

箱玉系と非自励離散戸田格子 Box-ball system and the nonautonomous discrete Toda lattice

前田一貴
Kazuki MAEDA*

Abstract

We discuss the theory of finite orthogonal polynomials based on elementary linear algebra and its connection to the nonautonomous discrete Toda lattice with nonperiodic finite lattice boundary condition. By using the spectral transformation technique for finite orthogonal polynomials, one can give a solution to the initial value problem of the nonautonomous discrete Toda lattice. However, this construction of the solution cannot be ultradiscretized because of so-called “negative problem”. In this paper, we focus on the rigged configuration technique to solve the initial value problem of the box–ball system and consider a connection between the rigged configuration and orthogonal polynomials.

§1 はじめに

箱玉系 [16] は離散 KdV 方程式の超離散化 [19] によって得られるソリトン・セル・オートマトンである。超離散化法の発見以来、離散 mKdV 方程式から運搬車つき箱玉系が [15]、離散 KP 方程式のある簡約系から番号つき箱玉系が [18]、それぞれ箱玉系の一般化として得られた。さらにこれらの拡張ルールを合わせもつ箱玉系も構成でき、これを可解格子モデルの結晶化とみなす研究 [4] が展開され、箱玉系は古典可積分系と量子可積分系からの極限操作による共通の到達点として理解されるようになった。

もう 1 つの箱玉系と古典可積分系の関係として、超離散戸田格子の非周期有限格子境界条件を課したものが箱玉系の運動方程式を与えることが知られており [12]、これを拡張して超離散ハングリー戸田格子と番号つき箱玉系の間関係も調べられた [17]。一方で、筆者は学

Received February 3, 2020. Revised March 9, 2021.

2020 Mathematics Subject Classification(s): 37K10, 37B15, 42C05

Key Words: Box–ball systems, nonautonomous ultradiscrete Toda lattice, biorthogonal polynomials

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP17H02858.

*620-0886 京都府福知山市字堀 3370 福知山公立大学情報学部

Faculty of Informatics, The University of Fukuchiyama, 3370 Hori, Fukuchiyama, Kyoto 620-0886, Japan.

e-mail: kmaeda@kmaeda.net

生の頃、離散戸田格子と行列固有値計算アルゴリズムの関係に興味をもち、研究を始めた。行列固有値計算アルゴリズムでは対象となる行列の固有値を一斉にずらすことで収束を加速する「原点シフト」とよばれるテクニックが用いられるが [2], 可積分系の観点から見ればちょうどこれは不等間隔差分, もしくはある種の非自励化を考えることに相当している。この非自励離散戸田格子の超離散化が運搬車つき箱玉系の運動方程式を与えるという発見が筆者の最初の論文となった [11]。その後, 離散ハングリー戸田格子を非自励化した系を超離散化することにより番号つき・運搬車つき箱玉系の運動方程式も与えられることが明らかになり [9], さらに最近では既知の番号つき・運搬車つき箱玉系のルールとは異なる一般化箱玉系も自然に現れてくることがわかっている [10]。

これらの研究を進めるうえで大変役に立ったのが, 離散戸田格子と直交多項式の間にある極めて密接な関係であった [13]。直交多項式の理論では Jacobi, Laguerre, Hermite といった古典直交多項式をはじめとする特別な系列を研究対象とすることが多いが, この研究で用いているのは全く一般的な直交多項式の系列である。直交多項式列から新たな直交多項式列を作り出すスペクトル変換とよばれる操作の繰り返しによって離散時間を導入すると, 正の方向と負の方向の時間発展の両立条件として離散戸田格子が現れ, それと同時に解が直交多項式の行列式表示から導かれる。言い換えると, 直交多項式のスペクトル変換は離散戸田格子の Lax 対を与えるという仕組みになっている。

本研究では, 特に有限格子境界条件に対応して, 直交多項式の次数も有限で打ち切れるものが議論の対象となる。実はこの場合, 内積は積分でも無限和でもなく有限和となるうえ, 内積の別の具体的な表示を三項間漸化式の係数行列 (有限サイズ) を用いて簡単に与えることができる。このことを §2.1 で説明し, さらに §2.2 でレビューする既知の直交多項式と非自励離散戸田格子の間にある関係 [9] を利用することで, 初等的な線型代数の議論のみで非周期有限格子境界条件の非自励離散戸田格子の初期値問題が解けることを見てもいい。これは半無限格子の議論の特殊ケースと言ってしまえばそれまでかもしれないが, ちゃんと議論している文献は見つからない。

一方で, この初期値問題の解の構成法では負の項が本質的な役割を果たすため, これをそのまま超離散化するというわけにはいかない。§3.1 で方程式と特殊解の超離散化 [10] を解説したうえで, §3.2 で具体的にどのような問題が生じるのかを説明した。この点について, 本稿の執筆時点では正攻法の解決策を提示することはできなかったが, 代わりに箱玉系の初期値問題に対する rigged configuration を用いた先行研究 [5,7,8,14] に着目し, この結果と直交多項式とを結びつけてみた。なお, 超離散戸田格子の初期値問題については組合せ論の観点からの先行研究 [6] があることにもここで触れておく。

§2 非自励離散戸田格子の初期値問題

§2.1 有限直交多項式の理論

一般的な無限列の直交多項式の理論については Chihara による本 [1] が大変参考になる。本節ではそのある種の特殊ケースである, 有限列の場合の理論を展開する。

有限直交多項式の導入 N を正の整数とする. $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^N$ は次数 $n = 0, 1, \dots, N$ のモノニック多項式の列で次の三項間漸化式

$$(2.1) \quad \phi_{n+1}(z) = (z - u_n)\phi_n(z) - v_{n-1}\phi_{n-1}(z), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

を満たすものとする. ここで, $\phi_{-1}(z) := 0$, $\phi_0(z) := 1$ であって, $\{u_n\}_{n=0}^{N-1}$ と $\{v_n\}_{n=0}^{N-2}$ はある複素数列で, 全ての $n = 0, 1, \dots, N-2$ について $v_n \neq 0$ であるとする. 三項間漸化式 (2.1) は, 三重対角行列 T とベクトル $\phi(z)$, $\phi_N(z)$ を用いて次のように書くことができる:

$$(2.2) \quad T\phi(z) + \phi_N(z) = z\phi(z),$$

$$T := \begin{pmatrix} u_0 & 1 & & & \\ v_0 & u_1 & 1 & & \\ & v_1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & v_{N-2} & u_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \phi(z) := \begin{pmatrix} \phi_0(z) \\ \phi_1(z) \\ \vdots \\ \phi_{N-1}(z) \end{pmatrix}, \quad \phi_N(z) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_N(z) \end{pmatrix}.$$

このように書くことで, $\phi_N(z)$ の根 z_0, z_1, \dots, z_{N-1} は T の固有値である, つまり $\phi_N(z)$ は T の特性多項式であることがわかる. それぞれの固有値に対応する固有ベクトルは $\phi(z_0), \phi(z_1), \dots, \phi(z_{N-1})$ である.

$n = 1, 2, \dots, N$ について, T_n を T の n 次首座小行列とする:

$$T_n := \begin{pmatrix} u_0 & 1 & & & \\ v_0 & u_1 & 1 & & \\ & v_1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & v_{n-2} & u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

これを用いると $\phi_n(z)$ は, I_n を n 次単位行列として

$$\phi_n(z) = \det(zI_n - T_n), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

と書ける (行列式を一番下の行で展開すると三項間漸化式 (2.1) が復元されることを見ればよい). このことから, 前の段落で述べたように, $\phi_N(z) = \det(zI_n - T)$ は T の特性多項式であることがわかる.

このように定義された多項式の有限列 $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^N$ の直交性は, 次のように T を用いて具体的に述べることができる.

