RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B87 (2021), 027–037

多重ゼータ値の関係式と母関数
Relations among multiple zeta values and related generating functions

By

Yasuo Ohno*

Abstract

Several known families of relations among the multiple zeta values proved by using the generating functions are introduced to focus on the connection between the generating functions of relations among multiple zeta values and the hypergeometric functions. The infinite product expansion of the sine function and the gamma function representation of the Aomoto-Drinfel'd generating function are appeared in two of such results. It is also pointed out that the restricted sum formula due to Eie-Liaw-Ong in 2009 is able to obtain as a simple rewrite of a formula which had been proved by the author in 1999.

§ 1. Introduction

多重ゼータ値とは、Riemann ゼータ関数のある種の多変数化として定義される関数の特殊値のことであり、Euler の論文にもその起源を見ることのできる多重級数の極限値である。基本群の Galois 表現や、保形形式、結び目の不変量、超幾何関数論や組合せ論など多種多様な分野と関わりをもち、直近の四半世紀は特に盛んに研究されている。本稿では、多重ゼータ値の線形関係式のうち、母関数を用いて証明されているもののいくつかに注目して復習する。これによって、広い意味での超幾何関数と多重ゼータ値との、より深い関わりを究明するための一助となることを目指す。また、近年、制限和公式と称されている関係式が、より以前から存在する関係式の簡単な場合と同一の式であることを示す。

§1 では、多重ゼータ値の定義と反復積分表示、次元予想と直和予想、そして基本的な関係式として双対公式と和公式について述べる。§2 では、多重ゼータ値の関係式と超

Received February 29, 2020. Revised July 31, 2020.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 11M32, 33C05, 33C20
Key Words: *multiple zeta values, multiple zeta-star values, hypergeometric functions.*
Supported in part by JSPS Kakenhi JP16H06336, JP18H01110 and JP19K03437
*Mathematical Institute, Tohoku University, Sendai 980-8578, Japan.
e-mail: ohno.y@tohoku.ac.jp

幾何関数の関わりの萌芽となった 2 つの関係式を紹介する。§3 では、母関数の議論を用いて得られた、双対公式と和公式の統一的一般化である関係式を紹介し、その後に発表された制限和公式がこの関係式の弱版の簡単な場合と同一の式であることを証明する。§4 では、超幾何微分方程式を経てもたらされた関係式について、関連する話題とともに紹介する。§5 ではまとめとして、それまでに見た事柄から見出される視点について述べる。

§ 1.1. 多重ゼータ値と等号付き多重ゼータ値

本節では多重ゼータ値および等号付き多重ゼータ値（多重ゼータスター値）の定義と基礎的事実および予想を復習する。

（多重）インデックス（順序付き添え字集合）$\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n),(k_i\in\mathbb{Z}_{>0})$ において、条件 $k_r>1$ を満たすものを特に、収束インデックス（admissible index）といい、以下 adm. と略記する。インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)$ に対し、$\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k=k_1+k_2+\cdots+k_n$、$\mathrm{dep}(\mathbf{k})=n$、および $\mathrm{ht}(\mathbf{k})=s=\#\{i|k_i>1\}$ を、それぞれ $\mathbf{k}$ の重さ（weight）、深さ（depth）、高さ（height）と呼ぶ。収束インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)$ に対し、多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ および 多重ゼータスター値 $\zeta^\star(\mathbf{k})$ とは、それぞれ次の収束級数により定まる実数値である。

$$\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_n}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}$$

$$\zeta^\star(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{0<m_1\le m_2\le\cdots\le m_n}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}$$

やや紛らわしい場合もあると思われるが慣例で、多重ゼータ値と多重ゼータスター値を総称して多重ゼータ値と呼ぶ場合がある。

様々な分野との繋がりが指摘されていることもあって、多重ゼータ値研究の問題意識も多様であるが、大きな課題のひとつは、多重ゼータ値で張られる $\mathbb{Q}$ 上の代数の構造解明である。

各重さの多重ゼータ値で張られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathcal{Z}_k$ を、

$$\mathcal{Z}_0=\mathbb{Q},\ \mathcal{Z}_1=\{0\},\ \text{および}\ \ \mathcal{Z}_k=\sum_{\mathbf{k}\in\{\mathbf{k}:\mathrm{adm.}|\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k\}}\mathbb{Q}\zeta(\mathbf{k})\quad(k\ge 2)$$

