*RIMS Kôkyûroku Bessatsu*
**B87** (2021), 113–123

# 楕円 Ruijsenaars 差分作用素の形式的固有函数
# Formal eigenfunctions for the elliptic Ruijsenaars difference operators

By

Edwin LANGMANN[*]・野海 正俊[**]・白石 潤一[***]
Edwin LANGMANN, Masatoshi NOUMI and Junichi SHIRAISHI

**Abstract**

We report recent progresses on the existence of formal eigenfunctions for the elliptic Ruijsenaars difference operators. These formal eigenfunctions provide $p$-deformations of Macdonald polynomials and asymptotically free Macdonald functions. We also give remarks on the present status of conjectures regarding the non-stationary Ruijsenaars functions.

## 序

本稿では, 楕円 Ruijsenaars 差分作用素の形式的固有函数 (Macdonald 多項式及び漸近挙動で指定される Macdonald 函数の $p$ 変形) の存在と, 非定常型 Ruiijsenaars 函数に関する予想の現状と課題について報告したい.

2 個の底 $p,q\in\mathbb{C}^*$ ($|p|<1,|q|<1$) とパラメータ $t\in\mathbb{C}^*$ を固定する. 次のように定義される $q$ 差分作用素 $\mathcal{D}_x^{(r)}(p)$ $(r=1,2,\ldots,n)$ を, $A$ 型 $n$ 変数 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ の**楕円 Ruijsenaars $q$ 差分作用素** という.

$$(0.1)\qquad \mathcal{D}_x^{(r)}(p)=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\};\,|I|=r} t^{\binom{r}{2}}\prod_{i\in I,\,j\notin I}\frac{\theta(tx_i/x_j;p)}{\theta(x_i/x_j;p)}\prod_{i\in I}T_{q,x_i}\qquad (r=1,\ldots,n)$$

ここで, $\theta(z;p)$ $(z\in\mathbb{C}^*)$ は, Jacobi テータ函数の乗法的記法で,

$$(0.2)\qquad \theta(z;p)=(z;p)_\infty(p/z;p)_\infty,\quad (z;p)_\infty=\prod_{i=0}^{\infty}(1-p^iz)\quad (z\in\mathbb{C})$$

Received May 21, 2020. Revised August 16, 2020.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 81Q80; 33E30, 33D67
*Key Words*: *Ruijsenaars* 作用素, 形式的固有函数, *Macdonald* 多項式
[*]Department of Physics, KTH Royal Institute of Technology, SE-106 91, Stockholm, Sweden
[**]神戸大学大学院理学研究科 (Department of Mathematics, Kobe University, Kobe 657-8501, Japan)
[***]東京大学大学院数理科学研究科 (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, Tokyo 153-8914, Japan)

で定義されるものである. また, $T_{q,x_i}$ $(i=1,\ldots,n)$ は, 変数 $x_i$ に関する $q$ シフトの作用素を表す: $T_{q,x_i}f(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,qx_i,\ldots,x_n)$.

Ruijsenaars の先駆的な研究 (1987, [7]) によって, これらの作用素 $\mathcal{D}_x^{(r)}(p)$ $(r=1,\ldots,n)$ が互いに可換であることが知られている. 基本的な課題は, この $q$ 差分作用素の可換族の同時固有函数, 即ち $q$ 差分方程式

$$\mathcal{D}_x^{(r)}(p)\psi(x;p)=\varepsilon^{(r)}(p)\psi(x;p)\qquad(r=1,\ldots,n). \tag{0.3}$$

満たすような函数 $\psi(x;p)$ を記述することである. 本稿では特に, 同時固有函数 $\psi(x;p)$ および固有値 $\varepsilon^{(r)}(p)$ が

$$\psi(x;p)=\sum_{k=0}^{\infty}p^k\psi_k(x),\quad \varepsilon^{(r)}(p)=\sum_{k=0}^{\infty}p^k\varepsilon_k^{(r)}\quad(r=1,\ldots,n) \tag{0.4}$$

のように $p$ の形式冪級数として展開可能なものを考察する.

以下では, まず「三角」の場合に知られている事項を概観し, その後で「楕円」の場合の形式的同時固有函数を中心に, 最近の進展について報告する.