定理 1 複素係数の多項式をとる線型汎関数 $\mathcal{L}: \mathbf{C}[z] \rightarrow \mathbf{C}$ を, 任意の多項式 $\pi(z) \in \mathbf{C}[z]$ に対して

$$\mathcal{L}[\pi(z)] := {}^t \mathbf{e}_0 \pi(T) \mathbf{e}_0$$

で定める. ここで, $\delta_{m,n}$ を Kronecker のデルタとして, $\mathbf{e}_i := (\delta_{i,j})_{j=0}^{N-1} \in \mathbf{C}^N$, すなわち i 番目の標準基底ベクトルを表す. つまり, \mathcal{L} は多項式に行列 T を代入した結果の一番左上の成分をとる. このとき, $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^N$ は線型汎関数 \mathcal{L} について有限直交多項式列となる. つまり, ある非零定数列 $\{h_n\}_{n=0}^{N-1}$ が存在して, 直交関係式

$$(2.3) \quad \mathcal{L}[\phi_m(z)\phi_n(z)] = h_n\delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

を満たす. さらに, $\phi_N(z)$ については打ち切り条件

$$(2.4) \quad \mathcal{L}[z^n\phi_N(z)] = 0$$

が任意の非負整数 n に対して成り立つ.

打ち切り条件 (2.4) の成立は実はほぼ明らかである. 実際, Cayley–Hamilton の定理より $\phi_N(T) = O$ なので, $\mathcal{L}[z^n\phi_N(z)] = {}^t\mathbf{e}_0 T^n \phi_N(T) \mathbf{e}_0 = 0$ となる. 直交関係式 (2.3) を示すために, 代わりに次の関係式を考えよう:

$$(2.5) \quad \mathcal{L}[z^m\phi_n(z)] = {}^t\mathbf{e}_0 T^m \phi_n(T) \mathbf{e}_0 = h_n\delta_{m,n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

線型空間として $\text{span}\{\phi_k(z)\}_{k=0}^n = \text{span}\{z^k\}_{k=0}^n$ であって, かつ $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^N$ はモニック多項式であったから, (2.5) は直交関係式 (2.3) と等価であることがわかる. (2.5) を示すには, 三重対角行列 T と T_n それぞれの k 乗の成分に関する次の補題を示せばよい.

補題 2 n を N より小さい正の整数とする. このとき,

- $k = 0, 1, \dots, 2n-1$ と $0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq \min(n-1, 2n-k-i-1)$ を満たす i, j について ${}^t\mathbf{e}_i T^k \mathbf{e}_j = {}^t\mathbf{e}_i T_n^k \mathbf{e}_j$ が成り立つ.
- $k = 2, 3, \dots, 2n$ と $\max(0, n-k+1) \leq i \leq \min(n-1, 2n-k)$ を満たす i について ${}^t\mathbf{e}_i T^k \mathbf{e}_{2n-k-i} \neq {}^t\mathbf{e}_i T_n^k \mathbf{e}_{2n-k-i}$ が成り立つ.

i と j の動く範囲が一見ややこしいが, 要は図 1 の通りの主張である. \min や \max は T_n の成分の下添字がとりうる範囲からはみ出すのを防ぐためにつけている.

補題 2 の成立を認めると, その特殊な場合として次の系がただちに仕上がる.

系 $k = 0, 1, \dots, 2n-1$ について ${}^t\mathbf{e}_0 T^k \mathbf{e}_0 = {}^t\mathbf{e}_0 T_n^k \mathbf{e}_0$, および ${}^t\mathbf{e}_0 T^{2n} \mathbf{e}_0 \neq {}^t\mathbf{e}_0 T_n^{2n} \mathbf{e}_0$ が成り立つ.

このことと Cayley–Hamilton の定理より

$${}^t\mathbf{e}_0 T^m \phi_n(T) \mathbf{e}_0 = {}^t\mathbf{e}_0 T_n^m \phi_n(T_n) \mathbf{e}_0 = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

$${}^t\mathbf{e}_0 T^n \phi_n(T) \mathbf{e}_0 = {}^t\mathbf{e}_0 T_n^n \phi_n(T_n) \mathbf{e}_0 + {}^t\mathbf{e}_0 T^{2n} \mathbf{e}_0 - {}^t\mathbf{e}_0 T_n^{2n} \mathbf{e}_0 = {}^t\mathbf{e}_0 T^{2n} \mathbf{e}_0 - {}^t\mathbf{e}_0 T_n^{2n} \mathbf{e}_0 \neq 0,$$

すなわち式 (2.5) を得る. 定数 h_n は $h_n = {}^t\mathbf{e}_0 T^{2n} \mathbf{e}_0 - {}^t\mathbf{e}_0 T_n^{2n} \mathbf{e}_0$ で与えられることもわかる.

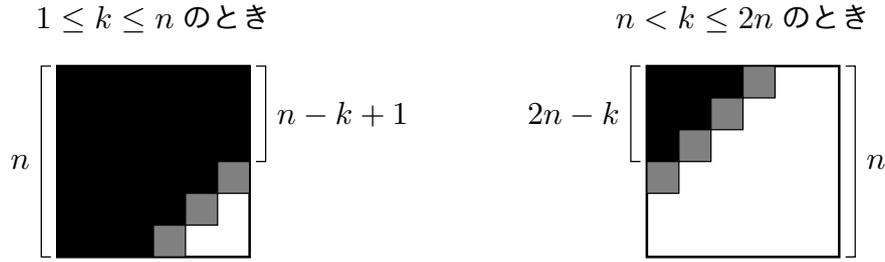


図 1 補題 2 の図解. T_n^k の成分のうち, 黒が T^k の対応する成分と等しい部分, 灰色が T^k の対応する成分と必ず等しくならない部分を表す. 白い部分については何も主張していない.

補題 2 の証明 $k = 0$ および $k = 1$ のときは, 当然全ての成分が等しい. $k = 2$ とすると, T は三重対角行列だから, T_n の一番右下の「1 つ外」にある T の成分が ${}^t e_{n-1} T e_n = 1$ および ${}^t e_n T e_{n-1} = v_{n-1}$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} {}^t e_i T^2 e_j &= {}^t e_i T_n^2 e_j \quad \text{if } 0 \leq i \leq n-1 \text{ and } 0 \leq j \leq \min(n-1, 2n-i-3), \\ {}^t e_{n-1} T^2 e_{n-1} &= {}^t e_{n-1} T_n^2 e_{n-1} + ({}^t e_{n-1} T e_n)({}^t e_n T e_{n-1}) = {}^t e_{n-1} T_n^2 e_{n-1} + v_{n-1}, \end{aligned}$$

がすぐにわかる. $v_{n-1} \neq 0$ であったから, ${}^t e_{n-1} T^2 e_{n-1} \neq {}^t e_{n-1} T_n^2 e_{n-1}$ が成り立っている.

$k \geq 3$ については帰納法を用いる. ある $k \geq 2$ まで成り立っているとして, $T^{k+1} = T T^k$ の計算を上の場合と同様に考えると,

$$\begin{aligned} {}^t e_i T^{k+1} e_j &= {}^t e_i T_n^{k+1} e_j \quad \text{if } 0 \leq i \leq n-1 \text{ and } 0 \leq j \leq \min(n-1, 2n-k-i-2), \\ {}^t e_i T^{k+1} e_{2n-k-i-1} &= {}^t e_i T_n^{k+1} e_{2n-k-i-1} + {}^t e_{i+1} T^k e_{2n-k-i-1} - {}^t e_{i+1} T_n^k e_{2n-k-i-1} \\ &\quad \text{if } \max(0, n-k) \leq i \leq \min(n-2, 2n-k-1). \end{aligned}$$

がわかる. 帰納法の仮定より ${}^t e_{i+1} T^k e_{2n-k-i-1} \neq {}^t e_{i+1} T_n^k e_{2n-k-i-1}$ であり, したがって ${}^t e_i T^{k+1} e_{2n-k-i-1} \neq {}^t e_i T_n^{k+1} e_{2n-k-i-1}$ である. さらに $k \leq n$ の場合には

$${}^t e_{n-1} T^{k+1} e_{n-k} = {}^t e_{n-1} T_n^{k+1} e_{n-k} + {}^t e_n T^k e_{n-k}$$