により定義する。多重ゼータ値の積は多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 係数線形和として書けることが知られていることから、多重ゼータ値で張られる $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{Z}$ は、$\mathcal{Z}=\sum_{k=0}^\infty\mathcal{Z}_k$ となる。$\mathcal{Z}$ は、重さを次数とする次数付き環になることが予想（直和予想）されていて、各 $\mathcal{Z}_k$ の次元の上限は、Deligne, Goncharov, Terasoma, Brown, Zagier らの研究により、既に Zagier らが次元を与えると予想（次元予想）していた数列 $\{d_k\}_k$ まで引き下げられている。この $\{d_k\}_k$ は、

$$\frac{1}{1-t^2-t^3}=\sum_{k=0}^\infty d_kt^k$$

で定義される Fibonacci 数列に少し似た数列である。

以下に、重さ k、$\#\{\mathbf{k} : \mathrm{adm.} \mid \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k\}$、$d_k$ を表にまとめる。数列の増大度に大きな差があり、同じ重さの多重ゼータ値の間にはたくさんの $\mathbb{Q}$ 係数線形関係式が存在する。これらを系統的に把握し構造を詳らかにすることが目標のひとつとなっている。

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
#adm.	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
d_k	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21

§ 1.2. Duality and sum formula

任意の自然数 $s, a_1, a_2, \ldots, a_s, b_1, b_2, \ldots, b_s$ に対して、下記の収束インデックス $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}^\dagger$ は、互いに他の dual であるという：

$$\mathbf{k} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{a_1-1}, b_1+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_2-1}, b_2+1, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_s-1}, b_s+1),$$
$$\mathbf{k}^\dagger = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{b_s-1}, a_s+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_{s-1}-1}, a_{s-1}+1, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_1-1}, a_1+1).$$

収束インテックスの dual は一意的に定まるので、以後、収束インデックス $\mathbf{k}$ の dual を $\mathbf{k}^\dagger$ で表す。またここに現れた s は先に定義した高さ $\mathrm{ht}(\mathbf{k}) = s$ である。$(\mathbf{k}^\dagger)^\dagger = \mathbf{k}$ および、$\mathrm{ht}(\mathbf{k}^\dagger) = \mathrm{ht}(\mathbf{k})$ が成り立つ。

よく知られた事実として、収束インデックス $\mathbf{k}$ に対し、

$$\zeta(\mathbf{k}^\dagger) = \zeta(\mathbf{k}) \qquad \text{（双対公式）}$$

が成り立つ。この性質を多重ゼータ値の双対公式（duality）と呼ぶ。例を挙げると、

weight	duality	selfdual MZVs
2		$\zeta(2)$
3	$\zeta(3) = \zeta(1,2)$	
4	$\zeta(4) = \zeta(1,1,2)$	$\zeta(1,3),\ \zeta(2,2)$
5	$\zeta(5) = \zeta(1,1,1,2),\ \zeta(1,4) = \zeta(1,1,3),$ $\zeta(2,3) = \zeta(1,2,2),\ \zeta(3,2) = \zeta(2,1,2)$	

となる。

次に、収束インデックスの集合を下記のように定義する。

$$I_0(k,n,s) := \{\mathbf{k} : \mathrm{adm.} \mid \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k, \mathrm{dep}(\mathbf{k}) = n, \mathrm{ht}(\mathbf{k}) = s\},$$
$$I_0(k,n,*) := \{\mathbf{k} : \mathrm{adm.} \mid \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k, \mathrm{dep}(\mathbf{k}) = n\}.$$

多重ゼータ値の和公式（sum formula）とは以下のものである。整数 k, n が $k > n > 0$ を満たすとき、

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,n,*)} \zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k) \qquad \text{（和公式）}$$

が成立する。

Euler が部分分数の計算で導いた、多重ゼータ値の最初の関係式とも言われる

$$\zeta(1,2)=\zeta(3)$$

は、双対公式において $s=1, a_1=1, b_1=2$ とした場合でもあり、和公式において $k=3, n=2$ とした場合でもある。

§ 2. $\sin(\pi x)$ の無限積展開および Aomoto-Drinfel'd の公式

本節では、$\sin(\pi x)$ の無限積展開と Aomoto-Drinfel'd の公式 ([4, 6]) から多重ゼータ値の基本的な関係式を見る。いずれも超幾何関数と多重ゼータ値の接点のひとつである。

