

# 因子化されたラックス行列の対称性 Symmetry of factorized Lax matrices

By

朴佳南\* · 山田泰彦\*\*

Kanam PARK and Yasuhiko YAMADA

## Abstract

We study bi-rational Weyl group actions on certain matrix Lax operators given in factorized form. These actions generalize the  $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$  symmetry considered before by Kajiwara et.al. Our study is motivated by two recent developments: one is on discrete isomonodromic systems and the other is on the bi-rational Weyl group actions arising from the quiver mutations. We also discuss further generalizations using the results by G. Frieden on the geometric crystals.

## § 1. はじめに

積の形に表示されたラックス作用素  $\mathcal{L}$  において、隣り合う因子の交換 (ダルブー変換) は系の対称性や時間発展を記述する上で基本的な操作である ([3][9][20] など). 例えば, スカラーラックス作用素

$$(1.1) \quad \mathcal{L} = (\partial_x + p_1)(\partial_x + p_2) \cdots (\partial_x + p_N)$$

の因子の入れ替えは  $N$ -reduced modified KP 階層の  $\mathfrak{S}_N$  対称性を生成する. また, 離散 Toda 方程式は, 行列ラックス作用素

$$(1.2) \quad \mathcal{L} = LR$$

---

Received March 24, 2020. Revised December 8, 2020.

2020 Mathematics Subject Classification(s): 34M56, 39A13, 14H70

本研究は科学研究費 (基盤研究 B26287018, 基盤研究 S17H06127) の補助を受けています.

\*関西学院大学・理工学研究科 (Graduate School of Science and Technology, Kwansei Gakuin University, Sanda, Hyogo 669-1337, Japan.)

e-mail: [kpaku@kwansei.ac.jp](mailto:kpaku@kwansei.ac.jp)

\*\*神戸大学大学院・理学研究科 (Department of Mathematics, Kobe University, Rokko, Kobe 657-8501, Japan.)

e-mail: [yamaday@math.kobe-u.ac.jp](mailto:yamaday@math.kobe-u.ac.jp)

の因子の入れ替え (LR 変換) により与えられる [5].

本稿では, このような変換およびこれと整合的な変換を, ある種の具体的な行列ラックス系において考察する. 内容は次の通りである. **2** ラックス形式の対称性 (復習), **3** 最近の進展 (主結果), **4** さらなる拡張 (実験例).

## § 2. ラックス形式の対称性

### § 2.1. 行列型ラックス形式

次の行列型ラックス対を考える.

$$(2.1) \quad Y(qz) = \mathcal{A}(z)Y(z), \quad \overline{Y(z)} = \mathcal{B}(z)Y(z).$$

ここで,  $\mathcal{A}(z)$  は変数  $z$  の多項式行列

$$(2.2) \quad \mathcal{A}(z) = A_0 + A_1z + \cdots + A_mz^m,$$

(をスカラー多項式で割ったもの) であり,  $\mathcal{B}(z)$  も同様 (普通は  $\mathcal{A}(z)$  よりずっと簡単なもの) とする. 係数行列はパラメータ  $a_i$  や変数  $u_i$  の関数である.  $\overline{\phantom{x}}$  は系の離散的変形 (時間発展) を表し, その方向は, パラメータのずらし方  $a_i \mapsto \overline{a_i}$  により指定する.

$\mathcal{A}(z), \mathcal{B}(z)$  をうまく設定して, 変数の時間発展  $u_i \mapsto \overline{u_i}$  が, 両立条件

$$(2.3) \quad \overline{\mathcal{A}(z)}\mathcal{B}(z) = \mathcal{B}(qz)\mathcal{A}(z),$$

から一意的に決められるとき, (2.1) をこの時間発展のラックス対と呼ぶのであった. こうした設定を壊さないようにラックス行列を変形することができれば, そのような変形は考えている方程式系の対称性を与える. 例えば, ゲージ変換

$$(2.4) \quad Y(z)^g = G(z)Y(z),$$

がラックス方程式と両立するとき, つまり両立条件

$$(2.5) \quad \mathcal{A}(z)^g G(z) = G(qz)\mathcal{A}(z),$$

が変換  $a_i \mapsto \tilde{a}_i, u_i \mapsto \tilde{u}_i$  を定めるとき, この変換は 1 つの対称性を与える. 特に離散系においては, 対称性全体のなす群が重要である<sup>1</sup>. 時間発展も対称性の一部とみなせるので, 以下では特別な  $\mathcal{B}(z)$  を固定せず,  $\mathcal{A}(z)$  のみに注目して考察する. また, 記述を簡単にするため, もっぱら自励的な場合 ( $q = 1$ ) を扱う (このとき (2.1) の第 1 式はスペクトル問題  $\lambda Y(z) = \mathcal{A}(z)Y(z)$  と読む).

<sup>1</sup>多くの場合アフィン・ワイル群となるが, 一般にはそれに限らない.

§ 2.2.  $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$  対称性

次のような  $\mathcal{A}(z)$  行列を考える [8][9]:

$$(2.6) \quad \mathcal{A}(z) = X(\mathbf{x}^1)X(\mathbf{x}^2) \cdots X(\mathbf{x}^m),$$

ここで

$$(2.7) \quad X(\mathbf{x}^a) = \begin{bmatrix} x_1^a & 1 & & & \\ & x_2^a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x_{n-1}^a & 1 \\ z & & & & x_n^a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^a = (x_1^a, \dots, x_n^a),$$

とする. 特に  $\Lambda_z = X(\mathbf{0})$  は基本的な行列で, これによる  $\mathcal{A}(z)$  の共役変換は変数  $x_i^a$  の  $i$  添字に対する cyclic な変換 ( $n$ -周期的 shift) を引き起こす.  $mn$  個の変数  $\{x_i^a\}$  に対して, 2 種類の対称群  $\mathfrak{S}_m$  と  $\mathfrak{S}_n$  の互いに可換な作用がある. これらの作用は, ラックス作用素のレベルで以下のように構成される.