## §1. Macdonald–Ruijsenaars 差分作用素の同時固有函数 (三角の場合)

### §1.1. Macdonald–Ruijsenaars の $q$ 差分作用素

$p\to 0$ の極限では, 楕円 Ruijsenaars 差分作用素 $\mathcal{D}_x^{(r)}(p)$ は次の, 有理函数を係数とする $q$ 差分作用素に移行する:

$$D_x^{(r)}=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\};\,|I|=r}t^{\binom{r}{2}}\prod_{i\in I,\,j\notin I}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\prod_{i\in I}T_{q,x_i}\quad(r=1,\ldots,n). \tag{1.1}$$

本稿では, $D_x^{(r)}$ を **Macdonald–Ruijsenaars $q$ 差分作用素**と呼ぶ. 差積の記号 $\Delta(x)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)$ を用いると, $q$ 差分作用素 $D_x^{(r)}$ は次のように表示される.

$$D_x^{(r)}=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\};\,|I|=r}\frac{T_{t,x}^I\Delta(x)}{\Delta(x)}T_{q,x}^I\qquad(r=1,\ldots,n),\quad T_{q,x}^I=\prod_{i\in I}T_{q,x_i}.$$

ルート系の記号で, 差積 $\Delta(x)$ は

$$\Delta(x)=\prod_{1\le i<j\le n}x_i(1-x_j/x_i)=x^{\rho}\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-x^{-\alpha}). \tag{1.2}$$

と表示される. 以下では, 次のようなルート系の記号を用いる.

$P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$ : $\mathfrak{gl}_n$ の整ウェイトの格子, 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ : $P \times P \to \mathbb{Z}$; $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}$.
$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$: 単純ルート, $Q = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\alpha_i \subset P$: ルート格子,
$\Delta_+ = \left\{ \varepsilon_i - \varepsilon_j \;\middle|\; 1 \le i < j \le n \right\} \subset Q$: 正ルートの集合, $\rho = \sum_{i=1}^n (n-i)\varepsilon_i$.

ここで $\rho$ と書いたのは Macdonald [4] の記号では $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 0)$ であるが, $\delta$ は後でアフィン・ルート系の零ルートの意味で用いるので, このような流儀にしておく. また, 整ウェイト $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \in P$ に対して, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ を多重指数とする単項式 $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ と形式的指数函数 $e(\lambda) = e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda}$ を同一視する.

## §1.2. Macdonald 多項式

Macdonald 多項式の理論 ([4]) では, パラメータ $t \in \mathbb{C}^*$ が一般の (generic な) 場合には, $q$ 差分作用素の可換族 $D_x^{(r)}$ $(r = 1, \ldots, n)$ が対称 Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[x^{\pm}]^{\mathfrak{S}_n}$ 上で同時対角化されることが知られている.

$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \in P$ が次の同値な条件を満たすとき, $\lambda$ は**支配的**であるといい, 支配的整ウェイトの全体からなる正錐を $P_+$ で表す.

$$\text{(1.3)} \qquad \langle \alpha_i, \lambda \rangle \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$$

また, ルート格子の正錐を $Q_+ = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}_{\ge 0}\alpha_i$ で表し, $P$ 上の**支配的順序** $\mu \le \lambda$ を次の条件で定義する.

$$\text{(1.4)} \quad \lambda - \mu \in Q_+ \quad \Longleftrightarrow \quad |\mu| = |\lambda|, \quad \mu_1 + \cdots + \mu_i \le \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \ \ (i = 1, \ldots, n-1)$$

**定理 1.1.** *$t \in \mathbb{C}^*$ が一般性の条件 $t^k \notin q^{\mathbb{Z}}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ を満たすとする. このとき, 任意の支配的整ウェイト $\lambda \in P_+$ に対して, 次の条件を満たす対称 Laurent 多項式 $P_\lambda(x) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$ が唯一つ存在する.*

(0) $P_\lambda(x) = x^\lambda +$ ( 支配的順序 $\le$ に関して $x^\lambda$ より小さい項 )
(1) 各 $r = 1, \ldots, n$ に対して $D_x^{(r)} P_\lambda(x) = d_\lambda^{(r)} P_\lambda(x)$ となる $d_\lambda^{(r)} \in \mathbb{C}$ が存在する.