多重ゼータ値の親しみやすい関係式のひとつとして、次のものがある。

$$\zeta(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n})=\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

どことなく $\zeta(2n)$ の Euler の公式に似ているが、右辺に Bernoulli 数は付かない。Euler の公式と同様、この等式は $\sin(\pi x)$ の無限積展開から導くことができる。すなわち、母関数で書くと次のようになっている。

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\zeta(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n})x^{2n}=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

この右辺の Taylor 展開により等式を得るのである。

そしてこの右辺は超幾何関数

$${}_2F_1(a,b,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n \quad \left(\text{ただし、}(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\right)$$

を用いて、${}_2F_1(x,-x,1;1)$ とも書けることが知られ、つまり超幾何関数として解釈することができる。関連する結果としては、$\zeta(1,3,1,3,\ldots,1,3)$ や $\zeta(4,4,\ldots,4)$ の母関数が超幾何関数の積 ${}_2F_1\times{}_2F_1$ で書けることなども知られている。

上述の公式と同様に母関数で表示される初期の結果として、高さ 1 の多重ゼータ値の母関数に対する Aomoto-Drinfel'd の公式 ([4, 6]) が知られている。

$$1-\sum_{m,n=1}^{\infty}\zeta(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1},m+1)X^mY^n=\frac{\Gamma(1-X)\Gamma(1-Y)}{\Gamma(1-X-Y)}$$

この右辺は

$$\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)\frac{X^n+Y^n-(X+Y)^n}{n}\right)$$

とも書けるため、この公式から高さ 1 の任意の多重ゼータ値 $\zeta(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-1},m+1)$ が、Riemann ゼータ値の多項式で書けることが判る。そしてここで、Aomoto-Drinfel'd の公式の母関数もまた、超幾何関数を用いて ${}_2F_1(-X,Y,1-X;1)$ と書くことができる。

これらの公式を包含する一般的な公式については §4 で述べる。

§ 3. 双対公式と和公式の一般化と制限和

本節では、多重ゼータ値の 3 つの基本的な関係式族を包含する関係式族 ([19]) とその弱版について述べた後、弱版と制限和公式の一致について詳しく述べる。

§ 3.1. 双対公式と和公式の一般化

任意の収束インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_n)$ と非負整数 l に対し、次で多重ゼータ値の和 $\mathcal{O}(\mathbf{k};l)$ を定義する。

$$\mathcal{O}(\mathbf{k};l) := \sum_{\substack{c_1+\cdots+c_n=l,\\ c_1,\dots,c_n\in\mathbf{Z}_{\geq 0}}} \zeta(k_1+c_1,k_2+c_2,\dots,k_n+c_n)$$

Theorem 3.1 (O.[19])**.** 任意の収束インデックス $\mathbf{k}$ と非負整数 l に対し次が成立する。

$$\mathcal{O}(\mathbf{k}^\dagger;l)=\mathcal{O}(\mathbf{k};l)$$

Remark.

(a) この定理はそれなりに大きな関係式族を与えているが、予想次元に至るところまでの関係式は与えていない。

(b) この関係式を特殊化することで、既存の 3 つの関係式族が得られる：すなわち、$l=0$ への制限が双対公式であり、$l=1$ への制限に双対公式（$l=0$ への制限）を組み合わせたものが（ここには述べないが）Hoffman の関係式 [14] に一致する。また、$n=1$ への制限が和公式に一致する。

(c) 上述の表記をとる場合、双対公式の一般化の側面が強くなるが、主張の一辺の双対を取る（つまり、$l=0$ の場合の主張を片側の辺に重ねて適用する）ことで、双対公式の一般化という側面を取り去ることが可能である。つまり、$\zeta(\mathbf{k}^\dagger)+\zeta(\mathbf{h}^\dagger)$ を $(\zeta(\mathbf{k})+\zeta(\mathbf{h}))^\dagger$ と書くことを許せば、以下の公式である。

$$\big(\mathcal{O}(\mathbf{k}^\dagger;l)\big)^\dagger=\mathcal{O}(\mathbf{k};l) \tag{3.1}$$

この関係式族は、Theorem 3.1 の弱版（weak version）と呼ばれている。2006 年の Ihara-Kaneko-Zgier[15] の中では、そこで示された導分関係式（derivation relation）が (3.1) と同値であることも併せて示されている。

