.2. 任意の $I \subset [r]$, $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_r) \in \mathbb{C}^r$ について,

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in I}\left(x_i+1+\frac{d}{2}(r-i)\right)h^{(d)}_{-,i,I\setminus i}(\mathbf{x}^i)h^{(d)}_{+,i,I\setminus i}(\mathbf{x})\\ &-\sum_{i\in I}\left(x_i+\frac{d}{2}(r-i)\right)h^{(d)}_{+,i,I\setminus i}(\mathbf{x}_i)h^{(d)}_{-,i,I\setminus i}(\mathbf{x}) = |I|.\end{aligned} \tag{2.11}$$

ただし,

$$h^{(d)}_{\pm,i,I\setminus i}(\mathbf{x}) := \prod_{j\in I\setminus i} \frac{x_i - x_j - \frac{d}{2}(i-j) \pm \frac{d}{2}}{x_i - x_j - \frac{d}{2}(i-j)}.$$

Proof. 証明は一変数と同様にやればよい. すなわち作用素としての交換関係より

$$[E_0(\mathbf{z}), e_{r,1}(\mathbf{z})]\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})r$$

を得る. 他方, Jack 多項式の Pieri 公式を用いて

$$\begin{aligned}&[E_0(\mathbf{z}), e_{r,1}(\mathbf{z})]\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})\\ &= \sum_{i=1}^r E_0(\mathbf{z})\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}^i}(\mathbf{z})h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^r e_{r,1}(\mathbf{z})\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{z})\left(x_j+\frac{d}{2}(r-j)\right)h^{(d)}_{-,j}(\mathbf{x})\\ &= \sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^r \Phi^{(d)}_{\mathbf{x}^i_j}(\mathbf{z})\\ &\cdot\left(\left(x_j+\delta_{j,i}+\frac{d}{2}(r-j)\right)h^{(d)}_{-,j}(\mathbf{x}^i)h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}) - \left(x_j+\frac{d}{2}(r-j)\right)h^{(d)}_{-,j}(\mathbf{x})h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}_j)\right)\\ &= \Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})\\ &\cdot\sum_{i=1}^r\left(\left(x_i+1+\frac{d}{2}(r-i)\right)h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{x}^i)h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}) - \left(x_i+\frac{d}{2}(r-i)\right)h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{x})h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}_i)\right).\end{aligned}$$

これの係数比較より結論を得る. □

5. **Jack 多項式の twisted Pieri 公式**

これが 5 つの公式の多変数類似の中で最も難所であり, 今回の主結果である.

Theorem 2.3. 任意の $p = 1, \ldots, r$ について,

$$\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!} S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\right] \Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{J \subset [r] \\ |J|=p}} \Phi_{\mathbf{k}_J}^{(d)}(\mathbf{z}) I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{k}) h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{k}) \prod_{j \in J} \left(k_j + \frac{d}{2}(r-j)\right), \tag{2.12}$$

$$\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!} S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\right] \Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{J \subset [r], \mathbf{k}_J \in \mathcal{P} \\ |J|=p}} \Psi_{\mathbf{k}_J}^{(d)}(\mathbf{z}) I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{k}) h_{+,J}^{(d)}(\mathbf{k}_J). \tag{2.13}$$

ここで $J^c := [r] \setminus J$, $\mathbf{k}_J = \mathbf{k} - \sum_{j \in J} \epsilon_j$,

$$h_{\pm,J}^{(d)}(\mathbf{k}) := \prod_{j \in J, l \in J^c} \frac{k_j - k_l - \frac{d}{2}(j-l) \pm \frac{d}{2}}{k_j - k_l - \frac{d}{2}(j-l)},$$

$$I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{k}) := \left(\frac{2}{d}\right)^r \prod_{l \in J^c} \left(k_l + \frac{d}{2}(u+r-l)\right).$$

