6 次元球面への有限群の odd-fixed-point action について

岡山大学大学院　自然科学研究科　田村 俊輔 (Shunsuke Tamura)
Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

1　歴史と動機

本稿では特に断らない限り，多様体は滑らかであり，多様体への有限群の作用も滑らかであると仮定する．また本稿では以下の有限群の記号を用いる．

E ：単位群

C_n ：位数 n の巡回群

D_n ：位数 n の二面体群

A_n ：n 次の交代群

S_n ：n 次の対称群

$SL(2,5)$ ：位数 5 の有限体上の 2 次の特殊線形群

$PSL(2,7)$ ：位数 7 の有限体上の 2 次の射影特殊線形群

$\widetilde{A}_6$ ：A_6 の 3 重被覆群 (IdGroup [1080,260] in GAP)

定義 1.1. 多様体 M への有限群 G の作用が **one-fixed-point action** であるとは，不動点集合 M^G がちょうど 1 点よりなる集合であるときをいう．また同様に **odd-fixed-point action** であるとは，不動点集合 M^G が奇数個の点よりなる集合であるときをいう．

定義 1.2. P と G/H が素数冪位数で H/P が巡回群であるような正規列 $P \triangleleft H \triangleleft G$ をもつ有限群 G を **mod $\mathcal{P}$-hyper elementary 群**という．逆に，mod $\mathcal{P}$-hyper elementary 群でない有限群を **Oliver 群**という．

Oliver 群については次のような結果が知られている．

命題 1.1. ([6, Theorem A]) *ある次元の球面への有限群 G の one-fixed-point action が存在することの必要かつ十分な条件は有限群 G が Oliver 群であることである．*

低次元の球面への有限群の one-fixed-point action の結果として，以下の結果が知られている．

1977 年　[11, E. Stein] 7 次元球面 S^7 への $SL(2,5)$ の one-fixed-point action が存在する．

1988 年　[8, 9, M. Morimoto] 6 次元球面 S^6 への A_5 の one-fixed-point action が存在する．

1989 年　[5, M. Furuta] 4 次元のホモトピー球面は有限群の向きづけを保つ one-fixed-point action を許容しない．

1989 年　[4, S. Demichelis] 4 次元のホモロジー球面は有限群の one-fixed-point actoin を許容しない．

1990 年　[3, N. P. Buchdahl–S. Kwasik–R. Schultz] 5 次元以下の球面は有限群の one-fixed-point action を許容しない．

2016 年　[1, A. Borowiecka] 8 次元のホモロジー球面は $SL(2,5)$ の効果的な one-fixed-point action を許容しない．

2018 年 [2, A. Borowiecka–P. Mizerka] 位数 216 以下の Oliver 群 G と次元が 6 から 17 のある球面 S に対して，S が G の効果的な one-fixed-action を許容しない組 (G, S) の例を列挙した．

特に，[3, N. P. Buchdahl–S. Kwasik–R. Schultz] と [8, 9, M. Morimoto] の結果より，ある有限群の one-fixed-point action を許容するような球面の最低次元は 6 次元であることがわかる．

定義 1.3. 非負整数 n に対して，多様体 M への有限群 G の作用が n**-pseudofree** であるとは，任意の非自明な G の部分群 H に対して，$\dim M^H \leq n$ が成立するときをいう．

1986 年に E. Laitinen–P. Traczyk は次の定理を証明した．

定理 1.2. ([7, Theorem 1.]) $\mathcal{S}$ を有限群 G の作用をもつ 5 次元以上のあるホモトピー球面とする．ある不動点 x 上の接空間加群 $T_x(\mathcal{S})$ への G の作用は 2-*pseudofree* であると仮定する．このとき，以下が成立する．

- $|\mathcal{S}^G| \geq 2$ であるならば，$\mathcal{S}$ は単位球面 $S(\mathbb{R} \oplus T_x(\mathcal{S}))$ と G-位相同型である．
- $|\mathcal{S}^G| = 1$ であるならば，G は A_5 と同型であり，$\mathcal{S}$ は 6 次元球面 S^6 と G-微分同相である．