(1) 行列の入れ替え  $\rightarrow \mathfrak{S}_m$  作用: 交換関係  $X(\mathbf{x}^a)X(\mathbf{x}^{a+1}) = X(\mathbf{x}'^a)X(\mathbf{x}'^{a+1})$  から,

$$(2.8) \quad x_i^a x_i^{a+1} = x_i'^a x_i'^{a+1}, \quad x_i^a + x_{i+1}^{a+1} = x_i'^a + x_{i+1}'^{a+1}.$$

これを満たす非自明な変換として, 次の双有理変換を得る.

$$(2.9) \quad s_a : x_i^a \mapsto x_i'^a = x_i^{a+1} \frac{P_i^a}{P_i^{a+1}}, \quad x_i^{a+1} \mapsto x_i'^{a+1} = x_i^a \frac{P_i^a}{P_{i-1}^a},$$

$$(2.10) \quad P_i^a = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} x_{i+j}^a \prod_{j=k+1}^n x_{i+j}^{a+1}.$$

この作用は, 添字  $a$  について (擬) 周期的に拡張して  $W(A_{m-1}^{(1)})$  作用にもできる.

(2) 共役変換  $\rightarrow \mathfrak{S}_n$  作用:  $z$  の多項式 (またはべき級数) で定数項  $A_0$  が上三角型の  $n \times n$  行列

$$(2.11) \quad A(z) = A_0 + A_1 z + \cdots,$$

に対して, 下三角基本 Jacobi 行列

$$(2.12) \quad G_i = \begin{cases} 1 + v E_{i+1,i}, v = \frac{(A_0)_{i,i} - (A_0)_{i+1,i+1}}{(A_0)_{i,i+1}}, (1 \leq i \leq n-1) \\ 1 + \frac{v}{z} E_{1,n}, v = \frac{(A_0)_{n,n} - (A_0)_{1,1}}{(A_1)_{n,1}}, (i=0) \end{cases}$$

によるゲージ変換  $w_i$  は  $W(A_{n-1}^{(1)})$  を生成する (この作用の  $q$ -Painlevé 系への応用は, 例えば [23] など参照).

(1),(2) の作用は, その構成法から互いに可換である. 一方, 構成法が異なるにもかかわらず  $w_i$  作用の式と  $s_a$  作用の式は  $x_i^a \leftrightarrow x_a^i$  の置き換えで対応している [25]. この  $m \leftrightarrow n$  双対性は, 方程式 (2.1) で見ればラプラス変換である [16][26].

### § 2.3. 超離散化と表現論的意味

上記の双有理的な  $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$  作用は, 超離散化 [13],[14],[24] ができる.

$$(2.13) \quad x = O(\epsilon^u), \quad y = O(\epsilon^v), \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

とすると, 対応する積や和は

$$(2.14) \quad xy = O(\epsilon^{u+v}), \quad x + y = O(\epsilon^{\min(u,v)}),$$

となる. そこで, 変数  $x, y, \dots$  の双有理変換の積  $\times$  と和  $+$  を超離散変数  $u, v, \dots$  の和  $+$  と  $\min$  に置き換えることにより, 超離散的な  $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$  作用が得られる. 例えば, 変換 (2.9),(2.10) の超離散化は

$$(2.15) \quad s_a : u_i^a \mapsto u_i'^a = u_i^{a+1} + P_{i-1}^a - P_i^a, \quad u_i^{a+1} \mapsto u_i'^{a+1} = u_i^a + P_i^a - P_{i-1}^a,$$

$$(2.16) \quad P_i^a = \min_{1 \leq k \leq n} \left( \sum_{j=1}^{k-1} u_{i+j}^a + \sum_{j=k+1}^n u_{i+j}^{a+1} \right),$$

となり,  $n = 4$  の場合には

$$(2.17) \quad s_a : u^a = (1, 1, 2, 0), u^{a+1} = (0, 1, 0, 1) \mapsto u'^a = (1, 0, 1, 0), u'^{a+1} = (0, 2, 1, 1),$$

などを得る<sup>2</sup>.

こうして得られた超離散変換には以下のような表現論的意味が知られている. まず, 行列  $X(\mathbf{x})$  の座標  $\mathbf{x}$  の超離散極限  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  に対し, 規則

$$(2.18) \quad u_i = \text{Young 盤の文字 } i \text{ の個数}$$

によって横 1 行の Young 盤を対応させる. 次に, 行列の積  $X(\mathbf{x}^1) \cdots X(\mathbf{x}^m)$  には, 各因子に対応する Young 盤を並べたテンソル積を対応させる. 例えば (2.17) に対応する式は

$$(2.19) \quad s_a : \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{3} \otimes \boxed{2} \boxed{4} \mapsto \boxed{1} \boxed{3} \otimes \boxed{2} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4},$$

である. 得られた関係式は ( $A_{n-1}^{(1)}$  の結晶基底とみなした) Young 盤のテンソル積の同型 (組合せ  $R$  写像) を表す. 同様に, 変換  $w_i$  はテンソル積への Weyl 群作用と解釈できる (詳

<sup>2</sup>この作用を, 図を用いて簡単に求める方法もある [17].