(d) 最初の証明は、$\mathcal{O}(\mathbf{k};l)$ の母関数を多重ゼータ値の反復積分表示を用いて構成し、Zagier による和公式の証明を参考に変数変換を行い対称性を見るものである。現在までに別証明は多数存在し、例えば、Okuda-Ueno[22] の証明では、多重ポリログ関数の Landen 型接続公式を用いるものと差分関係式を用いるものとが述べられていてとても興味深い。また、先に述べた Ihara-Kaneko-Zagier[15] では、正規化複シャッフル関係式を用いて示される導分関係式を経由して (3.1) を示す証明が与えられている。このほか、積分表示における変数変換を工夫した Ulanskii[28] や、connector を用いた級数変形に基づく Seki-Yamamoto[24]、Arakawa-Kaneko 型ゼータ関数の特殊値の 2 通りの表記を比較した Wayama[29] などの証明が知られている。

(e) 近年の多重ゼータ値研究の豊富な成果、例えば、有限多重ゼータ値・対称多重ゼータ値とそれらのさらなる拡張と q 類似の研究 (cf.[17, 5, 26])、合流型関係式の研究 ([12])、duality の connector による級数型証明の登場 ([24]) などにより、Theorem 3.1 の理解は昨今飛躍的に深まっている。また、上で定義した和 $\mathcal{O}(\mathbf{k};l)$ の満たす新たな関係式族の解明も進んでいる。現在、arXiv も含め複数の文献を見つけることができる (cf.[8, 9, 10, 11, 13, 16, 23, 25][1])。

§ 3.2. 制限和公式に関する注意

ここでは、2009 年の Journal of Number Theory に掲載された、Eie-Liaw-Ong の論文 [7] で主定理（制限和公式）とされている関係式族が、1999 年に同じ Journal of Number Theory に掲載された上述の関係式族（Theorem 3.1）の弱版 (3.1) の、高さ 1 のインデックスの場合そのものであることを丁寧に示す。また、Eie らの同じ論文 [7] には定理がもうひとつ書かれているが、そちらも 1990 年代に知られていた双対公式の単なる足し上げであることを示す。

Eie-Liaw-Ong の制限和公式とは、次のものである。整数 m, p, q が $m \geq q \geq 1$, $p \geq 0$ を満たすとき、

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} \zeta(\{1\}^p, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q + 1) = \sum_{|\boldsymbol{c}|=p+q} \zeta(c_1, \ldots, c_p, c_{p+1} + m - q + 1), \tag{3.2}$$

ただし、$|\boldsymbol{\beta}| = \sum_{j\geq 1} \beta_j$ （右辺はそこに現れる全ての添え字を走る有限和）とする。

ここでは次を示す。ただしこれ以降、$\{1\}^m = \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m}$ とする。

Theorem 3.2. 公式 (3.2) は、公式 (3.1) を高さ 1 の収束インデックスに特殊化した場合と同一の式である。

Proof. 以下において、Theorem 3.1 と 双対公式を用いる箇所を除いて、表記の仕

[1]引用は網羅的とは言えない。

方を変える以外のことは一切しない。

$$\begin{aligned}
(\text{R.H.S. of (3.2)}) &= \sum_{|\boldsymbol{c}|=p+q} \zeta(c_1,\dots,c_p,c_{p+1}+m-q+1)\\
&= \sum_{\substack{e_1+\cdots+e_{p+1}=q-1,\\ e_1,\dots,e_{p+1}\geq 0}} \zeta(1+e_1,\dots,1+e_p,m-q+2+e_{p+1})\\
&= \mathcal{O}((\{1\}^p,m-q+2);q-1)
\end{aligned}$$

つまり、制限和公式の左辺は、高さ 1 の収束インデックス $\mathbf{k}=(\{1\}^p,m-q+2)$ と非負整数 $l=q-1$ に対する $\mathcal{O}(\mathbf{k};l)$ そのものである。ここで、Theorem 3.1 を用いて、この $\mathbf{k}$ を dual である $\mathbf{k}^\dagger=(\{1\}^{m-q},p+2)$ に取り換えると上式は、

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}((\{1\}^{m-q},p+2);q-1)\\
&\quad= \sum_{\substack{e_1+\cdots+e_{m-q+1}=q-1,\\ e_1,\dots,e_{m-q+1}\geq 0}} \zeta(1+e_1,\dots,1+e_{m-q},p+2+e_{m-q+1})\\
&\quad= \sum_{|\boldsymbol{d}|=m} \zeta(d_1,\dots,d_{m-q},d_{m-q+1}+1+p) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