Proof. $\Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z})$ も $\Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z})$ も同様なので $\Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z})$ についてのみ示す. 証明は p についての induction を用いる. $p = 1$ のときは関口作用素そのものなのでよい. p まで成立したとして, $p+1$ のときを考える. 以下, 便宜上 $s_j := k_j + \frac{d}{2}(r-j)$ とおく. まず帰納法の仮定と Pieri 公式より

$$\begin{aligned}
&E_0(\mathbf{z}) \left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!} S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\right] \Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) \\
&= \sum_{\substack{J \subset [r] \\ |J|=p}} E_0(\mathbf{z}) \Phi_{\mathbf{k}_J}^{(d)}(\mathbf{z}) \prod_{j \in J} s_j h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{k}) I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{k}) \\
&= \sum_{\substack{J \subset [r] \\ |J|=p}} \sum_{i=1}^{r} \Phi_{\mathbf{k}_{J \cup \{i\}}}^{(d)}(\mathbf{z}) h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{k}_J) h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{k}) I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{k}) \left(s_i - \delta_{i,J}\right) \prod_{j \in J} s_j
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!} S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\right] E_0(\mathbf{z}) \Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!} S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\right] \Phi_{\mathbf{k}_i}^{(d)}(\mathbf{z}) s_i h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{k}) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{J \subset [r] \\ |J|=p}} \Phi_{\mathbf{k}_{\{i\} \cup J}}^{(d)}(\mathbf{z}) h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{k}_i) I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{k}_i) h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{k}) s_i \prod_{j \in J} \left(s_j - \delta_{i,J}\right)
\end{aligned}$$

となることに注意する. ただし,

$$\delta_{i,J} := \begin{cases} 1 & (i \in J) \\ 0 & (i \notin J) \end{cases}.$$

ここで $i \in J$ のとき,

$$\begin{aligned} & h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{k}_J) h^{(d)}_{-,J}(\mathbf{k}) I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{k})\,(s_i - \delta_{i,J}) \prod_{j\in J} s_j \\ &= \left(\frac{2}{d}\right)^r \prod_{1\le l\neq i\le r} \frac{s_l - \delta_{l,J} - s_i + 1 - \frac{d}{2}}{s_l - \delta_{l,J} - s_i + 1} \prod_{j\in J, p\in J^c} \frac{s_j - s_p - \frac{d}{2}}{s_j - s_p} \prod_{l\in J^c}\left(s_l + \frac{d}{2}u\right)(s_i - 1)\prod_{j\in J} s_j \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} & h^{(d)}_{-,J}(\mathbf{k}_i) I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{k}_i) h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{k}) s_i \prod_{j\in J} (s_j - \delta_{i,J}) \\ &= \left(\frac{2}{d}\right)^r \prod_{j\in J, p\in J^c} \frac{s_j - \delta_{j,i} - s_p - \frac{d}{2}}{s_j - \delta_{j,i} - s_p} \prod_{l\in J^c}\left(s_l + \frac{d}{2}u\right) \prod_{1\le l\neq i\le r} \frac{s_l - s_i - \frac{d}{2}}{s_l - s_i}\,(s_i - 1)\prod_{j\in J} s_j \end{aligned}$$

双方の共通因子として

$$\left(\frac{2}{d}\right)^r (s_i - 1)\prod_{j\in J} s_j \prod_{l\in J^c}\left(s_l + \frac{d}{2}u\right) \prod_{j\neq i\in J, p\in J^c} \frac{s_j - s_i - \frac{d}{2}}{s_j - s_i}\,\frac{s_j - s_p - \frac{d}{2}}{s_j - s_p}$$

を括りだすと残りの因子はそれぞれ

$$\prod_{l\in J^c} \frac{s_l - s_i + 1 - \frac{d}{2}}{s_l - s_i + 1}\,\frac{s_i - s_l - \frac{d}{2}}{s_i - s_l} = h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{k}(J^c)_i) h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{k}(J^c)) \tag{2.14}$$

及び

$$\prod_{l\in J^c} \frac{s_l - s_i - \frac{d}{2}}{s_l - s_i}\,\frac{s_i - 1 - s_l - \frac{d}{2}}{s_i - 1 - s_l} = h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{k}(J^c)) h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{k}(J^c)_i) \tag{2.15}$$