細及び応用については文献 [6][12] 等を参照されたい). なお, 組合せ論の文脈では, 関係式 (2.19) の積の順序を逆にして

$$(2.20) \quad \boxed{2\ 4} \cdot \boxed{1\ 2\ 3\ 3} \sim \boxed{2\ 2\ 3\ 4} \cdot \boxed{1\ 3},$$

と表すのが普通である (混乱を避けるため記号を  $\otimes$  と  $\cdot$  で区別した).  $\sim$  は, 両辺の “行 bumping” が同じ結果を与えることを意味する.

$$(2.21) \quad \boxed{2\ 4} \leftarrow \boxed{1} \leftarrow \boxed{2} \leftarrow \boxed{3} \leftarrow \boxed{3} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline \end{array} = \boxed{2\ 2\ 3\ 4} \leftarrow \boxed{1} \leftarrow \boxed{3}.$$

### § 3. 最近の進展

#### § 3.1. 対称性の拡大

前節までに述べたことは, 基本的には 15 年~20 年くらい前から知られていた内容であるが, 最近, その種々の拡張が quiver mutation との関連 ([2][7]) 等を通して議論されている. 特に本稿に関連する結果として, [19] では,  $q$ -Garnier 系, または双対な  $q$ -Fuji-Suzuki 系の対称性として  $W((A_{2n+1} \times A_1 \times A_1)^{(1)})$  の双有理作用が構成された. また, [15] ではクラスター代数を用いた Weyl 群作用の系統的構成法が示され, 例として  $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)} \times A_{g-1}^{(1)})$  などの双有理表現が明示的に与えられている. これらの作用のうち  $W((A_{2n+1} \times A_1)^{(1)})$  や  $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$  の部分は, 前節で構成したものと等価であることが分かっている. そこで, 新たに追加された作用もラックス形式の対称性として理解できるか? が問題となる. 結論を先に述べれば,  $A(z)$  行列 (2.6) を少し拡張すれば可能, というのが答えである.

1 つの拡張として次の形の  $n \times n$  行列  $A(z)$  を考える [21][22].

$$(3.1) \quad A(z) = \text{diag.} \underbrace{X^{-1}(\mathbf{x}^1) \cdots X^{-1}(\mathbf{x}^{m_1})}_{m_1} \underbrace{X(\mathbf{x}^{m_1+1}) \cdots X(\mathbf{x}^{m_1+m_2})}_{m_2}.$$

$X$  型と  $X^{-1}$  型の各因子は, 型の異なるもの同士も含め変数  $\{x_i^a\}$  の有理変換により入れ替え可能なので [11], 型の順序を (例えば (3.1) のように) 指定しても一般性は失わない. その上で, 同じ型の因子の交換に対応して  $\mathfrak{S}_{m_1} \times \mathfrak{S}_{m_2}$  が作用する<sup>3</sup>.

以下しばらく,  $X$  型と  $X^{-1}$  型が同数  $m_1 = m_2 = m$  の場合を考察する. このとき  $A(z)$  は

$$(3.2) \quad A(z) = \frac{A_0 + A_1 z + \cdots + A_m z^m}{(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_m)},$$

の形であり,  $z = \infty$  における展開は

$$(3.3) \quad A(z) = A_m + O(z^{-1}), \quad A_m = \text{下三角型},$$

<sup>3</sup>(拡大) アフィンワイル群も作用すると思われるが詳細は未確認.

となる. そこで, 2.2 節 (2) の  $W(A_{n-1}^{(1)})$  作用の構成において, 三角性の上下を逆にして,

$$(3.4) \quad G'_i(z) = 1 + vE_{i,i+1} \quad (i \neq 0), \quad G'_0(z) = 1 + vzE_{n,1},$$

によるゲージ変換  $w'_i$  を考えることができる. これより, もう 1 組の  $W(A_{n-1}^{(1)})$  作用が得られる (区別のため, 以下では後者を  $W'(A_{n-1}^{(1)})$  と表す)<sup>4</sup>. ラックス線形方程式の立場では  $z=0$  側および  $z=\infty$  側の指数の入れ替え作用が  $W(A_{n-1}^{(1)})$  および  $W'(A_{n-1}^{(1)})$  である.

$W(A_{n-1}^{(1)})$ ,  $W'(A_{n-1}^{(1)})$  が積の順序交換作用  $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m$  と可換であることは構成法から明らかであるが, さらに次が成り立つ.

**Proposition 3.1.**  $w_i \in W(A_{n-1}^{(1)})$  と  $w'_j \in W'(A_{n-1}^{(1)})$  の  $\mathcal{A}(z)$  への作用は,  $z$  に依らない対角行列  $P$  による共役変換を *modulo* として可換である

$$(3.5) \quad w_i w'_j (\mathcal{A}(z)) = P w'_j w_i (\mathcal{A}(z)) P^{-1}.$$

*Proof.* 簡単のため  $i, j \neq 0$  の場合に示す (一般の場合も  $\Lambda_z$  による共役変換でこの場合に帰着する). 定義より,  $w_i, w'_j$  の  $\mathcal{A}(z)$  ( $= \mathcal{A}$  と略記する) への作用は

$$(3.6) \quad \begin{aligned} w_i(\mathcal{A}) &= G_i(u) \mathcal{A} G_i(u)^{-1}, & u &= \frac{\mathcal{A}_{i,i} - \mathcal{A}_{i+1,i+1}}{\mathcal{A}_{i,i+1}} \Big|_{z \rightarrow 0}, \\ w'_j(\mathcal{A}) &= G'_j(v) \mathcal{A} G'_j(v)^{-1}, & v &= \frac{\mathcal{A}_{j,j} - \mathcal{A}_{j+1,j+1}}{\mathcal{A}_{j+1,j}} \Big|_{z \rightarrow \infty}, \end{aligned}$$

