

(続紙 1)

京都大学	博士 (情報学)	氏名	山中翔太
論文題目	STUDIES ON OPTIMIZATION PROBLEMS WITH POSITIVELY HOMOGENEOUS FUNCTIONS AND ASSOCIATED DUALITY RESULTS (正斉次関数を含む最適化問題とその双対性に関する研究)		
(論文内容の要旨)			
<p>数理最適化において、双対性は最適値の下限や安定性などの理論的な性質を与える。また、双対問題が計算可能な関数で陽に表すことができるとき、ロバスト最適化や分枝限定法などモデル化やアルゴリズムの設計において重要な役割を果たす。最も基礎的なラグランジュ双対問題の目的関数はラグランジュ関数の最適化値として定義されるため、一般には陽に表わせない。凸最適化問題においては、フェンシユル双対問題など、特別な凸関数に対しては双対問題を陽に記述することができる。しかしながら、これまでに非凸な最適化問題に対して、陽に書ける双対問題はほとんど知られていなかった。本論文は、非負な正斉次関数で構成された非凸な最適化問題に対して、陽にかける双対問題を提案し、その双対問題とラグランジュ双対問題との等価性を示している。さらにその双対性を利用した分枝限定法を提案し、その妥当性を数値実験により明らかにしている。本論文は、以下の6章から成っている。</p> <p>第1章は序論であり、最適化問題に対する双対性に関する既存の研究成果および論文全体の構成を概説している。第2章では、本論文で用いる凸解析やアルゴリズムに関する事項をまとめている。</p> <p>第3章では、絶対値計画問題を特別な場合として含む非負な正斉次関数と線形関数で構成された最適化問題に対して、新しい形式の双対問題を提案している。問題を構成する正斉次関数の極関数が計算可能な関数で表せるとき、非凸な最適化問題であっても、この双対問題は陽に表せる。そのような例として、ノルムなどいくつかの正斉次関数を提示している。また、構成する正斉次関数の定義域が全空間であり、双対問題が実行可能解をもつときにラグランジュ双対問題と等価となることを示している。</p> <p>第4章では、第3章で考察した問題において、非負な正斉次関数を、非負な正斉次凸関数(ゲージ関数とよぶ)に限定した問題を考え、第3章で提案した双対問題の性質を調べている。特にゲージ関数の定義域が全空間でない場合でも、ラグランジュ双対問題と等価となることを証明している。また、凸最適化問題となるような特別な場合において、強双対性、最適性の必要十分条件、双対解からの最適解の導出法などを議論している。さらに、ゲージ関数を凸関数へと一般化する方法を提示している。一般の連続関数は凸関数と凸関数の差で表すことができるため、この一般化を利用することによって、第4章で得られた双対性を一般の連続最適化に対しても拡張できる。</p> <p>第5章では、非凸な絶対値計画問題に対して、第3章で与えた双対性を利用した分枝限定法を提案している。さらに、マンハッタン距離で構成された施設配置問題が絶対値計画問題として定式化できることを示している。その施設配置問題に対して、提案した分枝限定法を適用した数値実験を行い、効率的に施設配置問題を解くことができたことを報告している。</p> <p>第6章は結論であり、本論文のまとめと今後の課題を述べている。</p>			

(論文審査の結果の要旨)

本論文は、機械学習や信号処理などに現れる、特殊な構造をもつ最適化問題に対して、新しい形式の双対問題を提案し、ラグランジュ双対問題との等価性を示すとともに、その双対性を利用した分枝限定法の妥当性を数値実験により明らかにしたものであり、得られた結果は以下のとおりである。

1. ノルムなどの非負で正斉次な関数と線形関数で構成された最適化問題を考え、その新しい形式の双対問題を提案している。これはMangasarianによって提案された絶対値計画問題とその双対性の自然な一般化になっている。Mangasarianは弱双対性を示していたが、既知の双対問題との関係を明らかにしていなかった。本論文では、適当な仮定のもとで、新しい形式の双対問題がラグランジュ双対問題と本質的に等価となることを示している。また、ラグランジュ双対問題が陽に表せない非凸な最適化問題であっても、この双対問題が陽に表すことができる具体例をいくつか提示している。
2. 1. で考察した問題において、さらに構成する正斉次関数が凸関数となる場合を考えている。このような関数をゲージ関数とよぶ。1. と比べてより応用範囲の広い仮定のもとで、1. で提案した双対問題がラグランジュ双対問題と等価となることを示している。また、凸最適化問題となるように係数を非負に限定した場合に、最適性の必要十分条件導出し、さらに双対問題の最適解から元の問題の最適解を導出する方法を与えている。
3. 連続関数の多くは凸関数と凸関数の差で表すことができる。このことから、多くの最適化問題は凸関数の線形和で定式化することができる。本論文では、任意の凸関数が、変数を追加することによって、線形関数とゲージ関数の和で表すことができることを示している。さらに、一般の連続最適化問題において、2. で得られた双対性の拡張を検討している。
4. 絶対値最適化問題に対して、1. で考察した双対問題によって下界値を計算する分枝限定法を提案している。また、マンハッタン距離を用いた施設配置問題が絶対値計画問題として定式化できることを示している。その施設配置問題に対して、提案した分枝限定法の数値実験を行い、その有効性を確認している。

以上のように、本論文では、正斉次な関数によって構成された最適化問題に対して、新しい形式の双対問題を提案するとともに、その双対問題の理論的性質を解明し、その性質を利用した最適化手法を考案しており、得られた成果は学術上および応用上極めて優れている。よって、本論文は博士(情報学)の学位論文として価値あるものと認める。また、令和3年8月5日に実施した論文内容とそれに関連する内容についての試問の結果合格と認めた。また、本論文のインターネットでの全文公表についても支障がないことを確認した。