となる。ここで、$(d_1,\dots,d_{m-q},d_{m-q+1}+1)$ は $I_0(m+1,m-q+1,*)$ の全てをわたるので、§1.2 で見たように、(3.3) は次のように表示できる。

$$\sum_{s=1}^{\min\{q,\,\frac{m+1}{2}\}} \sum_{|\boldsymbol{a}|=m-q+1} \sum_{|\boldsymbol{b}|=q} \zeta(\{1\}^{a_1-1},b_1+1,\dots,\{1\}^{a_s-1},b_s+1+p)$$

したがって、$\mathcal{O}((\{1\}^{m-q},p+2);q-1)$ に双対公式を適用すると、

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{O}((\{1\}^{m-q},p+2);q-1))^\dagger\\
&= \sum_{s=1}^{\min\{q,\,\frac{m+1}{2}\}} \sum_{|\boldsymbol{a}|=m-q+1} \sum_{|\boldsymbol{b}|=q} \zeta(\{1\}^{b_s-1+p},a_s+1,\dots,\{1\}^{b_1-1},a_1+1)\\
&= \sum_{s=1}^{\min\{q,\,\frac{m+1}{2}\}} \sum_{|\boldsymbol{a}|=m-q+1} \sum_{|\boldsymbol{b}|=q} \zeta(\{1\}^{p},\{1\}^{b_s-1},a_s+1,\dots,\{1\}^{b_1-1},a_1+1)\\
&= \sum_{|\alpha|=m} \zeta(\{1\}^p,\alpha_1,\dots,\alpha_{q-1},\alpha_q+1)\\
&= (\text{L.H.S. of (3.2)})
\end{aligned}$$

となる。したがって、公式 (3.2) は、

$$(\mathcal{O}((\{1\}^p,m-q+2)^\dagger;q-1))^\dagger = \mathcal{O}((\{1\}^p,m-q+2);q-1)$$

と全く同じ式である。 □

次に同じ論文 [7] の最後に Theorem として述べられているもうひとつの公式について、上述の証明の後半の双対公式を用いた部分の単純なアレンジであって、Theorem は双対公式の足し上げにほかならないことを述べる。

Eie-Liaw-Ong[7] のもうひとつの定理とは、次のものである。整数 m, p, q が $m \geq q \geq 1$, $p \geq 0$ を満たすとき、

(3.4)
$$\sum_{|\boldsymbol{d}|=m} \zeta(\{1\}^{n-1}, d_1, \ldots, d_{m-q}, d_{m-q+1}+p+1) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} \zeta(\{1\}^p, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q+n)$$

が成立する。

これに対し、我々は次を示す。

Proposition 3.3. 公式 (3.4) は、双対公式の辺々で和をとった式である。

Proof. 公式 (3.4) の左辺が、上述の証明の途中に現れた (3.3) のインデックスの冒頭に $\{1\}^{n-1}$ を追加したものであることに注意して、その部分からの証明をなぞると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
(3.4)\text{ の左辺} &= \sum_{|\boldsymbol{d}|=m} \zeta(\{1\}^{n-1}, d_1, \ldots, d_{m-q}, d_{m-q+1}+p+1) \\
&= \sum_{s=1}^{\min\{q,\ \frac{m+1}{2}\}} \sum_{|\boldsymbol{a}|=m-q+1} \sum_{|\boldsymbol{b}|=q} \zeta(\{1\}^{a_1+n-2}, b_1+1, \ldots, \{1\}^{a_s-1}, b_s+1+p) \\
&= \sum_{s=1}^{\min\{q,\ \frac{m+1}{2}\}} \sum_{|\boldsymbol{a}|=m-q+1} \sum_{|\boldsymbol{b}|=q} \zeta(\{1\}^{b_s-1+p}, a_s+1, \ldots, \{1\}^{b_1-1}, a_1+n) \qquad (3.5)\\
&= \sum_{s=1}^{\min\{q,\ \frac{m+1}{2}\}} \sum_{|\boldsymbol{a}|=m-q+1} \sum_{|\boldsymbol{b}|=q} \zeta(\{1\}^{p}, \{1\}^{b_s-1}, a_s+1, \ldots, \{1\}^{b_1-1}, a_1+n) \\
&= \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} \zeta(\{1\}^p, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q+n) \\
&= (3.4)\text{ の右辺}
\end{aligned}$$