$G_i(u) = 1 + uE_{i+1,i}$ ,  $G'_j(v) = 1 + vE_{j,j+1}$  である. これらを合成して

$$(3.7) \quad \begin{aligned} w'_j w_i(\mathcal{A}) &= G'_j(v') X G'_j(v')^{-1}, \\ X &= w_i(\mathcal{A}) = \mathcal{A} + uE_{i+1,i} \mathcal{A} - u \mathcal{A} E_{i+1,i} - u^2 E_{i+1,i} \mathcal{A} E_{i+1,i}, \end{aligned}$$

$$v' = \frac{X_{j,j} - X_{j+1,j+1}}{X_{j+1,j}} \Big|_{z \rightarrow \infty} = \begin{cases} v & (i \neq j) \\ \frac{v}{1-uv} & (i = j) \end{cases}.$$

同様に

$$(3.8) \quad \begin{aligned} w_i w'_j(\mathcal{A}) &= G_i(u') Y G_i(u')^{-1}, \\ Y &= w'_j(\mathcal{A}) = \mathcal{A} + vE_{j,j+1} \mathcal{A} - v \mathcal{A} E_{j,j+1} - v^2 E_{j,j+1} \mathcal{A} E_{j,j+1}, \end{aligned}$$

$$u' = \frac{Y_{i,i} - Y_{i+1,i+1}}{Y_{i,i+1}} \Big|_{z \rightarrow 0} = \begin{cases} u & (i \neq j) \\ \frac{u}{1-uv} & (i = j) \end{cases},$$

<sup>4</sup> $\mathcal{A}(z)$  に対角行列  $\text{diag.}$  を入れないと  $A_m$  の対角成分が 1 となり  $W'(A_{n-1}^{(1)})$  は自明な作用となる.

である. 従って

$$(3.9) \quad w_i w'_j(\mathcal{A}) = P w'_j w_i(\mathcal{A}) P^{-1}, \quad P = G_i(u') G'_j(v) G_i(u)^{-1} G'_j(v')^{-1},$$

となる.  $i \neq j$  なら  $P = 1$ .  $i = j$  なら  $P = \text{diag}(1, \dots, 1, \frac{1}{1-uv}, 1-uv, 1, \dots, 1)$  であるから題意は示された.  $\square$

$z$  に依らない対角行列による  $\mathcal{A}(z)$  の共役変換は, 単に線形方程式の解の規格化を変えるだけのゲージ自由度に対応する. 変数  $\{x_i^a\}$  からこの自由度を分離したゲージ不変な変数で見れば, 上の命題は  $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m, W(A_{n-1}^{(1)}), W'(A_{n-1}^{(1)})$  が互いに可換に作用していることを意味する.  $n = 2$  の場合には,  $X$  型と  $X^{-1}$  型に本質的な違いはない (スカラー倍で移り合える) ので,  $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m$  は  $W(A_{2m-1})$  に持ち上がる. 従って  $W(A_{2m-1} \times A_1 \times A_1)$  が作用する. これは, [19] の結果 (の有限部分) に対応する.

### § 3.2. $m_1 \neq m_2$ の場合

$X$  型と  $X^{-1}$  型が同数という条件を外した場合にも  $z = \infty$  側の上三角ゲージ変換を考えたい. そのために上三角の  $G'_i$  行列 (3.4) を少し修正して

$$(3.10) \quad G_i(d, u) = \begin{cases} \begin{bmatrix} E_{i-1} & & \\ & d^{-1}u & \\ & 0 & d \\ & & & E_{n-i-1} \end{bmatrix}, & (1 \leq i \leq n-1) \\ \begin{bmatrix} d & & \\ & E_{n-2} & \\ uz & & d^{-1} \end{bmatrix}, & (i = 0) \end{cases}$$

とする ( $E_i$  は  $i$  次単位行列). 基本的な交換関係として:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} X(\mathbf{x}) G_i(d, u) &= G_{i-1}(d', u) X(\mathbf{x}'), \\ d' &= d + ux_i, \quad x'_{i-1} = d' x_{i-1}, \quad x'_i = (dd')^{-1} x_i, \quad x'_{i+1} = dx_{i+1}, \end{aligned}$$

$$X(\mathbf{x})^{-1} G_i(d, u) = G_{i+1}(d'', u) X(\mathbf{x}'')^{-1},$$

$$d'' = d - ux_i, \quad x''_{i-1} = dx_{i-1}, \quad x''_i = (dd'')^{-1} x_i, \quad x''_{i+1} = d'' x_{i+1},$$

を得る. これより,  $m_1 = m_2$  なら  $\mathcal{A}(z) G_i = G_i w'_i(\mathcal{A}(z))$  となって前節の結果を再現する.  $m_1 \equiv m_2 \pmod{n}$  でも同様であり, 例えば  $X^{-1}$  が 0 個,  $X$  が  $n$  個の場合には  $W(A_{n-1} \times A_{n-1} \times A_{n-1})$  作用がある.