以下, パラメータ $t \in \mathbb{C}^*$ は上の意味の一般性の条件を満たすものと仮定する. このとき, 固有値 $d_\lambda^{(r)}$ は $t^\rho q^\lambda = (t^{n-1}q^{\lambda_1}, \ldots, tq^{\lambda_{n-1}}, q^{\lambda_n})$ の $r$ 次基本対称式 $e_r(t^\rho q^\lambda)$ と決まる. 条件 (0) から **Macdonald 多項式** $P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, t)$ $(\lambda \in P_+)$ は, 対称 Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$ の $\mathbb{C}$ 基底をなす.

$$\text{(1.5)} \qquad \mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda \in P_+} \mathbb{C} P_\lambda(x)$$

このような定理が成立する根拠は,

- 互いに可換な Macdonald–Ruijsenaars 作用素 $D_x^{(r)}$ $(r=1,\ldots,n)$ が対称 Laurent 多項式環を保つ $\mathbb{C}$ 線形写像 $D_x^{(r)}:\mathbb{C}[x^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_n}\to\mathbb{C}[x^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_n}$ を定義し, それらが支配的順序に関して三角性を持つこと,
- $t$ の一般性の条件の下では, 固有値の $d_\lambda^{(r)}=e_r(t^\rho q^\lambda)$ $(r=1,\ldots,n)$ が全体として支配的整ウェイト $\lambda\in P_+$ を分離すること

の 2 点である.

Macdonald 多項式には数多くの特徴的な性質があるが, その幾つかをここに掲げておく.

**(a) 組合せ論的表示:** 支配的整ウェイト $\lambda=\lambda_1\varepsilon_1+\cdots+\lambda_n\varepsilon_n=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ が分割を表すとき, 即ち, 条件

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0 \tag{1.6}$$

を満たすとき, Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ は次のように, $n$ ステップで $\phi$ から $\lambda$ に至る, 分割の増大列に関する和で表される.

$$P_\lambda(x)=\sum_{\phi=\mu^{(0)}\subseteq\mu^{(1)}\subseteq\cdots\subseteq\mu^{(n)}=\lambda}\prod_{k=1}^{n}\psi_{\mu^{(k)}/\mu^{(k-1)}}\ x_k^{|\mu^{(k)}/\mu^{(k-1)}|} \tag{1.7}$$

ここで, $\psi_{\lambda/\mu}=\psi_{\lambda/\mu}(q,t)$ は $\mu\subseteq\lambda$ を満たす分割の組に対して

$$\begin{aligned}\psi_{\lambda/\mu}&=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{(q^{\mu_i-\lambda_j+1}t^{j-i-1};q)_{\lambda_i-\mu_i}}{(q^{\mu_i-\lambda_j}t^{j-i};q)_{\lambda_i-\mu_i}}\prod_{1\leq i\leq j<n}\frac{(q^{\mu_i-\mu_j}t^{j-i+1};q)_{\lambda_i-\mu_i}}{(q^{\mu_i-\mu_j+1}t^{j-i};q)_{\lambda_i-\mu_i}}\\(a;q)_k&=(1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{k-1}a)\qquad(k=0,1,2,\ldots)\end{aligned} \tag{1.8}$$

で定義される **Pieri 係数**で, $\lambda/\mu$ が水平断片 (horizontal strip) でないときには 0 となる. この明示公式は, $\lambda$ を台とする半標準盤 (semi-standard tableau) の全体にわたる和に読替えることができるので, Macdonald 多項式の**タブロー表示**とも呼ばれる. (詳しくは Macdonald の本 [4] を参照のこと.)

**(b) 自己双対性:** $P_\lambda(x)$ を $x$ 変数の基点 $t^\rho$ での値が 1 となるように規格化すると, $x=t^\rho q^\mu$ での値が, $\mu\in P_+$ と $\lambda\in P_+$ に関して対称となる.

$$\widetilde{P}_\lambda(x)=\frac{P_\lambda(x)}{P_\lambda(t^\rho)}\quad \text{と規格化すると}\quad \widetilde{P}_\lambda(t^\rho q^\mu)=\widetilde{P}_\mu(t^\rho q^\lambda)\qquad(\lambda,\mu\in P_+). \tag{1.9}$$

この自己双対性の反映として, $P_\lambda(x)$ の $q$ 差分方程式と, Pieri 公式 ($e_r(x)P_\lambda(x)$ を Macdonald 多項式で展開する公式) が互いに移り合う構造になっている.

## § 1.3. Macdonald 函数 (漸近自由な同時固有函数)

一般の複素数値のウェイト $\lambda \in P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ に対しても, $|x_1| \gg \cdots \gg |x_n|$ なる領域で $x^\lambda$ を漸近展開の主要項とするような, **漸近自由** (asymptotically free) な, 有理型の同時固有函数が存在することが知られている. (Cherednik [1], van Meer–Stokman [5], Noumi–Shiraishi [6]).