も考えなければならない. ${}^t e_n T^k e_{n-k} \neq 0$ を示す必要があるが, T は三重対角行列であるから, $|i-j| > k$ ならば ${}^t e_i T^k e_j = 0$ であり, このことを用いると

$$\begin{aligned} {}^t e_n T^k e_{n-k} &= {}^t e_n T^{k-1} I_N T e_{n-k} = {}^t e_n T^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} e_j {}^t e_j \right) T e_{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} ({}^t e_n T^{k-1} e_j) ({}^t e_j T e_{n-k}) = ({}^t e_n T^{k-1} e_{n-k+1}) ({}^t e_{n-k+1} T e_{n-k}) \\ &= \cdots = ({}^t e_n T e_{n-1}) ({}^t e_{n-1} T e_{n-2}) \cdots ({}^t e_{n-k+1} T e_{n-k}) \end{aligned}$$

$$= v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_{n-k} \neq 0$$

と計算できる。したがって、 ${}^t e_{n-1}T^{k+1}e_{n-k} \neq {}^t e_{n-1}T_n^{k+1}e_{n-k}$ も成り立ち、証明が終わる。□

モーメントと重みの具体的な表示 線型汎関数 \mathcal{L} のモーメント列 $\{\mu_m\}_{m=0}^\infty$ を

$$\mu_m := \mathcal{L}[z^m] = {}^t e_0 T^m e_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

で定める。具体的に計算してみると、

$$(2.6) \quad \mu_0 = 1, \quad \mu_1 = u_0, \quad \mu_2 = u_0^2 + v_0, \quad \mu_3 = u_0^3 + 2u_0v_0 + u_1v_0, \quad \dots$$

などとなる。

以下では簡単のため、 T の固有値 z_0, z_1, \dots, z_{N-1} は全て単純であるとする。このとき、行列 T は対角化可能であり、したがって T^m の各成分は $z_0^m, z_1^m, \dots, z_{N-1}^m$ の線型結合で表される。特に

$$\mu_m = {}^t e_0 T^m e_0 = \sum_{j=0}^{N-1} z_j^m w_j, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

を満たす $\{w_j\}_{j=0}^{N-1}$ を \mathcal{L} の重みという。重みを用いると、任意の多項式 $\pi(z)$ に対して

$$(2.7) \quad \mathcal{L}[\pi(z)] = \sum_{j=0}^{N-1} \pi(z_j) w_j$$

で線型汎関数の値が表される。

もしなんらかの方法で T の固有値 $\{z_j\}_{j=0}^{N-1}$ がわかったとすると、重み $\{w_j\}_{j=0}^{N-1}$ はそれらの固有値とモーメント $\{\mu_m\}_{m=0}^{N-1}$ から、連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_0^{N-1} & z_1^{N-1} & \cdots & z_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{N-1} \end{pmatrix}$$

を解くことで求まる。Cramer の公式と Vandermonde 行列式の公式を用いて解を書くと

$$w_k = \frac{\mathcal{L}[(\prod_{0 \leq i < j \leq N-1} (z_j - z_i)) |_{z_k=z}]}{\prod_{0 \leq i < j \leq N-1} (z_j - z_i)} = \frac{\mathcal{L}[\prod_{0 \leq i \leq N-1, i \neq k} (z - z_i)]}{\prod_{0 \leq i \leq N-1, i \neq k} (z_k - z_i)}$$

である。なお、右辺の分子はモーメントを用いると具体的に

$$(2.8) \quad \mu_{N-1} + \sum_{m=0}^{N-2} (-1)^{N-m-1} \left(\sum_{\substack{0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_{N-m-2} \leq N-1 \\ i_0 \neq k, \dots, i_{N-m-2} \neq k}} z_{i_0} z_{i_1} \cdots z_{i_{N-m-2}} \right) \mu_m$$

と書ける。

直交多項式のモーメント行列式表示 $\phi_n(z) = \sum_{i=0}^n c_{n,i} z^i$ と書くと、直交関係式 (2.5) より、

$$\mathcal{L}[z^m \phi_n(z)] = \sum_{i=0}^n c_{n,i} \mu_{m+i} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

である。これを係数 $c_{n,i}$ についての連立一次方程式とみなすと、

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-2} & \mu_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^{n-1} & z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n,0} \\ c_{n,1} \\ \vdots \\ c_{n,n-1} \\ c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_n(z) \end{pmatrix}$$

と書ける。 $\phi_n(z)$ はモニック多項式だったので $c_{n,n} = 1$ であることに注意すると、Cramer の公式で $c_{n,n}$ を求めることで

$$(2.9) \quad \phi_n(z) = \frac{1}{f_n} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-2} & \mu_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}$$

を得る。ここで、 f_n はモーメントの Hankel 行列式

$$f_{-1} := 0, \quad f_0 := 1, \quad f_n := |\mu_{i+j}|_{i,j=0}^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

である。この表示より、

$$(2.10) \quad \mathcal{L}[z^n \phi_n(z)] = h_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

もわかる。

三重対角行列の対角化 本稿では今後用いないが、理論の一端として T の対角化についても考察しておこう。 T の固有値 z_0, z_1, \dots, z_{N-1} に対応する固有ベクトルは、(2.2) よりそれぞれ $\phi(z_0), \phi(z_1), \dots, \phi(z_{N-1})$ なのであった。そこで、これら固有ベクトルを並べた行列

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_0(z_0) & \phi_0(z_1) & \dots & \phi_0(z_{N-1}) \\ \phi_1(z_0) & \phi_1(z_1) & \dots & \phi_1(z_{N-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{N-1}(z_0) & \phi_{N-1}(z_1) & \dots & \phi_{N-1}(z_{N-1}) \end{pmatrix}$$

を考えれば、直交関係式 (2.3) と線型汎関数 \mathcal{L} の具体形 (2.7) より、その逆行列は

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \phi_0(z_0)w_0/h_0 & \phi_1(z_0)w_0/h_1 & \cdots & \phi_{N-1}(z_0)w_0/h_{N-1} \\ \phi_0(z_1)w_1/h_0 & \phi_1(z_1)w_1/h_1 & \cdots & \phi_{N-1}(z_1)w_1/h_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(z_{N-1})w_{N-1}/h_0 & \phi_1(z_{N-1})w_{N-1}/h_1 & \cdots & \phi_{N-1}(z_{N-1})w_{N-1}/h_{N-1} \end{pmatrix}$$

であることが、 $\Phi\Phi^{-1} = (\mathcal{L}[\phi_i(z)\phi_j(z)/h_j])_{i,j=0}^{N-1} = I_N$ から確認できる。これより $\Phi^{-1}\Phi = I_N$ も成り立つので、直交関係式の類似物として

$$\sum_{j=0}^{N-1} \phi_j(z_m)\phi_j(z_n) \frac{1}{h_j} = \frac{\delta_{m,n}}{w_n}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

の成立がわかる。この関係式の特別な場合として、例えば Krawtchouk 多項式は自己双対な有限直交多項式であることが導かれる。

さらに、 $T^m = \Phi \text{diag}(z_0^m, z_1^m, \dots, z_{N-1}^m) \Phi^{-1}$ より、関係式

$${}^t e_i T^m e_j = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_i(z_k) z_k^m \phi_j(z_k) \frac{w_k}{h_j} = \mathcal{L}[\phi_i(z) z^m \phi_j(z)/h_j]$$

を得る。これから特に、

$$\hat{f}_0 := \mu_0 = 1, \quad \hat{f}_1 := \mu_1 = u_0, \quad \hat{f}_n := \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-2} & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_{2n-4} & \mu_{2n-2} \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-3} & \mu_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, \dots,$$

と置くと、 $\phi_n(z)$ の行列式表示 (2.9) と直交関係式 (2.5), および h_n の行列式表示 (2.10) から、

$$u_n = {}^t e_n T e_n = \mathcal{L}[\phi_n(z) z \phi_n(z)/h_n] = \mathcal{L} \left[\left(z^{n+1} - \frac{\hat{f}_n}{f_n} z^n \right) \phi_n(z)/h_n \right] = \frac{\hat{f}_{n+1}}{f_{n+1}} - \frac{\hat{f}_n}{f_n}$$

$$v_n = {}^t e_{n+1} T e_n = \mathcal{L}[\phi_{n+1}(z) z \phi_n(z)/h_n] = \mathcal{L}[z^{n+1} \phi_{n+1}(z)/h_n] = \frac{f_n f_{n+2}}{f_{n+1} f_{n+1}}$$