さらに  $m_1, m_2$  が一般の場合でも,  $W(A_{n-1}^{(1)})$  の一部は作用できる. 例えば,  $n = 4, (m_1, m_2) = (2, 4)$  で  $\mathcal{A}(z) = \text{diag}. X^{-1} (*) X^{-1} (*) X (*) X (*) X (*) X (*)$  の場合,

$$(3.12) \quad \mathcal{A}(z) G_i = G_{i-2} \mathcal{A}'(z),$$

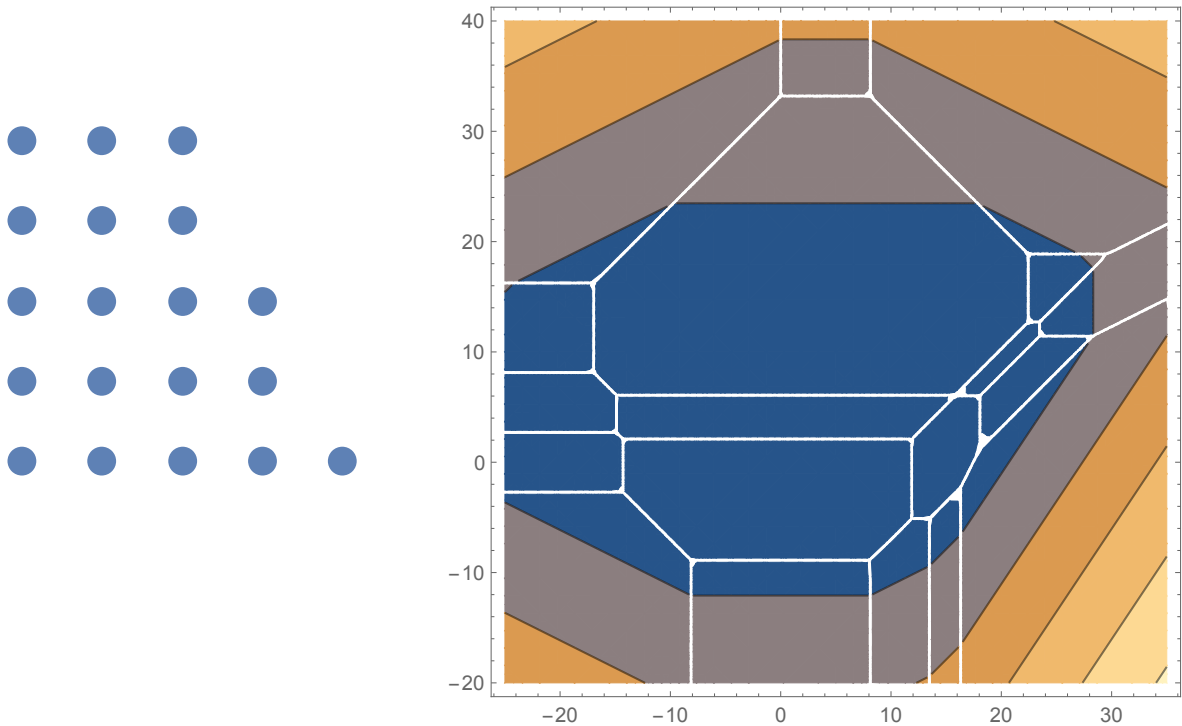
となるので  $G_i$  単独では共役変換にならないが,  $G_1, G_3$  を合成した

$$(3.13) \quad \mathcal{A}(z)G_1G_3 = G_3G_1\mathcal{A}'(z),$$

は  $\mathfrak{S}_2$  を生成する. この例で  $z = \infty$  側に  $\mathfrak{S}_2$  の作用があることは, 対応するスペクトル曲線

$$(3.14) \quad F(z, \lambda) := \det(\lambda E_n - \mathcal{A}(z)) = 0,$$

からも読み取ることができる.  $F(z, \lambda)$  の Newton 多角形およびスペクトル曲線 (のトロピカル版=超離散版) は次のようになる (横軸が  $z$ , 縦軸が  $\lambda$ ):



スペクトル曲線 (種数 = Newton 多角形の内点の個数 = 7) の  $z \rightarrow \infty$  側に伸びる 2 本の外線の入れ替えが (3.13) の生成する  $\mathfrak{S}_2$  の作用である.

### § 4. さらなる拡張

#### § 4.1. 長方形の盤

$A_{n-1}^{(1)}$  型量子アフィンリー代数には,  $k$  行  $l$  列の長方形 Young 図に対応した良い有限次元表現 (Kirillov-Reshetkhin 加群) がある. その結晶基底  $B^{k,l}$  は, 集合としては対応する Young 盤の全体である [12]. 例として  $n = 4$  で  $B^{2,l}$  の場合を考えよう. 4 種類の文字  $\{1, 2, 3, 4\}$  からなる 2 行  $l$  列の長方形 Young 盤は座標  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$  で表示で



きる.  $u_{ij}$  は Young 盤の  $i$  行目にある文字  $j$  の個数である. Young 盤が長方形であることから  $l := u_{11} + u_{12} + u_{13} = u_{22} + u_{23} + u_{24}$  が成り立つ. 次は  $l = 9$  の例である.

$$(4.1) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

これらの Young 盤  $T \in B^{k,l}$ ,  $T' \in B^{k',l'}$  の積を次の行 bumping により定める.

$$(4.2) \quad T \cdot T' = T \leftarrow i_1 \leftarrow i_2 \leftarrow \cdots \leftarrow i_{k'l'},$$

ここで,  $i_1, i_2, \dots, i_{k'l'}$  は盤  $T'$  の文字を, 下の行から上の行へ, 各行では左の箱から右の箱へと読んだ文字列である. 例えば

$$(4.3) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & \\ \hline 3 & 4 & 4 & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline \end{array},$$

が確かめられる. (積の順序を逆にして) テンソル積の関係として書けば

$$(4.4) \quad (2, 1, 0, 1) \otimes \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \otimes (0, 0, 2, 2),$$