以下では, 変数 $x^{-\alpha_i} = x_{i+1}/x_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ に関する有理函数体と形式冪級数環を, それぞれ, 記号

$$(1.10) \quad \mathbb{C}(x^{-Q_+}) = \mathbb{C}(x_2/x_1, \ldots, x_n/x_{n-1}), \qquad \mathbb{C}[[x^{-Q_+}]] = \mathbb{C}[[x_2/x_1, \ldots, x_n/x_{n-1}]]$$

で表す. そこで, 変数 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ と双対変数 $s = (s_1, \ldots, s_n)$ について, 次の形の形式冪級数を考える.

$$(1.11) \qquad p(x;s) = \sum_{\beta \in Q_+} x^{-\beta} p_\beta(s) \in \mathbb{C}(s^{-Q_+})[[x^{-Q_+}]], \quad p_0(s) = 1$$

**定理 1.2.** *主係数 1 の形式冪級数 $p(x;s) \in \mathbb{C}(s^{-Q_+})[[x^{-Q_+}]]$ で, 一般の (generic な) 複素パラメータ $\lambda \in P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ に対して, 次の条件を満たすものが唯一つ存在する: 双対変数の読替え $s = t^\rho q^\lambda$ 即ち $s_i = t^{n-i} q^{\lambda_i}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ の下で*

$$(1.12) \qquad D_x^{(r)} x^\lambda p(x;s) = e_r(t^\rho q^\lambda)\, x^\lambda\, p(x;s) \quad (r = 1, \ldots, n).$$

本稿では, この $x^\lambda p(x;s)$ を領域 $|x_1| \gg |x_2| \gg \cdots \gg |x_n|$ の **Macdonald 函数**と呼ぶ. 定理の証明等については文献 [6] を参照してほしい.

こうして定まる $p(x;s) = p(x;s|q,t)$ もまた, Macdonald 多項式同様, 幾つもの著しい性質を持つことが知られている.

**(a) 組合せ論的表示:** 非負整数を成分とする, 狭義の上三角行列 $\theta = (\theta_{ij})_{1 \le i < j \le n}$ の全体を $M_n$ で表すとき, $p(x;s)$ は次のような無限和で表される.

(1.13)

$$p(x;s) = \sum_{\theta \in M_n} c(\theta;s) \prod_{1 \le i < k \le n} (x_k/x_i)^{\theta_{ik}},$$

$$c(\theta;s) = \prod_{1 \le i < j \le k \le n} \frac{(q^{\theta_{i,>k} - \theta_{j,>k}} t s_j/s_i; q)_{\theta_{ik}}}{(q^{\theta_{i,>k} - \theta_{j,>k}} q s_j/s_i; q)_{\theta_{ik}}} \prod_{1 \le i \le j < k \le n} \frac{(q^{\theta_{i,>k} - \theta_{j,\ge k}} q s_j/t s_i; q)_{\theta_{ik}}}{(q^{\theta_{i,>k} - \theta_{j,\ge k}} s_j/s_i; q)_{\theta_{ik}}}$$

ここで $\theta_{i,>k} = \sum_{k<l\le n} \theta_{i,l}$ 等の略記法を用いた. 双対変数 $s$ を $s = t^\rho q^\lambda$, $\lambda \in P_+$ と特殊化すると, $x^\lambda p(x; t^\rho q^\lambda) = P_\lambda(x)$ として, Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ が回復され, 上記の表示は $P_\lambda(x)$ のタブロー表示に戻る.

**(b) 対称性:** $p(x;s|q,t)$ を $\mathbb{C}[[s^{-Q_+}]][[x^{-Q_+}]]$ に属する形式冪級数とみなし,

$$\varphi(x;s|q,t)=p(x;s|q,t)\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(qs_j/s_i;q)_\infty}{(qs_j/ts_i;q)_\infty} \tag{1.14}$$

と規格化する. このとき

$$\begin{aligned}&\varphi(s;x|q,t)=\varphi(x;s|q,t),\\&\varphi(x;s|q,q/t)=\varphi(x;s|q,t)\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(qx_j/tx_i;q)_\infty}{(tx_j/x_i;q)_\infty}\frac{(qs_j/ts_i;q)_\infty}{(ts_j/s_i;q)_\infty}.\end{aligned} \tag{1.15}$$