最近，M. Morimoto は E. Laitinen–P. Traczyk の結果を応用した次の結果を証明した．

定理 1.3. ([10, Theorem 1.3. (1)]) $\mathcal{S}$ を G-作用をもつ 6 次元以上偶数次元のホモトピー球面とする．ある不動点 x 上の接空間加群 $T_x(\mathcal{S})$ への G の作用は 3-*pseudofree* であると仮定する．このとき，以下が成立する．

- $|\mathcal{S}^G| \geq 2$ であるならば，$\mathcal{S}^G$ はある 3 次元以下の $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面である．
- $\mathcal{S}$ への G の *one-fixed-point action* が存在するための必要かつ十分な条件は G が A_5, $A_5 \times C_2$, S_5 のいずれかと同型であり，$\mathcal{S}$ が 6 次元球面 S^6 と G-微分同相であることである．

本稿の主結果は，G が一般線形群 $GL(3, \mathbb{C})$ の有限部分群である場合も，6 次元球面への one-fixed-poit action を許容する有限群は A_5，$A_5 \times C_2$，S_5 に限るという以下の定理である．

定理 1.4. 6 次元のホモロジー球面は如何なる有限可解群の *odd-fixed-point action* も許容しない．

定理 1.5. G を一般線形群 $GL(3, \mathbb{C})$ の有限部分群とする．このとき，6 次元ホモロジー球面が G の効果的な *odd-fixed-point action* を許容するならば，G は A_5, $A_5 \times C_2$, S_5 のいずれかと同型であり，その作用は *one-fixed-point action* でなければならない．

有限群 H と K に対して，ある群の準同型の完全系列

$$E \to H \to G \to K \to E$$

が存在するとき，議論に支障がない場合には G を $H \star K$ で表すことにする．

G を一般線形群 $GL(3, \mathbb{C})$ の非可解な有限部分群とする．このとき，[12] による $GL(3, \mathbb{C})$ の有限部分群の分類を用いると，G は次のいずれかの有限群と同型である．

- $A_5 \star F$
- $SL(2, 5) \star F$
- $PSL(2, 7) \star F$
- $\widetilde{A}_6 \star F$

ここで，F はある有限群を表す．

2　定理 1.4 の証明の概要

この節では，G は有限群，Σ は効果的な G の作用をもつ 6 次元のホモロジー球面とする．

有限群 G の唯一の極大冪零正規部分群を G の Fitting 部分群と呼び，F_G で表す．G が可解群の場合，Fitting 部分群 F_G に着目することで Σ が有限可解群の odd-fixed-point action を許容しないことが証明をされる．また，G が可解群であるならば，F_G は非自明である．

Σ への G の作用が orientation preserving でないとする．このとき，

$$L = \{\, g \in G \mid g : \Sigma \to \Sigma \ : \text{orientation preserving} \,\}$$

は G の指数 2 の部分群である．

補題 2.1. Σ への G の *odd-fixed-point action* が存在するならば，以下の 2 つが成立する．

(1) オイラー標数 $\chi(\Sigma^L)$ は奇数である．

(2) ある $x \in \Sigma^G$ であり，$\dim T_x(\Sigma)^L = 0$ となるものが存在する．

補題 2.1 より，G の Σ への odd-fixed-point action が存在しないことを示すためには，G の Σ への orientation preserving かつ $\chi(\Sigma^G)$ が奇数になるような作用が存在しないことを示せば良いことがわかる．

以下，G は可解であるとする．

補題 2.2. Σ への G の作用は *orientation preserving* であり，オイラー標数 $\chi(\Sigma^G)$ は奇数であるとする．このとき，F_G は巡回群でなければならない．

補題 2.3. Σ への G の作用は *orientation preserving* であり，オイラー標数 $\chi(\Sigma^G)$ は奇数であるとする．もし G/F_G が p-正規部分群 P をもつならば，P は C_2 に同型でなければならない．さらに，G は巡回群であるか二面体群でなければならない．

次の命題が有限可解群が 6 次元のホモロジー球面に odd-fixed-point action が許容しないことを結論づける．

命題 2.4. G は巡回群であるか二面体群であるとし，$\mathcal{S}$ を G の作用をもつホモロジー球面とする．このとき，オイラー標数 $\chi(\mathcal{S}^G)$ は偶数である．