となる. このように定まる入れ替えの操作  $b_1 \otimes b_2 \mapsto b'_2 \otimes b'_1$  は結晶基底の同型 (組合せ  $R$  写像) を与える. この写像は, 3 個のテンソル積の入れ替えを 2 通りに行っても結果が同じになるという意味で, Yang-Baxter 性を持つ. 例えば  $B^{1,7} \otimes B^{1,4} \otimes B^{2,5}$  において

$$(4.5) \quad \begin{array}{ccc} (2, 1, 3, 1) \otimes (1, 1, 2, 0) \otimes \begin{pmatrix} 1, 1, 3, 0 \\ 0, 1, 0, 4 \end{pmatrix} & & (2, 1, 3, 1) \otimes (1, 1, 2, 0) \otimes \begin{pmatrix} 1, 1, 3, 0 \\ 0, 1, 0, 4 \end{pmatrix} \\ \times & & \times \\ (2, 1, 0, 1) \otimes (1, 1, 5, 0) \otimes \begin{pmatrix} 1, 1, 3, 0 \\ 0, 1, 0, 4 \end{pmatrix} & & (2, 1, 3, 1) \otimes \begin{pmatrix} 2, 1, 2, 0 \\ 0, 0, 3, 2 \end{pmatrix} \otimes (0, 2, 0, 2) \\ | & \times & = & \times & | \\ (2, 1, 0, 1) \otimes \begin{pmatrix} 2, 1, 2, 0 \\ 0, 0, 3, 2 \end{pmatrix} \otimes (0, 2, 3, 2) & & \begin{pmatrix} 4, 1, 0, 0 \\ 0, 1, 3, 1 \end{pmatrix} \otimes (0, 0, 5, 2) \otimes (0, 2, 0, 2) \\ \times & & \times \\ \begin{pmatrix} 4, 1, 0, 0 \\ 0, 1, 3, 1 \end{pmatrix} \otimes (0, 0, 2, 2) \otimes (0, 2, 3, 2) & & \begin{pmatrix} 4, 1, 0, 0 \\ 0, 1, 3, 1 \end{pmatrix} \otimes (0, 0, 2, 2) \otimes (0, 2, 3, 2) \end{array}$$

### § 4.2. 行列 $X_k$

先に考えた  $n \times n$  の  $X$  行列 (2.7) は  $B^{1,l}$  に対応しており, 一般の  $B^{k,l}$  にも対応する  $X_k$  行列が知られている. これにより, 前節のテンソル積は行列  $X_k$  の積に対応させることができる. 例えば,  $n = 4$ ,  $B^{2,l}$  の場合, 超離散座標  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$  に対応する有

理の変数  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$  は制約条件  $L := x_{11}x_{12}x_{13} = x_{22}x_{23}x_{24}$  を満たし, 対応する行列  $X_2(\mathbf{x})$  は次で与えられる.

$$(4.6) \quad A = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 & & \\ & x_{12} & 1 & \\ & & x_{13} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & x_{22} & 1 & \\ & & x_{23} & 1 \\ & & & x_{24} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ * 1 \end{bmatrix},$$

$$X_2(\mathbf{x}) = A + zB = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{22} & 1 & 0 \\ 0 & x_{12}x_{22} & x_{12} + x_{23} & 1 \\ z & 0 & x_{13}x_{23} & x_{13} \\ z \frac{x_{11}(x_{12} + x_{23})}{x_{22}x_{23}} & z & 0 & x_{24} \end{bmatrix}.$$

一般に, 行列  $X_k$  の構成法は以下の通りである<sup>5</sup>. 他の  $n, k$  でも同様であるから,  $n = 7, k = 3$  の例で述べる. まず, 座標

$$(4.7) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ & & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} \end{pmatrix}, \quad \prod_{j=i}^{n+i-k} x_{ij} = L,$$

の各行に対して次のような上三角行列を用意し, その積を  $A$  とする<sup>6</sup>

$$(4.8) \quad A = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & x_{15} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & x_{22} & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & x_{26} & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & x_{33} & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & x_{37} & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

これに  $z$  の 1 次の項を付け加えて  $X_k(\mathbf{x})$  を作る

$$(4.9) \quad X_k(\mathbf{x}) = A + (-1)^k \frac{z}{L} B = \begin{bmatrix} * & * & * & 1 \\ & * & * & 1 \\ & & * & * & 1 \\ & & & * & * & 1 \\ & & & & * & * & \\ & & & & & * & * \\ & & & & & & * \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ * 1 \\ * * 1 \\ * * * 1 \end{bmatrix}.$$

<sup>5</sup>以下と同値な構成は既に [10] で知られていたが, 対応する双有理  $R$  写像が引き算なしの変換であることは予想であった. 最近の結果 [4] は [10] とは独立になされた.

<sup>6</sup> $X_k$  は [10] の  $M_k^{-1}$  と等価である. また,  $X_k$  の上三角部分  $A$  は [18] におけるトロピカルタブローの逆行列と等価である (いずれも modulo convention で).

$A^{-1}$  の右上の  $k \times k$  ブロックは対角成分が全て  $(-1)^{k-1}L^{-1}$  の下三角型であり, その逆行列として  $B$  の左下の  $k \times k$  ブロックを定める. 構成法より

$$(4.10) \quad A^{-1}X_k(\mathbf{x}) = E_n + (-1)^k \frac{z}{L} \begin{bmatrix} E_k & O \\ * & O \end{bmatrix},$$

であるから  $z = (-1)^{k-1}L$  のとき  $X_k(\mathbf{x})$  は  $k$  次元の核を持つ (この核は, 与えられた行列を  $X_k$  で因子化する際に有効に働く).