となる. ただし

$$\mathbf{k}(J^c) := (k_{i_1}, \ldots, k_{i_{r-|J|}}), \quad i_1, \ldots, i_{r-|J|} \in J^c.$$

他方, $i \notin J$ のとき,

$$\begin{aligned} & h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{k}_J) h^{(d)}_{-,J}(\mathbf{k}) I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{k})\,(s_i - \delta_{i,J}) \prod_{j\in J} s_j \\ &= \left(\frac{2}{d}\right)^r \prod_{1\le l\neq i\le r} \frac{s_l - \delta_{l,J} - s_i - \frac{d}{2}}{s_l - \delta_{l,J} - s_i} \prod_{j\in J, p\in J^c} \frac{s_j - s_p - \frac{d}{2}}{s_j - s_p} \prod_{l\in J^c}\left(s_l + \frac{d}{2}u\right) \prod_{j\in J\sqcup\{i\}} s_j \end{aligned}$$

かつ

$$
\begin{aligned}
&h^{(d)}_{-,J}(\mathbf{k}_i)I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{k}_i)h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{k})s_i\prod_{j\in J}(s_j-\delta_{i,J})\\
&\quad=\left(\frac{2}{d}\right)^r\prod_{j\in J,p\in J^c}\frac{s_j-s_p+\delta_{p,i}-\frac{d}{2}}{s_j-s_p+\delta_{p,i}}\prod_{l\in J^c}\left(s_l+\frac{d}{2}u\right)\prod_{1\le l\neq i\le r}\frac{s_l-s_i-\frac{d}{2}}{s_l-s_i}\prod_{j\in J\sqcup\{i\}}s_j.
\end{aligned}
$$

先程と同様に各々の共通因子

$$
\left(\frac{2}{d}\right)^r\prod_{j\in J\sqcup\{i\}}s_j\prod_{l\in J^c}\left(s_l+\frac{d}{2}u\right)\prod_{j\neq i\in J,p\in J^c}\frac{s_j-s_i-\frac{d}{2}}{s_j-s_i}\frac{s_j-s_p-\frac{d}{2}}{s_j-s_p}
$$

を括りだすと, 先程と同様の (2.14), (2.15) が残る. 以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^{p+1}}{(p+1)!}S^{(d)}_r(u;\mathbf{z})\right]\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})\\
&\quad=\sum_{\substack{I\subset[r]\\|I|=p+1}}\frac{1}{p+1}\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}_I}(\mathbf{z})I^{(d)}_{I^c}(u;\mathbf{k})h^{(d)}_{-,I}(\mathbf{k})\prod_{j\in I}s_j\\
&\qquad\cdot\sum_{i\in I}\left\{\left(s_i+\frac{d}{2}u\right)h^{(d)}_{-,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k}^i)h^{(d)}_{+,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k})\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\left(s_i-1+\frac{d}{2}u\right)h^{(d)}_{-,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k})h^{(d)}_{+,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k}_i)\right\}.
\end{aligned}
$$

ここで出てきた和

$$
\sum_{i\in I}[s_ih^{(d)}_{-,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k}^i)h^{(d)}_{+,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k})-(s_i-1)\,h^{(d)}_{-,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k})h^{(d)}_{+,\{i\},I\setminus\{i\}}(\mathbf{k}_i)]=p+1.
$$

は mysterious summation (2.11) そのものであり, $p+1$ でも成り立つことがわかる. $\square$

ここで便宜のため以上の公式を一変数の場合と併せて, まとめて list しておく.