が導かれる。

§ 2.2 有限直交多項式と非自励離散戸田格子の関係

ここからは、これまで考えてきた有限直交多項式列が 1 つあるときに、そこから次々に新しい有限直交多項式列を作り出す方法について考えていく。

有限直交多項式のスペクトル変換 $\{\phi_n^{(k,t)}\}_{n=0}^N$ を線型汎関数 $\mathcal{L}^{(k,t)}$ に関する有限直交多項式列とするとき,

$$(2.11a) \quad \phi_n^{(k+1,t)}(z) := \frac{\phi_{n+1}^{(k,t)}(z) + q_n^{(k,t)} \phi_n^{(k,t)}(z)}{z}, \quad q_n^{(k,t)} := -\frac{\phi_{n+1}^{(k,t)}(0)}{\phi_n^{(k,t)}(0)},$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\phi_N^{(k+1,t)}(z) := \phi_N^{(k,t)}(z),$$

によって $\{\phi_n^{(k+1,t)}(z)\}_{n=0}^N$ を, $s^{(t)}$ を複素パラメータとして

$$(2.11b) \quad \phi_n^{(k,t+1)}(z) := \frac{\phi_{n+1}^{(k,t)}(z) + \tilde{q}_n^{(k,t)} \phi_n^{(k,t)}(z)}{z - s^{(t)}}, \quad \tilde{q}_n^{(k,t)} := -\frac{\phi_{n+1}^{(k,t)}(s^{(t)})}{\phi_n^{(k,t)}(s^{(t)})},$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\phi_N^{(k,t+1)}(z) := \phi_N^{(k,t)}(z),$$

によって $\{\phi_n^{(k,t+1)}(z)\}_{n=0}^N$ を定める. 定義式の分子はそれぞれ $z, z - s^{(t)}$ で割り切れるので, ちゃんと n 次の多項式が定義されていることに注意する. なお, これらの関係式は Christoffel 変換とよばれている. 対応して線型汎関数 $\mathcal{L}^{(k+1,t)}, \mathcal{L}^{(k,t+1)}$ を

$$\mathcal{L}^{(k+1,t)}[\pi(z)] := \mathcal{L}^{(k,t)}[z\pi(z)], \quad \mathcal{L}^{(k,t+1)}[\pi(z)] := \mathcal{L}^{(k,t)}[(z - s^{(t)})\pi(z)]$$

で定義すると, $\{\phi_n^{(k+1,t)}(z)\}_{n=0}^N, \{\phi_n^{(k,t+1)}(z)\}_{n=0}^N$ はそれぞれ $\mathcal{L}^{(k+1,t)}, \mathcal{L}^{(k,t+1)}$ について有限直交多項式列となることが, 直交関係式 (2.5) の成立を見ることで容易に確認できる. これらに対応してモーメント列を $\{\mu_m^{(k,t)}\}_{m=0}^\infty$, モーメントの Hankel 行列式を $f_n^{(k,t)}, \dots$ などと書くことにすると, モーメントの関係式 $\mu_m^{(k+1,t)} = \mu_{m+1}^{(k,t)}, \mu_m^{(k,t+1)} = \mu_{m+1}^{(k,t)} - s^{(t)} \mu_m^{(k,t)}$ に注意して, 行列式表示 (2.9) から

$$\phi_n^{(k,t)}(0) = (-1)^n \frac{f_n^{(k+1,t)}}{f_n^{(k,t)}}, \quad \phi_n^{(k,t)}(s^{(t)}) = (-1)^n \frac{f_n^{(k,t+1)}}{f_n^{(k,t)}}$$

を得ることができ, $q_n^{(k,t)}, \tilde{q}_n^{(k,t)}$ は

$$q_n^{(k,t)} = \frac{f_n^{(k,t)} f_{n+1}^{(k+1,t)}}{f_{n+1}^{(k,t)} f_n^{(k+1,t)}}, \quad \tilde{q}_n^{(k,t)} = \frac{f_n^{(k,t)} f_{n+1}^{(k,t+1)}}{f_{n+1}^{(k,t)} f_n^{(k,t+1)}},$$

と書けることがわかる.

次に, $\phi_{n+1}^{(k,t)}(z)$ を $\{\phi_j^{(k+1,t)}(z)\}_{j=0}^{n+1}$ の線型結合で

$$\phi_{n+1}^{(k,t)}(z) = \phi_{n+1}^{(k+1,t)}(z) + \sum_{j=0}^n c_{n+1,j}^{(k,t)} \phi_j^{(k+1,t)}(z), \quad n = 0, 1, \dots, N-2,$$

非自励離散戸田格子の初期値問題の解 以上の議論をまとめることで、もし $T^{(0,0)}$ の固有値 z_0, z_1, \dots, z_{N-1} がなんらかの方法でわかれば、非自励離散戸田格子の初期値問題の解を次のようにして構成できることがわかる。

1. $\mu_m^{(0,0)} = \mathcal{L}^{(0,0)}[z^m] = {}^t e_0 (T^{(0,0)})^m e_0 = {}^t e_0 (L^{(0,0)} R^{(0,0)})^m e_0$ を $m = 0, 1, \dots, N-1$ について計算し、これを用いて

$$w_j^{(0,0)} = \frac{\mathcal{L}^{(0,0)}[\prod_{0 \leq i \leq N-1; i \neq j} (z - z_i)]}{\prod_{0 \leq i \leq N-1; i \neq j} (z_j - z_i)}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

を求める。分子の計算については (2.8) も参照。

2. $\mathcal{L}^{(k,t)}[\pi(z)] = \mathcal{L}^{(0,0)}[\pi(z) z^k \prod_{t'=0}^{t-1} (z - s^{(t')})]$ だから、 $w_j^{(0,0)}$ を用いて

$$w_j^{(k,t)} := w_j^{(0,0)} z_j^k \prod_{t'=0}^{t-1} (z_j - s^{(t')})$$

と置けば、 $\mathcal{L}^{(k,t)}[\pi(z)] = \sum_{j=0}^{N-1} \pi(z_j) w_j^{(k,t)}$ である。これより、

$$\mu_m^{(k,t)} := \sum_{j=0}^{N-1} z_j^m w_j^{(k,t)}$$

と置く。

3. $f_n^{(k,t)} := |\mu_{i+j}^{(k,t)}|_{i,j=0}^{n-1}$ として

$$(2.14a) \quad q_n^{(k,t)} = \frac{f_n^{(k,t)} f_{n+1}^{(k+1,t)}}{f_{n+1}^{(k,t)} f_n^{(k+1,t)}}, \quad \tilde{q}_n^{(k,t)} = \frac{f_n^{(k,t)} f_{n+1}^{(k,t+1)}}{f_{n+1}^{(k,t)} f_n^{(k,t+1)}},$$

$$(2.14b) \quad e_n^{(k,t)} = \frac{f_{n+2}^{(k,t)} f_n^{(k+1,t)}}{f_{n+1}^{(k,t)} f_{n+1}^{(k+1,t)}}, \quad \tilde{e}_n^{(k,t)} = \frac{f_{n+2}^{(k,t)} f_n^{(k,t+1)}}{f_{n+1}^{(k,t)} f_{n+1}^{(k,t+1)}},$$

が解である。

注意 1 (2.6) と (2.13) より、 $\mu_m^{(0,0)}$ は具体的に

$$(2.15) \quad \mu_0^{(0,0)} = 1, \quad \mu_1^{(0,0)} = q_0^{(0,0)}, \quad \mu_2^{(0,0)} = (q_0^{(0,0)})^2 + q_0^{(0,0)} e_0^{(0,0)}, \\ \mu_3^{(0,0)} = (q_0^{(0,0)})^3 + 2(q_0^{(0,0)})^2 e_0^{(0,0)} + (q_1^{(0,0)} + e_0^{(0,0)}) q_0^{(0,0)} e_0^{(0,0)}, \quad \dots$$

で計算できる。一般形は Stieltjes–Rogers 多項式というもので書けることが組合せ論の観点から示されている [3, 6].