3　定理 1.5 の証明の概要

この節では，G は有限群，Σ は効果的な G の作用をもつ 6 次元のホモロジー球面とする．

命題 3.1，命題 3.2，命題 3.4，命題 3.5 と系 3.6 から定理 1.5 の結果を得ることができる．

$SL(2,5)$，$\widetilde{A}_6$ は位数 2，3 の中心 Z をそれぞれもつ．また，表 1，表 2 には $SL(2,5)$，$\widetilde{A}_6$ の全ての非自明な実既約加群 V_* と中心 Z での不動点集合の次元 $\dim V_*^Z$ が記載されている．

命題 3.1. F を有限群，$G = SL(2,5) \star F$ とする．もし Σ^G が空でないならば，Σ^G は 2 次元以下の球面である．

Proof. ある不動点上の接空間加群を V とすると，V の $SL(2,5)$ への制限はある忠実な 6 次元の実 $SL(2,5)$-加群である．表 1 によると，$\dim V^Z = 2$ でなければならないことがわかる．Smith の定理より，Σ^Z は G/Z の作用をもつ 2 次元球面である．したがって，$\Sigma^G = (\Sigma^Z)^{G/Z}$ は 2 次元以下の球面である．□

命題 3.2. F を有限群，$G = \widetilde{A}_6 \star F$ とする．もし Σ^G が空でないならば，Σ^G はちょうど 2 点よりなる集合である．

Proof. ある不動点上の接空間加群を V とすると，V の $\widetilde{A}_6$ への制限はある忠実な 6 次元の実 $\widetilde{A}_6$-加群である．表 2 によると，$\dim V^Z = 0$ でなければならないことがわかる．Smith の定理より，Σ^Z はちょうど 2 点よりなる集合であり，G/Z の作用をもつ．したがって，$\Sigma^G = (\Sigma^Z)^{G/Z}$ もちょうど 2 点よりなる集合である． □

実 G-加群 V が $V^G = \{0\}$ を満たすとき **free** であるという．

補題 3.3. G を *Oliver* 群，V を *free* な実 G-加群，$\mathcal{S}$ を G が作用するホモロジー球面とする．G の部分群の 3 つ組 (H, K, P_2) で次の 3 つの条件を満たすものが存在すると仮定する．

- H と K は *mod* $\mathcal{P}$*-hyper elementary* 群である．
- P_2 は $H \cap K$ に含まれる 2-群であり，H と K は G を生成する．
- $\dim V^H + \dim V^K = \dim V^{P_2}$.

もし $\mathcal{S}$ への G の *one-fixed-point action* が存在するならば，その唯一の不動点上の接空間加群は V と同型ではない．

表 3 は $PSL(2,7)$ の全ての　非自明な実既約加群 V_* といくらかの部分群 H の不動点集合の次元 $\dim W_*^H$ を表している．ただし，$\mathfrak{S}_4$ は S_4 と同型であるが，共役ではない $PSL(2,7)$ のある部分群である．また，全ての 6 次元の $PSL(2,7)$ の実既約加群と部分群の 3 つ組 $(S_4, \mathfrak{S}_4, D_8)$ に対して，これらの実表現と部分群の 3 組は補題 3.3 の条件を満たす.

命題 3.4. F を有限群，$G = PSL(2,7) \star F$ とする．もし Σ^G が空でないならば，Σ^G はちょうど 2 点よりなる集合である．

Proof. ある不動点上の接空間加群を V とすると，V の $PSL(2,7)$ への制限はある 6 次元の実既約加群である．表 3 によると，$\dim V^{C_7} = 0$ であるので，Σ^{C_7} はちょうど 2 点よりなる集合である (Smith の定理)．したがって，$\Sigma^{PSL(2,7)}$ はちょうど 1 点よりなる集合であるかちょうど 2 点よりなる集合であるかのいずれかである．補題 3.3 によると，$\Sigma^{PSL(2,7)}$ はちょうど 1 点よりなる集合にはならないことがわかる．よって，Σ^G はちょうど 2 点よりなる集合である． □

表 4 は A_5 の全ての非自明な実既約表現 U_* と全ての部分群の共役類の代表系による不動点の次元を表した表である．この表を用いることにより，以下の結果を証明することができる．