$$
\begin{aligned}
\Phi^{(d)}_m(z) := z^m \quad &\Rightarrow \quad \Phi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) := \frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right)},\\
\Psi^{(d)}_m(z) := \frac{z^m}{m!} \quad &\Rightarrow \quad \Psi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) := \frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right)\Phi^{(d)}_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})}{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)} = \frac{P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right)}{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{m}+\frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)},\\
(z\partial_z)\Phi_m(z) = \Phi_m(z)m \quad &\Rightarrow \quad S^{(d)}_r(u;\mathbf{z})\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})I^{(d)}_r(u;\mathbf{m}),\\
(z\partial_z)\Psi_m(z) = \Psi_m(z)m \quad &\Rightarrow \quad S^{(d)}_r(u;\mathbf{z})\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \Psi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})I^{(d)}_r(u;\mathbf{m}),\\
\partial_z\Phi_m(z) = \Phi_{m-1}(z)m, \quad &\Rightarrow \quad E_0(\mathbf{z})\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})\\
&\qquad = \sum_{i=1}^{r}\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{z})\left(x_i + \frac{d}{2}(r-i)\right)h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{x}),\\
\partial_z\Psi_m(z) = \Psi_{m-1}(z) \quad &\Rightarrow \quad E_0(\mathbf{z})\Psi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{1\le i\le r,\\ \mathbf{x}_i\in\mathcal{P}}}\Psi^{(d)}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{z})h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}_i),\\
z\Phi_m(z) = \Phi_{m+1}(z) \quad &\Rightarrow \quad e_{r,1}(\mathbf{z})\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{r}\Phi^{(d)}_{\mathbf{x}^i}(\mathbf{z})h^{(d)}_{+,i}(\mathbf{x}),\\
z\Psi_m(z) = \Psi_{m+1}(z)(m+1) \quad &\Rightarrow \quad e_{r,1}(\mathbf{z})\Psi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})\\
&\qquad = \sum_{\substack{1\le i\le r,\\ \mathbf{x}_i\in\mathcal{P}}}\Psi^{(d)}_{\mathbf{x}^i}(\mathbf{z})\left(x_i + 1 + \frac{d}{2}(r-i)\right)h^{(d)}_{-,i}(\mathbf{x}^i),\\
\Phi_x(1+z) = \sum_{k\ge 0}\frac{P^{\mathrm{ip}}_k(x)}{P_k(1)}\Psi_k(z) \quad &\Rightarrow \quad \Phi^{(d)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}+\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}}\frac{P^{\mathrm{ip}}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right)}\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}),\\
(x+1) - x = 1 \;&\Rightarrow\; \sum_{i\in I}\left(x_i + 1 + \frac{d}{2}(r-i)\right)h^{(d)}_{-,i,I\setminus i}(\mathbf{x}^i)h^{(d)}_{+,i,I\setminus i}(\mathbf{x})\\
&\qquad -\sum_{i\in I}\left(x_i + \frac{d}{2}(r-i)\right)h^{(d)}_{+,i,I\setminus i}(\mathbf{x}_i)h^{(d)}_{-,i,I\setminus i}(\mathbf{x})\\
&\qquad = |I|,\\
\left[\frac{(\mathrm{ad}\ \partial_z)^1}{1!}z\partial_z\right]\Phi_k(z) = \Phi_{k-1}(z)k \;&\Rightarrow\; \left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!}S^{(d)}_r(u;\mathbf{z})\right]\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})\\
&= \sum_{\substack{J\subset[r]\\ |J|=p}}\Phi^{(d)}_{\mathbf{k}_J}(\mathbf{z})I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{k})h^{(d)}_{-,J}(\mathbf{k})\\
&\qquad\cdot\prod_{j\in J}\left(k_j + \frac{d}{2}(r-j)\right),\\
\left[\frac{(\mathrm{ad}\ \partial_z)^1}{1!}z\partial_z\right]\Psi_k(z) = \Psi_{k-1}(z) \;&\Rightarrow\; \left[\frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!}S^{(d)}_r(u;\mathbf{z})\right]\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})\\
&= \sum_{\substack{J\subset[r],\mathbf{k}_J\in\mathcal{P}\\ |J|=p}}\Psi^{(d)}_{\mathbf{k}_J}(\mathbf{z})I^{(d)}_{J^c}(u;\mathbf{k})h^{(d)}_{+,J}(\mathbf{k}_J).
\end{aligned}
$$

§ 3. 主結果

key となる 5 つの公式の多変数類似が得られたので, これらを用いて補間 Jack 多項式の差分方程式を証明する. ここまで準備できれば, 証明は一変数と完全に parallel になる.