注意 2 $T^{(0,0)}$ の固有値について、この非自励離散戸田格子の漸化式自体が qd 法や qds 法とよばれる固有値計算法となっており、 $|z_0 - s^{(t)}| > |z_1 - s^{(t)}| > \dots > |z_{N-1} - s^{(t)}|$ の仮定のもとで $\lim_{k \rightarrow \infty} q_n^{(k,t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} q_n^{(k,t)} = z_n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{q}_n^{(k,t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}_n^{(k,t)} = z_n - s^{(t)}$ となるので、これを利用して数値的に求めることができる。

§ 3 非自励超離散戸田格子の初期値問題

§ 3.1 非自励離散戸田格子の超離散化

減算を含まない非自励離散戸田格子の時間発展方程式 運搬車つき箱玉系の時間発展を計算するためには、 $\{q_n^{(k,t)}\}_{n=0}^{N-1}$ と $\{e_n^{(k,t)}\}_{n=0}^{N-2}$ の t 方向への発展が計算できる必要がある。これには、(2.13) より、まず $\{q_n^{(k,t)}\}_{n=0}^{N-1}$ と $\{e_n^{(k,t)}\}_{n=0}^{N-2}$ から、漸化式

$$\tilde{q}_n^{(k+1,t)} = q_n^{(k,t)} - \tilde{e}_n^{(k+1,t)} + e_n^{(k,t)} - s^{(t)}, \quad \tilde{e}_n^{(k+1,t)} = e_n^{(k,t)} \frac{q_{n+1}^{(k,t)}}{\tilde{q}_n^{(k+1,t)}}$$

で $\{\tilde{q}_n^{(k+1,t)}\}_{n=0}^{N-1}$ と $\{\tilde{e}_n^{(k+1,t)}\}_{n=0}^{N-2}$ を求めてから、さらに漸化式

$$q_n^{(k,t+1)} = \tilde{q}_n^{(k+1,t)} - e_n^{(k,t+1)} + \tilde{e}_n^{(k+1,t)} + s^{(t)}, \quad e_n^{(k,t+1)} = \tilde{e}_n^{(k+1,t)} \frac{\tilde{q}_{n+1}^{(k+1,t)}}{q_{n+1}^{(k,t+1)}}$$

で $\{q_n^{(k,t+1)}\}_{n=0}^{N-1}$ と $\{e_n^{(k,t+1)}\}_{n=0}^{N-2}$ を求めることを繰り返せばよい。ところが、これらには負の項が含まれているので、仮に変数の値を全て実数値として $q_n^{(k,t)} > 0$, $e_n^{(k,t)} > 0$, $s^{(t)} \leq 0$ と仮定しても超離散化できない ($q_n^{(k,t)} = 0$ や $e_n^{(k,t)} = 0$ は $v_n^{(k,t)} \neq 0$ に反することに注意)。

そこで、この目的を達成する減算を含まない漸化式を導出することを試みる。まず、Christoffel 変換 (2.11a), (2.11b) と Geronimus 変換 (2.12a), (2.12b) を再掲し、並べてみる：

$$(3.1a) \quad z\phi_n^{(k+1,t)}(z) = \phi_{n+1}^{(k,t)}(z) + q_n^{(k,t)}\phi_n^{(k,t)}(z),$$

$$(3.1b) \quad (z - s^{(t)})\phi_n^{(k,t+1)}(z) = \phi_{n+1}^{(k,t)}(z) + \tilde{q}_n^{(k,t)}\phi_n^{(k,t)}(z),$$

$$(3.1c) \quad \phi_{n+1}^{(k-1,t)}(z) = \phi_{n+1}^{(k,t)}(z) + e_n^{(k-1,t)}\phi_n^{(k,t)}(z),$$

$$(3.1d) \quad \phi_{n+1}^{(k,t-1)}(z) = \phi_{n+1}^{(k,t)}(z) + \tilde{e}_n^{(k,t-1)}\phi_n^{(k,t)}(z).$$

このように並べて見てみると、スペクトル変換とは $\phi_{n+1}^{(k,t)}(z)$ と $\phi_n^{(k,t)}(z)$ の線型結合が別の時刻の多項式と関係づけられるという式になっていることがわかる。これらの三項間の関係式を互いに引き算することで新たな三項間の関係式が得られる。具体的には、(3.1b) から (3.1a) を、(3.1b) から (3.1c) を、それぞれ引くことで、

$$(3.2a) \quad (z - s^{(t)})\phi_n^{(k,t+1)}(z) = z\phi_n^{(k+1,t)}(z) + a_n^{(k,t)}\phi_n^{(k,t)}(z),$$

$$(3.2b) \quad (z - s^{(t)})\phi_n^{(k,t+1)}(z) = \phi_{n+1}^{(k-1,t)}(z) + b_n^{(k-1,t)}\phi_n^{(k,t)}(z)$$

を得る。ただし、

$$(3.3a) \quad \begin{aligned} a_n^{(k,t)} &:= \tilde{q}_n^{(k,t)} - q_n^{(k,t)} \\ &= -s^{(t)} \frac{\phi_n^{(k,t+1)}(0)}{\phi_n^{(k,t)}(0)} = -s^{(t)} \frac{\phi_n^{(k+1,t)}(s^{(t)})}{\phi_n^{(k,t)}(s^{(t)})} = -s^{(t)} \frac{f_n^{(k,t)} f_n^{(k+1,t+1)}}{f_n^{(k,t+1)} f_n^{(k+1,t)}}, \end{aligned}$$

$$(3.3b) \quad b_n^{(k,t)} := \tilde{q}_n^{(k+1,t)} - e_n^{(k,t)} = -\frac{\phi_{n+1}^{(k,t)}(s^{(t)})}{\phi_n^{(k+1,t)}(s^{(t)})} = \frac{f_{n+1}^{(k,t+1)} f_n^{(k+1,t)}}{f_{n+1}^{(k,t)} f_n^{(k+1,t+1)}}.$$

さらに, (3.1a) と (3.1b), (3.1b) と (3.1c), (3.1b) と (3.2a), (3.1b) と (3.2b) から, それぞれ

$$\begin{aligned} z(z-s^{(t)})\phi_n^{(k+1,t+1)}(z) &= \phi_{n+2}^{(k,t)}(z) + (q_n^{(k,t+1)} + \tilde{q}_{n+1}^{(k,t)})\phi_{n+1}^{(k,t)}(z) + q_n^{(k,t+1)}\tilde{q}_n^{(k,t)}\phi_n^{(k,t)} \\ &= \phi_{n+2}^{(k,t)}(z) + (q_{n+1}^{(k,t)} + \tilde{q}_n^{(k+1,t)})\phi_{n+1}^{(k,t)}(z) + q_n^{(k,t)}\tilde{q}_n^{(k+1,t)}\phi_n^{(k,t)}, \\ (z-s^{(t)})\phi_{n+1}^{(k,t+1)}(z) &= \phi_{n+2}^{(k+1,t)}(z) + (\tilde{q}_{n+1}^{(k+1,t)} + e_n^{(k,t+1)})\phi_{n+1}^{(k+1,t)}(z) \\ &\quad + \tilde{q}_n^{(k+1,t)}e_n^{(k,t+1)}\phi_n^{(k+1,t)}(z) \\ &= \phi_{n+2}^{(k+1,t)}(z) + (\tilde{q}_{n+1}^{(k,t)} + e_{n+1}^{(k,t)})\phi_{n+1}^{(k+1,t)}(z) \\ &\quad + \tilde{q}_{n+1}^{(k,t)}e_n^{(k,t)}\phi_n^{(k+1,t)}(z), \\ z\phi_{n+1}^{(k+1,t)}(z) &= (z-s^{(t)})(z-s^{(t+1)})\phi_n^{(k,t+2)}(z) \\ &\quad - (\tilde{q}_n^{(k,t+1)} + a_{n+1}^{(k,t)})(z-s^{(t)})\phi_n^{(k,t+1)} + \tilde{q}_n^{(k,t)}a_{n+1}^{(k,t)}\phi_n^{(k,t)}(z) \\ &= (z-s^{(t)})(z-s^{(t+1)})\phi_n^{(k,t+2)}(z) \\ &\quad - (\tilde{q}_n^{(k+1,t)} + a_n^{(k,t+1)})(z-s^{(t)})\phi_n^{(k,t+1)} + \tilde{q}_n^{(k+1,t)}a_n^{(k,t)}\phi_n^{(k,t)}(z), \\ \phi_{n+2}^{(k,t)}(z) &= (z-s^{(t)})(z-s^{(t+1)})\phi_n^{(k+1,t+2)}(z) \\ &\quad - (\tilde{q}_n^{(k+1,t+1)} + b_{n+1}^{(k,t)})(z-s^{(t)})\phi_n^{(k+1,t+1)}(z) + \tilde{q}_n^{(k+1,t)}b_{n+1}^{(k,t)}\phi_n^{(k+1,t)}(z) \\ &= (z-s^{(t)})(z-s^{(t+1)})\phi_n^{(k+1,t+2)}(z) \\ &\quad - (\tilde{q}_{n+1}^{(k,t)} + b_n^{(k,t+1)})(z-s^{(t)})\phi_n^{(k+1,t+1)}(z) + \tilde{q}_{n+1}^{(k,t)}b_n^{(k,t)}\phi_n^{(k+1,t)}(z) \end{aligned}$$