命題 3.5. F を有限群，$G = A_5 \star F$ とする．Σ への G の *orientation preserving* な *odd-fixed-point action* が存在するならば，G は A_5 と同型であり，その作用は *one-fixed-point action* である．

系 3.6. F を有限群，$G = A_5 \star F$ とする．Σ への G の *orientation preserving* ではない *odd-fixed-point action* が存在するならば，G は A_5 と同型であり，その作用は *one-fixed-point action* である．

	E	Z	$SL(2,5)$
$V_{3.1}$	3	3	0
$V_{3.2}$	3	3	0
$V_{4.1}$	4	0	0
$V_{4.2}$	4	0	0
$V_{4.3}$	4	4	0
V_5	5	5	0
V_8	8	0	0
V_{12}	12	0	0

表 1:

	E	Z	$\widetilde{A}_6$		E	Z	$\widetilde{A}_6$
$V_{5.1}$	5	5	0	V_9	9	9	0
$V_{5.2}$	5	5	0	V_{10}	10	10	0
$V_{6.1}$	6	0	0	$V_{12.1}$	12	0	0
$V_{6.2}$	6	0	0	$V_{12.2}$	12	0	0
$V_{6.3}$	6	0	0	$V_{18.1}$	18	0	0
$V_{6.4}$	6	0	0	$V_{18.2}$	18	0	0
$V_{8.1}$	8	8	0	$V_{30.1}$	30	0	0
$V_{8.2}$	8	8	0	$V_{30.2}$	30	0	0

表 2:

	E	C_7	D_8	S_4	$\mathfrak{S}_4$	$PSL(2,7)$
$W_{6.1}$	6	0	0	0	0	0
$W_{6.2}$	6	0	0	0	0	0
$W_{6.3}$	6	0	2	1	1	0
W_7	7	1	0	0	0	0
W_8	8	2	1	0	0	0

表 3:

	E	C_2	C_3	C_5	D_4	D_6	D_{10}	A_4	A_5
$U_{3.1}$	3	1	1	1	0	0	0	0	0
$U_{3.2}$	3	1	1	1	0	0	0	0	0
U_4	4	2	2	0	1	1	0	1	0
U_5	5	3	1	1	2	1	1	0	0

表 4:

References

[1] A. Borowiecka: *$SL(2,5)$ has no smooth effective one-fixed-point action on S^8*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **64** (2016), 85–94.

[2] A. Borowiecka and P. Mizerka: *Nonexistence of smooth effective one*

fixed point actions of finite Oliver groups on low-dimensional spheres, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **68** (2018), 167—177.

[3] N. P. Buchdahl, S. Kwasik and R. Schultz: *One fixed point action on low-dimensional spheres*, Invent. Math. **102** (1990), 633–662.

[4] S. Demichelis: *The fixed point set of a finite group action on a homology four sphere*, Enseign. Math. **35** (1989), 107–116.

[5] M. Furuta: *A remark on a fixed point of finite group actions on* S^4, Topology **28** (1989), 35–38.

[6] E. Laitinen and M. Morimoto: *Finite groups with smooth one fixed point actions on spheres*, Forum Math. **10** (1998), 479–520.

[7] E. Laitinen and P. Traczyk: *Pseudofree representations and 2-pseudofree actions on spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 151—157.

[8] M. Morimoto: *Most of the standard spheres have one fixed point actions of* A_5, in: Transformation Groups, K. Kawakubo(ed.), Lecture Notes in Mathmatics **1375** (1989), 240–259, Springer-Serlag, Berlin-Heidelberg.

[9] M. Morimoto: *Most of the standard spheres have one fixed point actions of* A_5*. II*, *K*-Thoery **4** (1991), 289–302.

[10] M. Morimoto: *Construction of one-fixed-point actions on spheres of nonsolvable groups*, preprint.

[11] E. Stein: *Surgery on products with finite fundamental group*, Topology **16** (1977), 473–493.

[12] Stephen S.–T. Yau and Y. Yu: *Gorenstein quotient singularities in dimension three*, Memoirs Amer. Math.Soc., 105, Amer. Math. Soc., 1993.68.