Theorem 3.1. 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^r$, $\mathbf{k} \in \mathcal{P}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&I_r^{(d)}(u;\mathbf{k})P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)\\
&=\sum_{J\subset[r]}(-1)^{|J|}P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}_J+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{x})h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{x})\prod_{j\in J}\left(x_j+\frac{d}{2}(r-j)\right). \tag{3.1}
\end{aligned}
$$

ただし $\mathbf{k}_J = \mathbf{k} - \sum_{j\in J}\epsilon_j$.

Proof. 多項式の関係式なので, 任意の $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ について示せば十分である. まず $e^{\pm E_0(\mathbf{z})}$ が $\mathbf{z}$ の $\pm\mathbf{1}$ シフト作用素であることに注意して, twisted Pieri 公式 (2.12) と二項公式 (2.10) を用いると,

$$
\begin{aligned}
&S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{1}+\mathbf{z})\\
&=S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})e^{E_0(\mathbf{z})}\Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z})\\
&=e^{E_0(\mathbf{z})}[e^{-\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z})}S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})]\Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z})\\
&=e^{E_0(\mathbf{z})}\sum_{p=0}^{r}\left[\frac{(-\mathrm{ad}\ (E_0(\mathbf{z})))^p}{p!}S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\right]\Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{z})\\
&=\sum_{p=0}^{r}(-1)^p\sum_{\substack{J\subset[r]\\|J|=p}}e^{E_0(\mathbf{z})}\Phi_{\mathbf{x}_J}^{(d)}(\mathbf{z})I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{x})h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{x})\prod_{j\in J}\left(x_j+\frac{d}{2}(r-j)\right)\\
&=\sum_{J\subset[r]}(-1)^{|J|}\Phi_{\mathbf{x}_J}^{(d)}(\mathbf{1}+\mathbf{z})I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{x})h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{x})\prod_{j\in J}\left(x_j+\frac{d}{2}(r-j)\right)\\
&=\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}}\Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z})\sum_{J\subset[r]}(-1)^{|J|}\frac{P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}_J+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{x})h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{x})\prod_{j\in J}\left(x_j+\frac{d}{2}(r-j)\right).
\end{aligned}
$$

他方, 二項公式 (2.10) で先に展開してから関口作用素 (2.4) を当てると,

$$
\begin{aligned}
S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{1}+\mathbf{z})&=\sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{x}}\frac{P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}S_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z})\\
&=\sum_{\mathbf{k}\subset\mathbf{x}}\frac{P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}\Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z})I_r^{(d)}(u;\mathbf{x})\\
&=\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}}\Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z})I_r^{(d)}(u;\mathbf{x})\frac{P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta;\frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1};\frac{d}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

ここで $\Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z})$ について係数比較をすれば結論を得る. □

Theorem 3.1 は母函数形だったが, これを u^{r-p} について係数比較をすることで, 次の補間 Jack 多項式の差分方程式が得られる.

Corollary 3.2. 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^r$, $\mathbf{k} \in \mathcal{P}$, $p = 1, \dots, r$ に対し,

$$\begin{aligned} & e_{r,p}\left(\mathbf{k} + \frac{d}{2}\delta\right) P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) \\ &= \sum_{\substack{J \subset [r] \\ 0 \le |J| \le p}} (-1)^{|J|} P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}_J + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) e_{r-|J|,p-|J|}\left(\left(\mathbf{x} + \frac{d}{2}\delta\right)_{J^c}\right) h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{x}) \\ & \qquad \cdot \prod_{j \in J}\left(x_j + \frac{d}{2}(r-j)\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

差分作用素を

$$T_{x_j} f(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} - \epsilon_j), \quad T_{\mathbf{x}}^J := \prod_{j \in J} T_{x_j}.$$