が出る. 両立条件 (の一部) をとることで, 次の漸化式を得る:

$$(3.4a) \quad \tilde{q}_n^{(k,t)} = q_n^{(k,t)} + a_n^{(k,t)}, \quad \tilde{q}_n^{(k+1,t)} = b_n^{(k,t)} + e_n^{(k,t)},$$

$$(3.4b) \quad q_n^{(k,t+1)} = q_n^{(k,t)} \frac{\tilde{q}_n^{(k+1,t)}}{\tilde{q}_n^{(k,t)}}, \quad e_n^{(k,t+1)} = e_n^{(k,t)} \frac{\tilde{q}_{n+1}^{(k,t)}}{\tilde{q}_n^{(k+1,t)}},$$

$$(3.4c) \quad a_{n+1}^{(k,t)} = a_n^{(k,t)} \frac{\tilde{q}_n^{(k+1,t)}}{\tilde{q}_n^{(k,t)}}, \quad b_{n+1}^{(k,t)} = b_n^{(k,t)} \frac{\tilde{q}_{n+1}^{(k,t)}}{\tilde{q}_n^{(k+1,t)}}.$$

ただし, $a_0^{(k,t)} = -s^{(t)}$, $b_0^{(k,t)} = \frac{\mu_0^{(k,t+1)}}{\mu_0^{(k,t)}} = \frac{\mu_1^{(k,t)} - s^{(t)}\mu_0^{(k,t)}}{\mu_0^{(k,t)}} = q_0^{(k,t)} - s^{(t)}$ である. これを用いることで, $\{q_n^{(k,t)}\}_{n=0}^{N-1}$ と $\{e_n^{(k,t)}\}_{n=0}^{N-2}$ から $\{\tilde{q}_n^{(k,t+1)}\}_{n=0}^{N-1}$ と $\{e_n^{(k,t+1)}\}_{n=0}^{N-2}$ を減算なしで計算することが可能となる. この漸化式 (3.4) の一番上の 2 本の式は $f_n^{(k,t)}$ が満たす双線型方程式

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(k,t+1)} f_n^{(k+1,t)} &= f_n^{(k,t+1)} f_{n+1}^{(k+1,t)} - s^{(t)} f_{n+1}^{(k,t)} f_n^{(k+1,t+1)}, \\ f_{n+1}^{(k,t)} f_{n+1}^{(k+1,t+1)} &= f_{n+1}^{(k,t+1)} f_{n+1}^{(k+1,t)} + f_{n+2}^{(k,t)} f_n^{(k+1,t+1)} \end{aligned}$$

と対応し、その下の4本の式は、Hankel行列式表示を代入すれば明らかな恒等式となっている。

非自励超離散戸田格子と箱玉系 非自励離散戸田格子の超離散類似は、この漸化式(3.4)を超離散化することで得られる。具体的には、 $q_n^{(k,t)} = e^{-Q_n^{(k,t)}/\epsilon}$, $e_n^{(k,t)} = e^{-E_n^{(k,t)}/\epsilon}$, $a_n^{(k,t)} = e^{-A_n^{(k,t)}/\epsilon}$, $b_n^{(k,t)} = e^{-B_n^{(k,t)}/\epsilon}$, $\tilde{q}_n^{(k,t)} = e^{-\tilde{Q}_n^{(k,t)}/\epsilon}$, $s^{(t)} = -e^{-S^{(t)}/\epsilon}$ と変数変換し、 $\epsilon \rightarrow +0$ の極限をとることで

$$(3.5a) \quad \tilde{Q}_n^{(k,t)} = \min(Q_n^{(k,t)}, A_n^{(k,t)}), \quad \tilde{Q}_n^{(k+1,t)} = \min(B_n^{(k,t)}, E_n^{(k,t)}),$$

$$(3.5b) \quad Q_n^{(k,t+1)} = Q_n^{(k,t)} - \tilde{Q}_n^{(k,t)} + \tilde{Q}_n^{(k+1,t)}, \quad E_n^{(k,t+1)} = E_n^{(k,t)} - \tilde{Q}_n^{(k+1,t)} + \tilde{Q}_{n+1}^{(k,t)},$$

$$(3.5c) \quad A_{n+1}^{(k,t)} = A_n^{(k,t)} - \tilde{Q}_n^{(k,t)} + \tilde{Q}_n^{(k+1,t)}, \quad B_{n+1}^{(k,t)} = B_n^{(k,t)} - \tilde{Q}_n^{(k+1,t)} + \tilde{Q}_{n+1}^{(k,t)}$$

となる。ただし、 $A_0^{(k,t)} = S^{(t)}$, $B_0^{(k,t)} = \min(Q_0^{(k,t)}, S^{(t)})$ である。この漸化式は、 $k=0$ と固定したとき、値を次のように読むことで運搬車つき箱玉系の時間発展方程式を与える。

- $Q_n^{(0,t)}$: 時刻 t における n 番目のソリトンの玉の数。
- $E_n^{(0,t)}$: 時刻 t における n 番目の空箱列を構成する空箱の数。
- $A_n^{(0,t)}$: 時刻 t から $t+1$ への時間発展で、運搬車が n 番目のソリトンの前に来た時点での運搬車の空き容量。
- $B_n^{(0,t)}$: 時刻 t から $t+1$ への時間発展で、運搬車が n 番目のソリトンを通じた直後に運搬車に積まれている玉の数。
- $\tilde{Q}_n^{(0,t)}$: 時刻 t から $t+1$ への時間発展で、運搬車が n 番目のソリトンを通する間に運搬車に積んだ玉の数。
- $\tilde{Q}_n^{(1,t)}$: 時刻 t から $t+1$ への時間発展で、運搬車が n 番目の空箱列を通する間に運搬車から下ろした玉の数。
- $S^{(t)}$: 時刻 t から $t+1$ への時間発展での運搬車容量。

図2は運搬車つき箱玉系と非自励超離散戸田格子との対応関係を表す例である。

非自励超離散戸田格子の解 式(2.14), (3.3)で $f_n^{(k,t)} = e^{-F_n^{(k,t)}/\epsilon}$ と変数変換して $\epsilon \rightarrow +0$ とすることにより、

$$(3.6a) \quad Q_n^{(k,t)} = F_n^{(k,t)} - F_{n+1}^{(k,t)} - F_n^{(k+1,t)} + F_{n+1}^{(k+1,t)},$$

$$(3.6b) \quad E_n^{(k,t)} = F_{n+2}^{(k,t)} - F_{n+1}^{(k,t)} - F_{n+1}^{(k+1,t)} + F_n^{(k+1,t)},$$

$$(3.6c) \quad A_n^{(k,t)} = F_n^{(k,t)} - F_n^{(k,t+1)} - F_n^{(k+1,t)} + F_n^{(k+1,t+1)} + S^{(t)},$$

$$(3.6d) \quad B_n^{(k,t)} = F_n^{(k,t+1)} - F_{n+1}^{(k,t)} - F_{n+1}^{(k+1,t+1)} + F_n^{(k+1,t)},$$