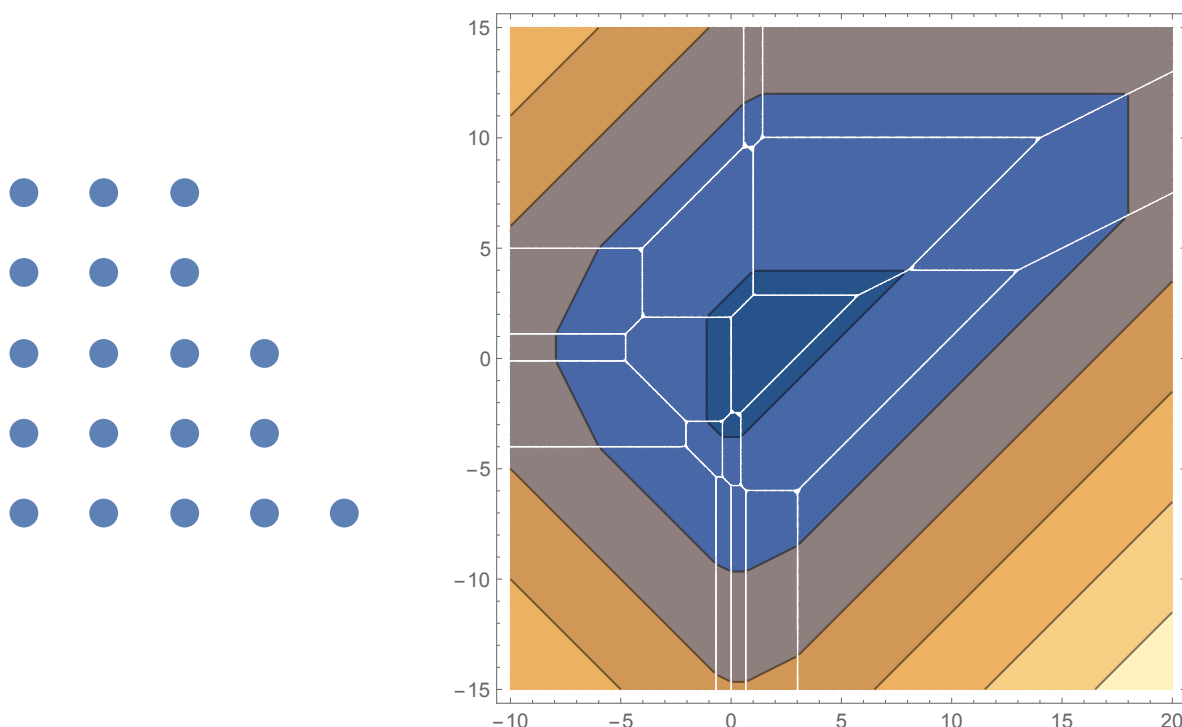
### § 4.3. 拡張した系とその対称性

対角行列と適当な個数の  $X_1, X_2, \dots, X_k$  および  $X_1^{-1}, X_2^{-1}, \dots, X_k^{-1}$  を適当な順序でかけて得られる  $\mathcal{A}(z)$  行列を考えよう. この場合にも, 対称性として次の作用

$$(\text{同種の因子の入れ替え作用}) \times (z = 0 \text{ 側の作用}) \times (z = \infty \text{ 側の作用})$$

が考えられる. 幾何的には, スペクトル曲線の外線のうち互いに平行なもの入れ替えに対応する.

**Example 4.1.**  $4 \times 4$ :  $\mathcal{A} = \text{diag}.X_3X_1X_2^{-1}$  の場合.  $z = 0$  側には  $\mathfrak{S}_4$  が<sup>7</sup>,  $z = \infty$  側には  $\mathfrak{S}_2$  が作用する (同種因子の入れ替え作用はない).



上辺の 2 本の外線および下辺の 3 本の外線 (とその上の 2 本の内線) は, 図では分離しているが実際は縮退していることに注意しよう<sup>7</sup>. 一般に因子  $X_k$  ( $k > 1$ ) はスペクトル

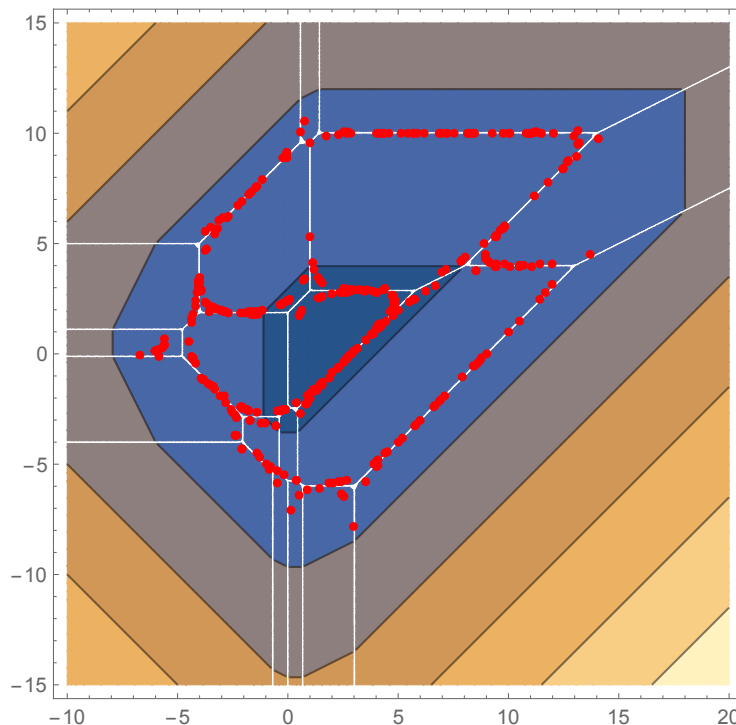
<sup>7</sup>こうした縮退は, 5-brane web あるいは Seiber-Witten 曲線の観点からも重要である ([1] など).