上述の (3.5) で双対公式を用いた。それ以外の部分は単なる表記の変更しかしていない。つまり公式 (3.4) は双対公式の和である。 □

§4. 重さ、深さ、高さ、を固定した多重ゼータ値の和

本節では、3 つの基本的なパラメータに注目した多重ゼータ値の和の母関数が、超幾何関数になるという研究 ([21]) とその拡張について復習する。

重さ、深さ、高さ、を固定した多重ゼータ値の和 $G_0(k,n,s)$ とその母関数 $\Phi_0(x,y,z)$ を以下のように定義する。

$$G_0(k,n,s) := \sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,n,s)} \zeta(\mathbf{k}),$$
$$\Phi_0(x,y,z) := \sum_{k,n,s} G_0(k,n,s) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{2s-2}.$$

ここで、$k \geq n+s,\ n \geq s \geq 1$ でない場合、$I_0(k,n,s)$ は空となり、$G_0(k,n,s) = 0$ と扱う。

Theorem 4.1 (O.-Zagier[21]). 母関数 $\Phi_0(x,y,z)$ は次の表示をもつ。

$$\Phi_0(x,y,z) = \frac{1}{xy-z^2}\left(1-\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n}S_n(x,y,z)\right)\right).$$

ただしここで、斉次多項式 $S_n(x,y,z) \in \mathbf{Z}[x,y,z]$ は、2 次方程式 $T^2-(x+y)T+z=0$ の解 $T=\alpha,\beta$ を用いて、

$$S_n(x,y,z) = x^n + y^n - \alpha^n - \beta^n$$

と書かれるものである。

Remark.

(a) 証明は多重ゼータ値を一旦、t を変数とする多重ポリログ

$$\mathrm{Li}_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(t) = \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_n} \frac{t^{m_n}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}$$

に置き換えて、和の母関数を考えることによる。この母関数は超幾何微分方程式を満たすことがわかり、${}_2F_1$ で書かれることから、Gauss の公式を経て定理が得られる。

(b) 上述の公式から $G_0(k,n,s)$ が Riemann ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 係数多項式になることが判る。特に、§2 で述べた $\zeta(\{2\}^n)$ の式や Aomoto-Drinfel'd の公式は、上述の公式の特殊化として得られる。

(c) パラメータをさらに増やす研究、および、多重ゼータスター値で考える研究がなされており、それらの概略は以下のとおりである。表中の “1-height” は上で扱った “高さ” であり、“r-height” は高さをより細かく分類した場合を表している。

	ζ	$\zeta^\star$
1-height.	${}_2F_1$ O.-Zagier[21]	${}_3F_2$ Aoki-Kombu-O.[2], (cf. Aoko-O.[1])
r-height	${}_{r+1}F_r$の和 Li[18]	${}_{r+2}F_{r+1}$の和 Aoki-O.-Wakabayashi[3]

§ 5. Concluding remarks

本稿で見てきたように、これまでに知られている関係式族の中で、比較的強力であってしかも興味深い形のもの（すなわち背後に何らかの数学的な理屈が隠されていると感じさせるもの）には、母関数の議論と噛み合うものが多数含まれており、またその母関数は広い意味での超幾何関数あるいはその特殊化である場合が多いと考えられる。

最近の筆者の研究 [20] では、Arakawa-Kaneko 型の多重ゼータ関数の特殊値に対して和公式を構成すると、その値はインデックスにある簡単な制限を付けた多重ゼータスター値の和と一致することが判っている。そしてこの現象の背後にも ${}_3F_2$ の接続公式が隠れている。

このような状況を考えると、現在よりもさらに深く系統的に、超幾何関数と多重ゼータ値の接点を把握することは、今後の研究発展と理論の掘り下げにおいて必要不可欠なことだと思われる。広い意味での超幾何関数との接点を理解し理論的交流を深めていくことが、おそらく重要な展開をもたらすであろう。

Acknowledgments

講演者として本研究集会にお招きくださった近畿大学の鈴木貴雄さんに感謝いたします。また丁寧な査読レポートで意義深い改稿提案をくださった査読者と、原稿に親切な指摘を寄せてくださった東北大学の関真一朗さんに感謝いたします。

References

[1] Aoki, T. and Ohno, Y., Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.*, **41** (2005), 329–337.