	$Q_0^{(0,0)}$	$E_0^{(0,0)}$	$Q_1^{(0,0)}$	$E_1^{(0,0)}$	$Q_2^{(0,0)}$	
t=0:	11111	11111	...11	$Q_0^{(0,t)} E_0^{(0,t)} Q_1^{(0,t)} E_1^{(0,t)} Q_2^{(0,t)}$ 5 5 4 3 2
1:	11111	...111	.111	5 4 3 2 3
2:	11111	...11	.1111	5 3 2 3 4
3:	11111	...111	.111	.1111	4 2 3 4 4
4:	11111	...111	.1111	.1111	3 2 4 4 4
5:	11111	...11	.11111	.1111	2 2 5 4 4
6:	11111	...11	.11111	.1111	2 3 5 4 4
7:	11111	...11	.11111	.1111	2 4 5 4 4

図 2 運搬車つき箱玉系の時間発展例. 左側の‘1’は玉が1個入った箱, ‘.’は空箱を表す. 右側が対応する非自励超離散戸田格子の変数 $Q_n^{(0,t)}$, $E_n^{(0,t)}$ の値. なお, 運搬車容量 $S^{(t)}$ の値は, $t \leq 1$ では $+\infty$, $2 \leq t \leq 3$ では 4, $t \geq 4$ では 3 としている.

$$(3.6e) \quad \tilde{Q}_n^{(k,t)} = F_n^{(k,t)} - F_{n+1}^{(k,t)} - F_n^{(k,t+1)} + F_{n+1}^{(k,t+1)}$$

が非自励超離散戸田格子の解となることがわかる. $F_n^{(k,t)}$ の具体形を得るには次のようにする. Hankel 行列式 $f_n^{(k,t)}$ の成分に $\mu_m^{(k,t)} = \sum_{j=0}^{N-1} z_j^m w_j^{(k,t)}$ を代入し, Binet–Cauchy の定理を適用することで,

$$\begin{aligned}
& f_n^{(k,t)} \\
&= \sum_{0 \leq r_0 < r_1 < \dots < r_{n-1} \leq N-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_{r_0} & z_{r_1} & \dots & z_{r_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{r_0}^{n-1} & z_{r_1}^{n-1} & \dots & z_{r_{n-1}}^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_{r_0}^{(k,t)} & & & \\ & w_{r_1}^{(k,t)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_{r_{n-1}}^{(k,t)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & z_{r_0} & \dots & z_{r_0}^{n-1} \\ 1 & z_{r_1} & \dots & z_{r_1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_{r_{n-1}} & \dots & z_{r_{n-1}}^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{0 \leq r_0 < r_1 < \dots < r_{n-1} \leq N-1} \left(\prod_{i=0}^{n-1} w_{r_i}^{(k,t)} \right) \left(\prod_{0 \leq \nu_0 < \nu_1 \leq n-1} (z_{r_{\nu_0}} - z_{r_{\nu_1}})^2 \right)
\end{aligned}$$

を得る. ただし, 前節で最後に述べたように $w_j^{(k,t)} = w_j^{(0,0)} z_j^k \prod_{t'=0}^{t-1} (z_j - s^{(t')})$ である. したがって, $\{z_j\}_{j=0}^{N-1}$ が全て正の数で相異なれば超離散化可能である. 便宜上 $z_0 > z_1 > \dots > z_{N-1} > 0$ であるとし, $z_j = p_j e^{-Z_j/\epsilon}$, $w_j^{(k,t)} = e^{-W_j^{(k,t)}/\epsilon}$ と変数変換して $\epsilon \rightarrow +0$ の極限をとれば,

$$(3.7a) \quad F_n^{(k,t)} = \min_{0 \leq r_0 < r_1 < \dots < r_{n-1} \leq N-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} W_{r_i}^{(k,t)} + \sum_{0 \leq \nu_0 < \nu_1 \leq n-1} 2 \min(Z_{r_{\nu_0}}, Z_{r_{\nu_1}}) \right)$$

を得る. ただし, $Z_0 \leq Z_1 \leq \dots \leq Z_{N-1}$ であり, $p_j > 0$ は $Z_j = Z_{j+1}$ のとき $p_j > p_{j+1}$ であるものとする. また,

$$(3.7b) \quad W_j^{(k,t)} = W_j^{(0,0)} + k Z_j + \sum_{t'=0}^{t-1} \min(Z_j, S^{(t')})$$

である。

§ 3.2 重みの求め方

超離散化の負の問題 離散の場合と類似の議論により, $S^{(t)} = +\infty$ ならば $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_n^{(k,t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_n^{(k,t)} = Z_n$ がわかるので, Z_n は通常の箱玉系のルールで十分時間が経ってすべてのソリトンが分離したあとの n 番目のソリトンの長さとなることがわかる. したがって, 非自励超離散戸田格子では十分に時間発展させることで固有値 $\{Z_j\}_{j=0}^{N-1}$ を容易に求めることができる. あとは重み $\{W_j^{(0,0)}\}_{j=0}^{N-1}$ の値を, 固有値 $\{Z_j\}_{j=0}^{N-1}$ と変数 $\{Q_n^{(0,0)}\}_{n=0}^{N-1}$, $\{E_n^{(0,0)}\}_{n=0}^{N-2}$ の値からなんらかの方法により求められれば, 非自励超離散戸田格子の初期値問題の解が構成できたことになる.

問題は, この重み $\{W_j^{(0,0)}\}_{j=0}^{N-1}$ を求める方法である. 離散の場合は (2.8) を用いることでモーメントと固有値から計算することができたが, この式は負の項を含んでいるためにうまく超離散化することができない. この問題の難しさは, 次のような簡単な例からもわかる.

$\mu_m^{(k,t)} = e^{-M_m^{(k,t)}/\epsilon}$ と変数変換して $\epsilon \rightarrow +0$ とすることで, モーメントを

$$M_m^{(k,t)} = \min_{j=0,1,\dots,N-1} (mZ_j + W_j^{(k,t)})$$

と超離散化しよう. この具体的な値は ${}^t e_0 (T^{(k,t)})^m e_0$ の超離散化によって得られる ((2.15) を参照). 具体例として, $N = 2$ のとき, 初期値が $Q_0^{(0,0)} = 2, E_0^{(0,0)} = 3, Q_1^{(0,0)} = 2$ の場合を考えよう. 箱玉系の時間発展ルールより, $S^{(t)}$ に依らず $Q_0^{(k,t)} = 2, E_0^{(k,t)} = 3, Q_1^{(k,t)} = 2$ であるので, 固有値が $Z_0 = Z_1 = 2$ であることは明らか. 一方,

$$\begin{aligned} M_0^{(0,0)} &= \min(W_0^{(0,0)}, W_1^{(0,0)}) = 0, \\ M_1^{(0,0)} &= \min(Z_0 + W_0^{(0,0)}, Z_1 + W_1^{(0,0)}) = Q_0^{(0,0)} = 2, \\ M_2^{(0,0)} &= \min(2Z_0 + W_0^{(0,0)}, 2Z_1 + W_1^{(0,0)}) = \min(2Q_0^{(0,0)}, Q_0^{(0,0)} + E_0^{(0,0)}) = 4, \\ M_3^{(0,0)} &= \min(3Z_0 + W_0^{(0,0)}, 3Z_1 + W_1^{(0,0)}) \\ &= \min(3Q_0^{(0,0)}, 2Q_0^{(0,0)} + E_0^{(0,0)}, Q_0^{(0,0)} + Q_1^{(0,0)} + E_0^{(0,0)}, Q_0^{(0,0)} + 2E_0^{(0,0)}) \\ &= 6, \\ &\vdots \end{aligned}$$

であって, 以下 $M_m^{(0,0)} = 2m$ と 2 ずつ増えていくのみである. これらの式は $W_0^{(0,0)} = 0$ とすれば任意の $W_1^{(0,0)} \geq 0$ について成り立つ. しかし, $W_1^{(0,0)}$ は一意に決定されなければならない. 実際,

$$\begin{aligned} E_0^{(0,0)} &= F_2^{(0,0)} - F_1^{(0,0)} - F_1^{(1,0)} = F_2^{(0,0)} - 2 = 3, \\ F_2^{(0,0)} &= W_0^{(0,0)} + W_1^{(0,0)} + 2 \min(Z_0, Z_1) = W_0^{(0,0)} + W_1^{(0,0)} + 4 \end{aligned}$$

であるから, $W_0^{(0,0)} = 0$ ならば $W_1^{(0,0)} = 1$ でなければならない. このように, モーメントの計算において $E_0^{(0,0)}$ を含む値が \min 演算で選ばれず, 情報が落ちてしまうことが困難の原因となっている.