**(c) 双スペクトル自己双対性:** 特に $\varphi(x;s|q,t)$ は, 双スペクトル問題に関して **自己双対的** である: $r=1,\ldots,n$ に対して

$$\begin{aligned}&D_x^{(r)}x^\lambda\varphi(x;s|q,t)=e_r(s)\,x^\lambda\varphi(x;s|q,t)\qquad (s=t^\rho q^\lambda)\\&D_s^{(r)}s^\mu\varphi(x;s|q,t)=e_r(x)\,s^\mu\varphi(x;s|q,t)\qquad (x=t^\rho q^\mu)\end{aligned} \tag{1.16}$$

**(d) 正則性:** $\varphi(x;s|q,t)$ は次のような表示をもつ.

$$\varphi(x;s|q,t)=\frac{F(x;s|q,t)}{\prod_{1\le i<j\le n}(qx_j/tx_i;q)_\infty(qs_j/ts_i;q)_\infty} \tag{1.17}$$

ここで $F(x;s|q,t)$ は, 変数 $(x_2/x_1,\ldots,x_n/x_{n-1};s_2/s_1,\ldots,s_n/s_{n-1})$ に関する $\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}^{n-1}$ 上の正則函数 (整函数) であって, $x$ 変数と $s$ 変数の入替え, また $t$ と $q/t$ の入替えに関して対称性をもつ.

$$F(s;x|q,t)=F(x;s|q,t),\qquad F(x;s|q,q/t)=F(x;s|q,t) \tag{1.18}$$

## §2. 楕円 Ruijsenaars 作用素の形式的同時固有函数

### §2.1. 楕円 Ruijsenaars 作用素についての註釈

差積 $\Delta(x)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)$ の $p$ 変形 $\Delta(x;p)$ を次のように定義する.

$$\Delta(x;p)=\prod_{1\le i<j\le n}x_i\,\theta(x_j/x_i;p),\quad \Delta(x;p)\big|_{p=0}=\Delta(x). \tag{2.1}$$

$p$ を形式的パラメータ (不定元) と見なし, アフィンルート系の零ルート $\delta$ と底 $p$ を $p=e(-\delta)$ で関連付けると, アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$ の Weyl 分母は $x^{n\Lambda_0}\Delta(x;p)(p;p)_\infty^n$ と表される. ここで, $\Lambda_0\in P^{\mathrm{aff}}$ は, 0 番の基本アフィンウェイトである.

以下, 0 番の単純アフィンルートを $\alpha_0=\delta-\varepsilon_1+\varepsilon_n$ で表し, 形式冪級数環

$$\mathbb{C}[[e(-\alpha_0),e(-\alpha_1),\ldots,e(-\alpha_{n-1})]=\mathbb{C}[[px_1/x_n,x_2/x_1,\ldots,x_n/x_{n-1}]], \tag{2.2}$$

を, $\mathbb{C}[[x^{-Q_+^{\mathrm{aff}}}]]=\mathbb{C}[[e(-Q_+^{\mathrm{aff}})]]$ で表せば, 差積の $p$ 変形 $\Delta(x;p)$ は $x^\rho\,\mathbb{C}[[x^{-Q_+^{\mathrm{aff}}}]]$ に属す.

差積の $p$ 変形の記号 $\Delta(x;p)$ を用いると楕円 Ruijsenaars $q$ 差分作用素

$$\mathcal{D}_x^{(r)}(p)=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\};\,|I|=r}t^{\binom{r}{2}}\prod_{i\in I,\,j\notin I}\frac{\theta(tx_i/x_j;p)}{\theta(x_i/x_j;p)}\prod_{i\in I}T_{q,x_i}\qquad(r=1,\ldots,n) \tag{2.3}$$

は, 三角の場合と同様に, 次のような表示することができる.

$$\mathcal{D}_x^{(r)}(p)=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\};\,|I|=r}\frac{T_{i,x}^{I}\Delta(x;p)}{\Delta(x;p)}T_{q,x}^{I}\qquad(r=1,\ldots,n) \tag{2.4}$$

## § 2.2. Macdonald 多項式の $p$ 変形

以下ではまず, 対称 Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[x^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_n}$ を係数とする $p$ の形式冪級数の枠組みで, 同時固有函数の問題を考察する.