曲線に  $k - 1$  重の特異点を生じ、結果として種数が  $\frac{k(k-1)}{2}$  だけ下がる。この例では、

$$(4.11) \quad \text{種数} = (\text{Newton 多角形の内点の個数}) - \frac{3(3-1)}{2} - \frac{2(2-1)}{2} = 3,$$

である。実際、上記の  $\mathcal{A}(z)$  に対して適当な自励的 (等スペクトルの) 時間発展を考え、スペクトル曲線上の点 (因子) の運動としてプロットすると下の図のようになる。確かに 3 個のループが観察される。

このような離散力学系、および、その非自励化に相当するモノドロミー保存変形については、別の機会に論ずることとしたい。



謝辞. 講演の機会を与えていただいた鈴木貴雄さんをはじめ、有益なご議論をいただいた皆さんに感謝します。

## References

- [1] Bao L., Mitev V., Pomoni E., Taki M., and Yagi F., *Non-Lagrangian theories from brane junctions*. J. High Energ. Phys., (2014), 175.
- [2] Bershtein M., Gavrylenko P., and Marshakov A., *Cluster integrable systems,  $q$ -Painlevé equations and their quantization*, J. High Energ. Phys., (2018), 077.
- [3] Dzhamay, A., *Factorizations of rational matrix functions with application to discrete isomonodromic transformations and difference Painlevé equations*, J. Phys. **A42** (2009), 454008, 10 pp.
- [4] Frieden G., *Affine type A geometric crystal on the Grassmannian*, J. Combinatorial Theory, Series A **167**, (2019), 499-563.

- [5] Hirota R., and Tsujimoto S., *Conserved quantities of a class of nonlinear difference - difference equations*, J. Phys. Soc. Japan, **64**, (1995), 3125-3127.
- [6] Inoue, R., Kuniba A., and Takagi T., *Integrable structure of box-ball systems: crystal, Bethe ansatz, ultradiscretization and tropical geometry*, J. Phys. **A45**, (2012), 073001.
- [7] Inoue R., Lam T., and Pylyavskyy P., *On the cluster nature and quantization of geometric R-matrices*, to appear in Publ. RIMS (arXiv:1607.00722).
- [8] Kajiwara K., Noumi M., and Yamada Y., *Discrete dynamical systems with  $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$  symmetry*, Lett. Math. Phys. **60** (2002), 211–219.
- [9] Kajiwara K., Noumi M., and Yamada Y.,  *$q$ -Painlevé systems arising from  $q$ -KP hierarchy*, Lett. Math. Phys. **62** (2002), 259–268.
- [10] Kuniba A., Okado M., Takagi T., and Yamada Y., *Tropical R: 例と応用*, 数理解析研究所講究録 **1429**, (2005), 57-69.
- [11] Kuniba A., Okado M., and Yamada Y., *Box-ball system with reflecting end*, J. Nonlin. Math. Phys. **12** (2005), 475–507.
- [12] 国場敦夫, 「ベ-テ仮説と組合せ論」朝倉書店, (2011).
- [13] Lusztig G., *Introduction to quantum groups*, Progr. Math. **110**, Birkhäuser, (1993).
- [14] Lusztig G., *Total positivity in reductive groups*, Lie theory and geometry, 531-568, Progr. Math., **123**, Birkhäuser, (1994).
- [15] Masuda T., Ohkubo N., and Tsuda T., *Birational Weyl group actions via mutation combinatorics in cluster algebras*, 数理解析研究所講究録 **2127**.
- [16] Nagao H., and Yamada Y., *Variations of the  $q$ -Garnier system*, J.Phys. A: Math. Theor., **51** (2018), 135204–135222.
- [17] Nakayashiki A., and Yamada Y., *Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models*, Sel. math., New ser. **3**, (1997), 547-599.
- [18] Noumi N., and Yamada Y., *Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions*. in “Representation theory of algebraic groups and quantum groups”, Adv. Stud. Pure Math. **40**, (2004), 371-442.
- [19] Ohkubo N., and Suzuki T., *Generalized  $q$ -Painlevé VI systems of type  $(A_{2n+1} + A_1 + A_1)^{(1)}$  arising from cluster algebra*, arXiv:1810.03252.
- [20] Ormerod C. M., and Rains, E. M., *Commutation relations and discrete Garnier systems*, SIGMA **12** (2016), Paper No. 110.
- [21] Park, K., *A certain generalization of  $q$ -hypergeometric functions and their related monodromy preserving deformation*, J. Int. Sys. **3**, (2018), xyy019.
- [22] Park, K., *A certain generalization of  $q$ -hypergeometric functions and their related monodromy preserving deformation II*, arXiv:2005.04992[nlin.SI].
- [23] Suzuki T., *A  $q$ -analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and  $q$ -Painlevé system*, AMS Contemp. Math. **651**, (2015), 25–38.
- [24] Tokihiro T., Takahashi D., Matsukidaira J., and Satsuma J., *From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 3247-3250.
- [25] Yamada Y., *A birational representation of Weyl group, combinatorial R-matrix and discrete Toda equation*, in “Physics and combinatorics, 2000”, World Sci. Publ., (2001), 305–319.
- [26] Yamada Y.,  *$q$ -ガルニエ系の種々のラックス形式について*, 数理解析研究所講究録 **2071**, (2018), 66-77.