として

$$D_r^{(d)\,\mathrm{ip}}(u; \mathbf{x}) := \sum_{J \subset [r]} (-1)^{|J|} I_{J^c}^{(d)}(u; \mathbf{x}) h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{x}) \prod_{j \in J}\left(x_j + \frac{d}{2}(r-j)\right) T_{\mathbf{x}}^J, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} D_{r,p}^{(d)\,\mathrm{ip}}(\mathbf{x}) := & \sum_{\substack{J \subset [r] \\ 0 \le |J| \le p}} (-1)^{|J|} e_{r-|J|,p-|J|}\left(\left(\mathbf{x} + \frac{d}{2}\delta\right)_{J^c}\right) h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{x}) \\ & \cdot \prod_{j \in J}\left(x_j + \frac{d}{2}(r-j)\right) T_{\mathbf{x}}^J \end{aligned} \tag{3.4}$$

とする. これを用いると Theorem 3.1, Corollary 3.2 は次のように書ける.

Theorem 3.3 (Knop-Sahi (1996))**.**

$$S_r^{(d)}(u; \mathbf{z}) \Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{1} + \mathbf{z}) = D_r^{(d)\,\mathrm{ip}}(u; \mathbf{x}) \Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{1} + \mathbf{z}), \tag{3.5}$$

$$H_{r,p}^{(d)}(\mathbf{z}) \Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{1} + \mathbf{z}) = D_{r,p}^{(d)\,\mathrm{ip}}(\mathbf{x}) \Phi_{\mathbf{x}}^{(d)}(\mathbf{1} + \mathbf{z}). \tag{3.6}$$

特に

$$D_r^{(d)\,\mathrm{ip}}(u; \mathbf{x}) P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) I_r^{(d)}(u; \mathbf{k}), \tag{3.7}$$

$$D_{r,p}^{(d)\,\mathrm{ip}}(\mathbf{x}) P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) e_{r,p}\left(\mathbf{k} + \frac{d}{2}\delta\right). \tag{3.8}$$

Corollary 3.4. 任意の $u, v \in \mathbb{C}$ について,

$$[D_r^{(d)\,\mathrm{ip}}(u;\mathbf{x}), D_r^{(d)\,\mathrm{ip}}(v;\mathbf{x})] = 0. \tag{3.9}$$

特に任意の $i, j = 1, \dots, r$ について

$$[D_{r,i}^{(d)\,\mathrm{ip}}(\mathbf{x}), D_{r,j}^{(d)\,\mathrm{ip}}(\mathbf{x})] = 0. \tag{3.10}$$

すなわち補間 Jack 多項式は可換な差分作用素族の同時固有函数である.

元々Theorem 3.3 は Knop-Sahi [KS] で与えられた. Knop-Sahi の証明は補間 Jack 多項式 $P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)$ に差分作用素 $D_r^{(d)\,\mathrm{ip}}(u;\mathbf{x})$ を作用させた $D_r^{(d)\,\mathrm{ip}}(u;\mathbf{x})P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)$ が定数倍 $c_{\mathbf{k}}$ を除いて補間 Jack 多項式の条件 $(1)^{\mathrm{ip}}$ と $(2)^{\mathrm{ip}}$ を満たすことを示し, その定数倍 $c_{\mathbf{k}}$ を決定するというものである. 我々の証明は Theorem 3.3 の別証明にあたる. Knop-Sahi の証明は補間 Jack 多項式の満たす差分作用素の明示形が ad hoc にわかっている必要があるのに対し, 我々の方法ではその必要は無く, 証明と同時に補間 Jack 多項式の満たす差分方程式の明示形も得ることができることに注意しておこう.

また証明は述べないが, 同様にして補間 Jack 多項式の Pieri 公式も得られる (詳しくは RIMS 共同研究「表現論とその周辺分野の進展」の講究録 [Sh2] を参照).