[2] Aoki, T., Kombu, Y. and Ohno, Y., A generating function for sums of multiple zeta values and its applications, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136** (2008), 387–395.

[3] Aoki, T., Ohno, Y. and Wakabayashi, N., On generating functions of multiple zeta values and generalized hypergeometric functions, *Manuscripta Math.*, **134** (2011), 139–155.

[4] Aomoto, K., Special values of hyperlogarithms and linear difference schemes, *Illinois J. of Math.*, **34-2** (1990), 191–216.

[5] Bradley, D. M., Multiple q-zeta values, *J. Algebra*, **283** (2005), 752–798.

[6] Drinfel'd, V. G., On quasitrinagular quasi-Hoph algebras and a group closely connected with $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Leningrad Math. J.*, **2** (1991), 829–860.

[7] Eie, M., Liaw, W.-C. and Ong, Y. L., A restricted sum formula among multiple zeta values *J. Number Th.*, **129** (2009), 908–921.

[8] Hirose, M., Imatomi, K., Murahara, H. and Saito, S., Ohno type relations for classical and finite multiple zeta-star values, *Kyushu J. Math.*, to appear, (arXiv:1806.09299).

[9] Hirose, M., Murahara, H. and Onozuka, T., An interpolation of Ohno's relation to complex functions, *Mathematica Scandinavica*, **126** (2020), 293–297.
[10] Hirose, M., Murahara, H., Onozuka, T. and Sato, N., Linear relations of Ohno sums of multiple zeta values, *Indag. Math.*, **31** (2020), 556-567, (arXiv:1910.07740).
[11] Hirose, M., Murahara, H. and Saito, S., Generating functions for Ohno type sums of finite and symmetric multiple zeta-star values, preprint, (arXiv:1905.04875).
[12] Hirose, M. and Saito, S., Iterated integrals on $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,z,\infty\}$ and a class of relations among multiple zeta values, *Adv. in Math.*, **348** (2019), 163–182.
[13] Hirose, M., Sato, N. and Seki, S., The connector for Double Ohno relation, preprint, (arXiv:2006.09036).
[14] Hoffman, M. E., Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.*, **152** (1992), 275-290.
[15] Ihara, K., Kaneko, M. and Zagier, D., Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compos. Math.*, **142** (2006), 307–338.
[16] Kamano, K. and Onozuka, T., Analytic properties of Ohno function, preprint, (arXiv:2005.143790.
[17] Kaneko, M., An introduction to classical and finite multiple zeta values, *Publications Mathématiques de Besançon*, **2019/1**, 103–129, (2019).
[18] Li, Z.-h., Sum of multiple zeta values of fixed weight, depth and i-height, *Math. Z.*, **258** (2008), 133–142.
[19] Ohno, Y., A Generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory*, **74** (1999), 39–42.
[20] Ohno, Y., Symmetries among sums of multiple zeta-star values, preprint.
[21] Ohno, Y. and Zagier, D., Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *Indag. Math.*, **12** (2001), 483–487.
[22] Okuda, J. and Ueno, K., Relations for multiple zeta values and Mellin transforms of multiple polylogarithms, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.*, **40** (2004), 537–564.
[23] Oyama, K., Ohno-type relation for finite multiple zeta values, *Kyushu J. Math.*, **72** (2018), 277–285.
[24] Seki, S. and Yamamoto, S., A new proof of the duality of multiple zeta values and its generalizations, *Int. J. Number Th.*, **15**, (2019) 1261–1265.
[25] Seki, S. and Yamamoto, S., Ohno-type identities for multiple harmonic sums, *J. Math. Soc. Japan*, *72*, (2020) 673–686.
[26] Takeyama, Y., Derivations on the algebra of multiple harmonic q-series and their applications, *Ramanujan J.*, **52**, (2020) 41–65.
[27] Terasoma, T., Mixed Tate motives and multiple zeta values, *Invent. Math.*, **149** (2002), 339–369.
[28] Ulanskii, E., A new proof of the theorem on Ohno relations for MZVs, *Moscow J. of Combin. and Number Th.*, **7** (2017), 79–88.
[29] Wayama, H., Interpolation of multiple zeta functions of Arakawa-Kaneko type, Master's Thesis, 2018, Tohoku University.