Rigged configuration を用いた解法 ここでは直交多項式と非自励超離散戸田格子の観点から正面突破することは一旦あきらめて, 代わりに先行研究で知られている rigged configuration (10 消去) を用いた解法に目を向けてみよう [7, 8]. これは次の手順によって $\{Z_j\}_{j=0}^{N-1}$ と $\{W_j^{(0,0)}\}_{j=0}^{N-1}$ を計算するものである. 以下では \leftarrow は右の値を左の変数へ代入することを表す.

1. 初期化:

- $n = 0, 1, \dots, N-1$ について, $Q_n \leftarrow Q_n^{(0,0)}$
- $n = 0, 1, \dots, N-2$ について, $E_n \leftarrow E_n^{(0,0)}$
- $n = 0, 1, \dots, N-1$ について, $Z_n \leftarrow 0$

さらに, $X_0 \leftarrow 0, M \leftarrow N, s \leftarrow 0$ とする.

2. $Q_0, Q_1, \dots, Q_{M-1}, E_0, E_1, \dots, E_{M-2}$ を全てデクリメントし, $Z_s, Z_{s+1}, \dots, Z_{N-1}$ を全てインクリメントする.

3. $n = 0, 1, \dots, M-1$ について, もし $Q_n = 0$ ならば, 次を行う: $W_s^{(0,0)} \leftarrow X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} Q_j + \sum_{j=-1}^{n-1} E_j$ としてから, $j = n, n+1, \dots, M-2$ について $Q_j \leftarrow Q_{j+1}$ とする. さらに,

- $n = 0$ ならば, $X_0 \leftarrow X_0 + E_0$ としてから, $j = 0, 1, \dots, M-3$ について $E_j \leftarrow E_{j+1}$ とする.
- $n \neq 0$ かつ $n \neq M-1$ ならば, $E_{n-1} \leftarrow E_{n-1} + E_n$ としてから, $j = n, n+1, \dots, M-3$ について $E_j \leftarrow E_{j+1}$ とする.

最後に, M をデクリメント, s をインクリメントする.

4. $n = 0, 1, \dots, M-2$ について, もし $E_n = 0$ ならば, 次を行う: $W_s^{(0,0)} \leftarrow X_0 + \sum_{j=0}^n Q_j + \sum_{j=-1}^{n-1} E_j, Q_n \leftarrow Q_n + Q_{n+1}$ としてから, $j = n+1, n+2, \dots, M-2$ について $Q_j \leftarrow Q_{j+1}$ とする. さらに, $j = n, n+1, \dots, M-3$ について $E_j \leftarrow E_{j+1}$ とする. 最後に M をデクリメント, s をインクリメントする.

5. $M = 0$ ならば終了. そうでなければ 2 に戻る.

要はステップ 2 が 10 消去, ステップ 3 と 4 が消えたソリトンの位置を記録 (rigging) してから対応する変数を除去することに相当している. X_0 は 0 番目のソリトンの基準となる始点からの位置, M は残っているソリトンの数, s はそれまでに求まった $W_j^{(0,0)}$ の数を表している.

例として, 先の $Q_0^{(0,0)} = 2, E_0^{(0,0)} = 3, Q_1^{(0,0)} = 2$ の場合でやってみよう.

1. まず $X_0 = 0, Q_0 = 2, E_0 = 3, Q_1 = 2$ である.
2. ステップ 2 を 2 回実行すると, $Q_0 = 0, E_0 = 1, Q_1 = 0, Z_0 = 2, Z_1 = 2$ となる. ステップ 3 で, $Q_0 = 0$ となっているから $W_0^{(0,0)} = X_0 = 0, Q_1 = 0$ となっているから $W_1^{(0,0)} = X_0 + Q_0 + E_0 = 1$ となる.
3. これでもう $M = 0$ と全てのソリトンが消えているので終了.

こうして, $W_0^{(0,0)} = 0, W_1^{(0,0)} = 1$ を得る. これは確かに先ほどの議論の結果得られた答えと一致している.

この他の場合についても, 例えば図 2 にある $Q_0^{(0,0)} = 5, E_0^{(0,0)} = 5, Q_1^{(0,0)} = 4, E_1^{(0,0)} = 3, Q_2^{(0,0)} = 2$ の場合, 上記の方法により $Z_0 = 2, Z_1 = 4, Z_2 = 5$ および $W_0^{(0,0)} = 9, W_1^{(0,0)} = 2, W_2^{(0,0)} = 0$ が求まる.

直交多項式と **rigged configuration** の関係 この結果を見直してみると, 直交多項式と rigged configuration では

三重対角行列の固有値 \longleftrightarrow Young 図形

線型汎関数の重み \longleftrightarrow rigging

という対応関係があることがわかる. この関係は, 直交多項式の超離散類似を考えるうえでなんらかの示唆を与えているものと考えられるが, 残念ながら現状の筆者にはこれ以上のことはわかっていない.

References

- [1] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Mathematics and its Applications, **13**, Gordon and Breach Science Publishers, New York–London–Paris, 1978.
- [2] K. V. Fernando and B. N. Parlett, *Accurate singular values and differential qd algorithms*, Numer. Math. **67** (1994), 191–229.
- [3] P. Flajolet, *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Math. **32** (1980), 125–161.
- [4] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro, *The $A_M^{(1)}$ automata related to crystals of symmetric tensors*, J. Math. Phys. **42** (2001), 274–308.
- [5] S. Kakei, J. J. C. Nimmo, S. Tsujimoto and R. Willox, *Linearization of the box–ball system: an elementary approach*, J. Integrable Syst. **3** (2018), xyy002.
- [6] S. Kamioka and T. Takagaki, *Combinatorial expressions of the solutions to initial value problems of the discrete and ultradiscrete Toda molecules*, J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013), 355203.
- [7] A. N. Kirillov and R. Sakatamo, *Relationships between two approaches: rigged configuration and 10-eliminations*, Lett. Math. Phys. **89** (2009), 51–65.
- [8] J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro, *The box–ball system and the N-soliton solution of the ultradiscrete KdV equation*, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008), 175207.

- [9] K. Maeda, *Nonautonomous ultradiscrete hungry Toda lattice and a generalized box-ball system*, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017), 365204.
- [10] K. Maeda, *Another generalization of the box-ball system with many kinds of balls*, J. Integrable Syst. **3** (2018), xyy007.
- [11] K. Maeda and S. Tsujimoto, *Box-ball systems related to the nonautonomous ultradiscrete Toda equation on the finite lattice*, JSIAM Lett. **2** (2010), 95–98.
- [12] A. Nagai, D. Takahashi and T. Tokihiro, *Soliton cellular automaton, Toda molecule equation and sorting algorithm*, Phys. Lett. A **255** (1999), 265–271.
- [13] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Discrete Darboux transformations, the discrete-time Toda lattice, and the Askey–Wilson polynomials*, Methods Appl. Anal. **2** (1995), 369–398.
- [14] T. Takagi, *Inverse scattering method for a soliton cellular automaton*, Nucl. Phys. **B707** (2005), 577–601.
- [15] D. Takahashi and J. Matsukidaira, *Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997), L733–L739.
- [16] D. Takahashi and J. Satsuma, *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Japan **59** (1990), 3514–3519.
- [17] T. Tokihiro, A. Nagai and J. Satsuma, *Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization*, Inverse Problems **15** (1999), 1639–1662.
- [18] T. Tokihiro, D. Takahashi and J. Matsukidaira, *Box and ball system as a realization of ultradiscrete nonautonomous KP equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000), 607–619.
- [19] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 3247–3250.