Theorem 3.5. 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^r$ と $\mathbf{k} \in \mathcal{P}$ について

$$I_r^{(d)}(u;\mathbf{z})\frac{P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right)} = \sum_{\substack{J\subset[r],\\ \mathbf{k}^J\in\mathcal{P}}} \frac{P_{\mathbf{k}^J}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{z}+\frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}^J}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right)} I_{J^c}^{(d)}\left(u;\mathbf{k}^J\right) h_{+,J}^{(d)}(\mathbf{k}). \tag{3.11}$$

ただし $J^c := [r]\setminus J$, $\mathbf{k}^J = \mathbf{k} + \sum_{j\in J}\epsilon_j$,

$$h_{\pm,J}^{(d)}(\mathbf{x}) := \prod_{j\in J, k\in J^c} \frac{x_j - x_k - \frac{d}{2}(j-k) \pm \frac{d}{2}}{x_j - x_k - \frac{d}{2}(j-k)},\ I_{J^c}^{(d)}(u;\mathbf{x}) := \left(\frac{2}{d}\right)^r \prod_{k\in J^c}\left(x_k + \frac{d}{2}(u+r-k)\right).$$

Theorem 3.5 は母函数形だったが, これを u^{r-p} について係数比較をすることで, 次の補間 Jack 多項式の Pieri 公式が得られる.

Corollary 3.6. 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^r$, $\mathbf{k} \in \mathcal{P}$ と $p = 1, \dots, r$ に対し,

$$\begin{aligned} & e_{r,p}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta\right)\frac{P_{\mathbf{k}}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right)} \\ &= \sum_{\substack{J\subset[r], \mathbf{k}^J\in\mathcal{P},\\ 0\le|J|\le p}} \frac{P_{\mathbf{k}^J}^{\mathrm{ip}}\left(\mathbf{x}+\frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)}{P_{\mathbf{k}^J}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right)} e_{r-|J|,p-|J|}\left(\left(\mathbf{k}^J + \frac{d}{2}\delta\right)_{J^c}\right) h_{+,J}^{(d)}(\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

ただし $J^c = \{i_1, \dots, i_{r-p}\}$,

$$\left(\mathbf{k}^J + \frac{d}{2}\delta\right)_{J^c} := \left(k_{i_1} + \delta_{i_1,J} + \frac{d}{2}(r-i_1), \dots, k_{i_{r-p}} + \delta_{i_{r-p},J} + \frac{d}{2}(r-i_{r-p})\right) \in \mathbb{C}^{|J^c|}.$$

§ 4. Concluding remarks

最後に補間 Jack 多項式の差分方程式に関連したいくつかの future works を述べる. 今回述べた補間 Jack 多項式の差分方程式は, 基本対称式

$$e_{r,k}(\mathbf{z}) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r} z_{i_1} \cdots z_{i_k},$$

すなわち一列型の Schur 多項式を固有値とする, いわば一列型のものだった. これの変奏として, 基本対称式ではなく完全斉次対称式

$$h_{r,k}(\mathbf{z}) = \sum_{i_1 + \cdots + i_r = k} z_1^{i_1} \cdots z_r^{i_r},$$

すなわち一行型の Schur 多項式を固有値にもつ, いわば一行型の差分方程式が考えられる. これは Jack 多項式の関口作用素 (基本対称式を固有値にもつ固有微分作用素) の代わりに, 完全斉次対称式を固有値にもつ野海作用素及びそれを用いた twisted Pieri 公式が明示的に書ければ, 本稿の議論と全く parallel にして補間 Jack 多項式の一行型の差分方程式が得られると期待できる.

次いで補間 Jack 多項式の q, t 変形にあたる補間 Macdonald 多項式において, 同様の差分方程式及び Pieri 公式) の導出が考えられる. これに関しては最近進展があり, 差分方程式に関しては野海が証明を与え, Pieri 公式に関しては F. Atai [A] が証明無しに明示的に書き下した. Pieri 公式の証明についても, 差分方程式を補間 Macdonald 多項式のある種の双対性 (Okounkov が [O2] (0.3) で言及しているがこれも未証明?) を介して読みかえることで得られると期待されているが, 現段階では完遂できていないようである. また差分方程式の野海の証明は Okounkov [O1] の "Idea of Proof" に近い, 本稿の証明とは別種の証明であり, 我々の証明法の q, t 変形が得られるかどうかは興味深いと思われる.