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_x^{(r)}(p)\mathcal{P}(x;p)=\varepsilon^{(r)}(p)\mathcal{P}(x;p)\quad(r=1,\ldots,n),\\&\mathcal{P}(x;p)=\sum_{k=0}^{\infty}p^k\mathcal{P}_k(x)\in\mathbb{C}[x^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_n}[[p]],\quad\varepsilon^{(r)}(p)=\sum_{k=0}^{\infty}p^k\varepsilon_k^{(r)}\in\mathbb{C}[[p]]\end{aligned} \tag{2.5}$$

**定理 2.1.** パラメータ $t\in\mathbb{C}^*$ は一般とする. このとき, 任意の支配的整ウェイト $\lambda\in P_+$ に対して, 同時固有函数方程式の初期問題

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_x^{(r)}(p)\mathcal{P}_\lambda(x;p)=\varepsilon_\lambda^{(r)}(p)\mathcal{P}_\lambda(x;p)&&(r=1,\ldots,n),\\&\mathcal{P}_\lambda(x;0)=P_\lambda(x),\quad\varepsilon_\lambda^{(r)}(0)=e_r(t^\rho q^\lambda)&&(r=1,\ldots,n),\end{aligned} \tag{2.6}$$

は $\mathcal{P}_\lambda(x;p)\in\mathcal{R}[[p]]$, $\varepsilon_\lambda^{(r)}(p)\in\mathbb{C}[[p]]$ $(r=1,\ldots,n)$ なる形式解をもつ. このとき, 形式的固有値 $\varepsilon_\lambda^{(r)}(p)$ は一意に定まり, 形式的同時固有函数 $\mathcal{P}_\lambda(x;p)$ は, 定数係数の形式冪級数 $\gamma(p)\in\mathbb{C}[[p]]$, $\gamma(0)=1$ を乗ずる自由度を除いて一意に定まる.

より詳しく述べると, 上記の形式的同時固有函数 $\mathcal{P}_\lambda(x;p)$ は次の形の $p$ 展開をもつことが分かる.

$$\mathcal{P}_\lambda(x;p)=\sum_{k=0}^{\infty}p^k\mathcal{P}_{\lambda,k}(x);\quad\mathcal{P}_{\lambda,k}(x)=\sum_{\mu\in P_+;\,\mu\le\lambda+k\phi}\mathcal{P}_{\lambda,k,\mu}m_\mu(x)\in\mathbb{C}[x^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_n}. \tag{2.7}$$

ここで, $\phi = \varepsilon_1 - \varepsilon_n$ は $\mathfrak{gl}_n$ の最高ルートを表す. 三角の場合とほぼ同様に, 上記の定理が成立する根拠は, $q$ 差分作用素 $\mathcal{D}_x^{(r)}(p)$ の $p$ 展開の各係数が $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$ を保ち, $\mathcal{D}_x^{(r)}(p)$ がアフィン・ルート系の意味で, 支配的順序に関する三角性を有することと, 固有値の初項 $\varepsilon_\lambda^{(r)}(0) = e_r(t^\rho q^\lambda)$ が $P_+$ を分離すること — である.

## § 2.3. Macdonald 函数の $p$ 変形 : Ruijsenaars 函数

次に, 一般の複素パラメータ $\lambda \in P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の場合の領域 $|x_1| \gg |x_2| \gg \cdots \gg |x_n|$ での漸近自由な同時固有函数の $p$ 変形を考察する. この場合は, 次の $\mathbb{C}$ 代数 $\mathcal{R}$ を係数環として $p$ の冪級数を考える.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \sum_{\mu \in P} x^\mu \mathbb{K}[[x^{-Q_+}]] = \sum_{\mu \in P} x^\mu \mathbb{K}[[x_2/x_1, \ldots, x_n/x_{n-1}]], \\
\mathbb{K} &= \mathbb{C}(s^{-Q_+}) = \mathbb{C}(s_2/s_1, \ldots, s_n/s_{n-1})
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

この枠組みで, 形式冪級数

$$
\begin{aligned}
f(x; s; p) &= \sum_{k=0}^{\infty} p^k f_k(x; s) \in \mathcal{R}[[p]], \\
\varepsilon^{(r)}(s; p) &= \sum_{k=0}^{\infty} p^k \varepsilon_k^{(r)}(s) \in \mathbb{K}[[p]] \quad (r = 1, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

であって, 一般の複素パラメータ $\lambda \in P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ に対して, $s = t^\rho q^\lambda$ の下で

$$
\mathcal{D}_x^{(r)}(p) x^\lambda f(x; s; p) = \varepsilon^{(r)}(s; p) x^\lambda f(x; s; p) \quad (r = 1, \ldots, n), \tag{2.10}
$$

を満たすものを構成できる.

**定理 2.2.** 同時固有函数方程式の初期値問題

$$
f(x; s; 0) = p(x; s), \quad \varepsilon^{(r)}(s; 0) = e_r(s) \quad (r = 1, \ldots, n) \tag{2.11}
$$

は, $f(x; s; p) \in \mathcal{R}[[p]]$, $\varepsilon^{(r)}(s; p) \in \mathbb{K}[[p]]$ $(r = 1, \ldots, n)$ なる形式解をもつ. 形式的固有値 $\varepsilon^{(r)}(s; p)$ は一意に定まり, 形式的同時固有函数 $x^\lambda f(x; s; p) \in x^\lambda \mathcal{R}[[p]]$ は, 定数係数の形式冪級数 $\gamma(s; p) \in \mathbb{K}[[p]]$, $\gamma(s; 0) = 1$, を乗ずる自由度を除いて一意に定まる.

更に, 形式冪級数 $f(x; s; p)$ は次の形の $p$ 展開をもつ:

$$
f(x; s; p) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k f_k(x; s), \quad f_k(x; s) = \sum_{\mu \in P;\ \mu \le k\phi} f_{k,\mu}(s) x^\mu \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.12}
$$

このような $x^\lambda f(x;s;p)$ を領域 $|x_1| \gg |x_2| \gg \cdots \gg |x_n| \gg |px_1|$ の **Ruijsenaars 函数**と呼ぶ. 支配的整ウェイト $\lambda \in P_+$ の場合には, $s = t^\rho q^\lambda$ の下で $x^\lambda f(x;s;p)$ は, 前項で述べた $\mathcal{P}_\lambda(x;p)$ に一致し, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に関して対称な冪級数となる.

**註釈.** (1) ここまで, $n$ 変数, $A$ 型の楕円 Ruijsenaars 差分作用素の可換族 $\mathcal{D}_x^{(r)}(p)$ $(r = 1, \ldots, n)$ に対して, 形式的同時固有函数として, $\lambda \in P_+$ の場合の $\mathcal{P}_\lambda(x;p)$ (Macdonald 多項式の $p$ 変形) と, 一般の複素の $\lambda \in P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の場合の $x^\lambda f(x;s;p)$ (漸近的自由な同時固有函数 の $p$ 変形) の存在を議論してきた (本質的に一意的). $n = 2$ の場合には, 適当な規格化の下で, 形式的固有函数 $\mathcal{P}_\lambda(x;p)$, $x^\lambda f(x;s;p)$ と形式的固有値の収束 (十分小さい領域での) を示すことができる. 収束の問題については, 一般の $n$ 変数の場合も含めて, 次の機会に報告したい.

(2) ここで構成した形式的同時固有函数 $x^\lambda f(x;s;p)$ もまた, 三角の場合の $x^\lambda p(x;s)$ と同様, $t$ と $q/t$ の対称性, $x$ と $s$ に関する対称性, 正則性等について, 何らかの形で著しい性質を継承しているものと期待している.

## § 3. 非定常型 Ruijsenaars 函数との関係

ここまで議論してきた形式的同時固有函数 $x^\lambda f(x;s;p) = x^\lambda f(x,p|s|q,t)$ は, **定常型 Ruijsenaars 函数** と呼ぶべきものである.

これに対して, 本稿の共著者の白石は, 最近の論文 [8] に於いて, Nekrasov 型のインスタントン分配函数の明示公式で定義される**非定常型 Ruijsenaars 函数**を定義し, この「函数」(形式冪級数) に関する幾つかの結果と共に, 種々の予想を定式化した. この分配函数は, $n$ 個の分割の組 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)}) \in \mathcal{P}^n$ 全体にわたる形式的な無限和

(3.1)
$$f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x,p|s,\kappa|q,t) = \sum_{\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(n)} \in \mathcal{P}} \prod_{i,j=1}^{n} \frac{N^{(j-i|n)}_{\lambda^{(i)},\lambda^{(j)}}(ts_j/s_i;q,\kappa)}{N^{(j-i|n)}_{\lambda^{(i)},\lambda^{(j)}}(s_j/s_i;q,\kappa)} \prod_{j=1}^{n} \prod_{i\geq 1} (px_{j+i}/tx_{j+i-1})^{\lambda^{(j)}_i}$$

である. この表示に現れる $N^{(k|n)}_{\lambda,\mu}(u;q,\kappa)$ $(k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は ***K* 理論的 Nekrasov 因子**と呼ばれるもので, 分割の組 $(\lambda, \mu)$ に対して