また本研究の元々の動機は多変数 Meixner 多項式の高階差分方程式であった. これを導出するために, 今回述べた twisted Pieri 公式 (2.12), (2.13) よりも難しい

$$\left[\frac{(\mathrm{ad}\ e_{r,1}(\mathbf{z}))^q}{q!} \frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!} S_r^{(d)}(u;\mathbf{z}) \right] \Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) = ?,$$
$$\left[\frac{(\mathrm{ad}\ e_{r,1}(\mathbf{z}))^q}{q!} \frac{(\mathrm{ad}\ E_0(\mathbf{z}))^p}{p!} S_r^{(d)}(u;\mathbf{z}) \right] \Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) = ?$$

というタイプの twisted Pieri 公式を明示的に書き下す必要がある. これができれば多変数 Meixner 多項式の高階差分方程式 (Pieri 公式) が導出でき, 更に有理型の BC 補間多項式に関する feedback もあると期待される.

References

[A] F. Atai : *Pieri formulas for interpolation Macdonald polynomials*, private note, (2019).

[D] A. Debiard : *Polynômes de Tchébychev et de Jacobi dans un espace euclidien de dimension p*, CR Acad. Sc. Paris **296** (1983), 529–532.

[FK] J. Faraut and A. Korányi : *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, (1994).

[Ka] J. Kaneko : *Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **24** (1993), 1086–1110.

[Ko] T. H. Koornwinder : *Okounkov's BC-type interpolation Macdonald polynomials and their $q = 1$ limit*, Sém. Lothar. Combin, **72** (2014/15), 27pp.

[KS] F. Knop and S. Sahi: *Difference equations and symmetric polynomials defined by their zeros*, Internat. Math. Res. Notices, **10** (1996), 473–486.

[L] M. Lassalle: *Coefficients binomiaux généralisés et polynômes de Macdonald*, J. Funct. Anal., **158** (1998), 289–324.

[M1] I., G., Macdonald: *Schur functions: theme and variations*, Seminaire Lotharingien de Combinatoire **498** (1992), 5-39.

[M2] I., G., Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, (1995).

[N] M. Noumi: *q-Difference equations for Okounkov's interpolation polynomials of type A*, private note, (2019).

[O1] A. Okounkov: *Binomial formula for Macdonald polynomials and applications*, Math. Res. Letters, **4** (1997), 533–553.

[O2] A. Okounkov: *BC-type interpolation Macdonald polynomials and binomial formula for Koornwinder polynomials*, Trans. Groups **3**-2 (1998), 181–207.

[OO1] A. Okounkov and G. Olshanski: *Shifted Jack polynomials, binomial formula, and applications*, Math. Res. Letters, **4** (1997), 69–78.

[OO2] A. Okounkov and G. Olshanski: *Shifted Schur functions*, Algebra i Analiz, **9**-2 (1997), 239–300.

[Sa] S. Sahi: *The spectrum of certain invariant differential operators associated to a Hermitian symmetric space*, Lie theory and geometry, Birkhäuser Boston, (1994) 569–576.

[Se] J. Sekiguchi: *Zonal spherical functions of some symmetric spaces*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **12** (1977) 455–459.

[Sh1] G. Shibukawa: *Multivariate Meixner, Charlier and Krawtchouk polynomials according to analysis on symmetric cones*, J. Lie Theory, **26** (2016) 439–477.

[Sh2] G. Shibukawa: *Pieri type formulas and difference relations for interpolation Jack polynomials*, (Japanese) Developments in Representation Theory and Related Topics (Kyoto, 2019). RIMS Kôkyûroku **2139** (2019) 83–99.

[St] R. Stanley : *Some combinatorial properties of Jack symmetric functions*, Adv. Math., **77**-1 (1989) 76–115.

[VK] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk: *Representation of Lie Groups and Special Functions -Recent Advances-*, Kluwer Academic Publishers, (1995).