(3.2)
$$\begin{aligned} N^{(k|n)}_{\lambda,\mu}(u;q,\kappa) = &\prod_{\substack{j\geq i\geq 1 \\ j-i\equiv k \pmod{n}}} (uq^{-\mu_i+\lambda_{j+1}}\kappa^{-i+j};q)_{\lambda_j-\lambda_{j+1}} \\ &\cdot \prod_{\substack{j\geq i\geq 1 \\ j-i\equiv -k-1 \pmod{n}}} (uq^{\lambda_i-\mu_j}\kappa^{i-j-1};q)_{\mu_j-\mu_{j+1}} \end{aligned}$$

で定義される．この形式冪級数 $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x,p|s,\kappa|q,t)$ は, 本稿で議論した Macdonald 函数 $x^\lambda p(x;s)$ の組合せ論的表示 (Macdonald 多項式のタブロー表示) の拡張と見做すこともできる.

この $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x,p|s,\kappa|q,t)$ には, 定常型の $f(x,p|s|q,t)$ に比較すると, 新しい付加的なパラメータ $\kappa$ が含まれている．この $\kappa$ が, 楕円曲線を指定する底 $p=e(\tau)$ で $\tau$ をシフトするときの差分間隔の乗法的記法に相当する．上記の非定常型 Ruijsenaars 函数は, パラメータ $\kappa$ について $\kappa=1$ で真性特異点を持つが, $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x,p|s,\kappa|q,t)$ の $x$ 変数に関する定数項を $\alpha(p|s,\kappa|q,t)$ で表し, 比 $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x,p|s,\kappa|q,t)/\alpha(p|s,\kappa|q,t)$ を取ると, $\kappa=1$ での特異点が正則化され, その $\kappa=1$ での値が, 本稿で議論した 定常型 Ruijsenaars 函数を再現する — というのが [8] の**基本予想**である．明示的書くと,

$$f(x;s;p;q,t)=\left.\frac{f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(p^{\rho/n}x,p^{1/n}|s,\kappa|q,q/t)}{\alpha(p^{1/n}|s,\kappa|q,q/t)}\right|_{\kappa=1}. \tag{3.3}$$

因子 $p^{\rho/n}$, $p^{1/n}$ は, アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$ を実現する方法 (principal か homogeneous か) の違いから生じるものである.

定常型の形式的固有函数の $p$ 展開を実際に計算し, 上記の明示公式から計算される係数を比較すると, 一定の時間内に計算可能な範囲では, 確かにこの予想が成立していることが確認できる.

定常型及び非定常型の Ruijsenaars 函数に関しては,

(1) 基本予想の証明

(2) $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x,p|s,\kappa|q,t)$ が満たすべき, 非定常型 Ruijsenaars 方程式とはどのようなものか.

(3) 非定常型の Ruijsenaars 函数は, 双スペクトル問題に関して自己双対的か.

(4) 形式冪級数 $f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_n}(x,p|s,\kappa|q,t)$ の収束と, 正則性については何が言えるか.

(5) 定常型 Ruijsenaars 函数についても, 非定常型の場合と同様の明示公式を構成できるか.

等々の, 未解決の, 興味深い課題が山積している — というのが現状である．この問題に関わる研究の進展についても, 今後, 漸進的に報告出来ればと考えている.[1]

## 文献

[1] Cherendnik, I., Whittaker limits of difference spherical functions. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2009**, 3793–3842.

[1] 報告集の原稿作成の時点 (2020 年 8 月) の状況については, [2], [3] を参照して下さい.

[2] Langmann, E., Noumi, M. and Shiraishi, J., Basic properties of non-stationary Ruijsenaars functions. arXiv:2006.07171, 29 pages.

[3] Langmann, E., Noumi, M. and Shiraishi, J., Perturbative eigenfunctions for the elliptic Ruijsenaars difference operators. (in preparation)

[4] Macdonald, I.G., *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second Edition. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995, x+475pp.

[5] van Meer, M. and Stokman, J., Double affine Hecke algebras and bispectral quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2010**, 969–1040.

[6] Noumi, M. and Shiraishi, J., A direct approach to the bispectral problem for the Ruijsenaars–Macdonald $q$-difference operators. arXiv:1206.5364, 44 pages.

[7] Ruijsenaars, S.N.M., Complete integrability of relativistic Calogero-Moser system and elliptic function identities. *Comm. Math. Phys.*, **110** (1987), 181-213.

[8] Shiraishi, J., Affine screened vertex operators, affine Laumon spaces and conjectures concerning non-stationary Ruijsenaars functions. *J. Integrable Syst.*, **4** (2019), xyz010, 30pp. (arXiv:1903.07495, 26 pages.)