

階段式魚道型水路における不安定波動の発生に関する2, 3の検討

大八木美由起*・細田 尚**・音田慎一郎**

* 電源開発株式会社

** 京都大学大学院工学研究科

要 旨

階段式魚道型水路では、流下方向にのみ水面が振動する1次元的な波が発生する場合と水路横断方向にねじれを伴った2次元的な波が発生する場合があることが知られている。しかし、水面振動発生メカニズムについては十分に解明されていないものと考えられる。本研究では、隔壁上層と隔壁下層の流体の交換速度を仮定した簡易モデルを用い、不安定波動の発生機構について理論的に考察した。また、水理模型実験を行い、水面振動特性について実験結果と比較することでモデルの検証を行った。

キーワード：階段式魚道型水路、不安定波、開水路流れ

1. はじめに

階段式魚道型水路では、既存の研究より、水理条件によって流下方向にのみ水面が振動する1次元的な波が発生する場合と水路横断方向にねじれを伴った2次元的な波が発生する場合があることが知られている（中村，1995）。従って、施工の際には、こうした振動を抑制するために、波が発生しない隔壁間隔で設計する、或いは隔壁天端に切り欠きを設けるなどの対策が行われてきた。しかし、振動が生じる水理条件、水面振動発生メカニズム、及び波が発生した場合の水理特性については十分に解明されていないものと考えられる。

そこで本研究では、階段式魚道型水路における不安定波の発生機構、振動特性について考察することを目的とする。まず、階段式魚道型水路を模擬した水理模型実験を行い、非定常水面振動が発生することを確認するとともに、水面の振動特性について考察する。次に、隔壁上層と隔壁下層の流体の交換速度を仮定した簡易モデルを示す。水面振動特性について実験結果と理論解析を比較することでモデルの検証を行う。

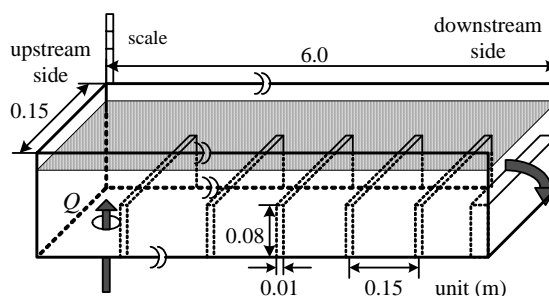


Fig. 1 Experimental setup

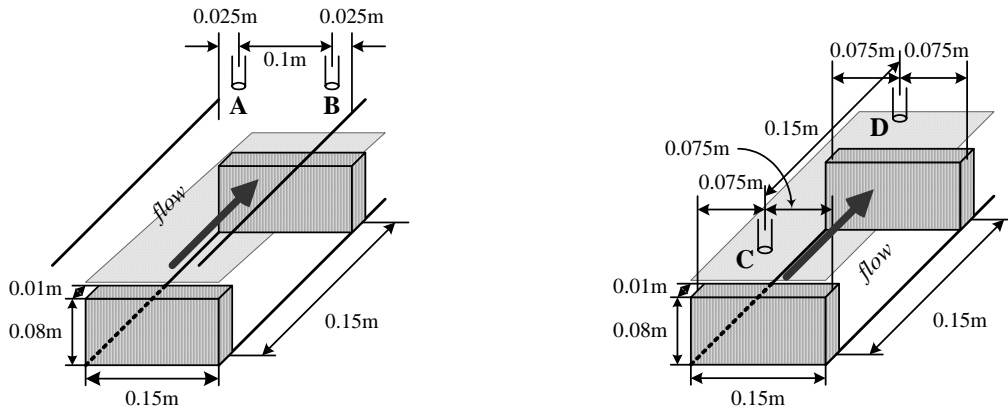
2. 階段式魚道型水路における水理模型実験

2.1 水理実験の概要

総長6m、水路幅0.15mの直線水路に、高さ0.08m、幅0.15m、長さ0.01mの隔壁を一定間隔に設置し、階段式魚道型水路（Fig. 1参照）とした。水路はジャッキを用いて可変勾配となっており、一定水頭に調整された高水槽から一定流量を給水した。実験条件をTable 1に示す。表中の流速 U_0 は、超音波変位センサーによって計測された越流水深の時系列から平均越流水深 h_0 を算出して隔壁越流部の平均断面積 A_0 を求め、流量 Q_0 を A_0 で除することにより算出した。また、フルード数 Fr_0 は平均流速 U_0 と平均水深 h_0 から求めた。

Table 1 Hydraulic conditions of experiments

	slope	Q_0 (cm ³ /s)	h_0 (cm)	U_0 (cm/s)	Fr_0
Run1	1/50	102.38	0.354	19.28	1.04
Run2	1/50	202.78	0.485	27.87	1.28



(a) Measurement points A and B in the lateral direction (b) Measurement points C and D in the longitudinal direction

Fig. 2 Set up for displacement sensors

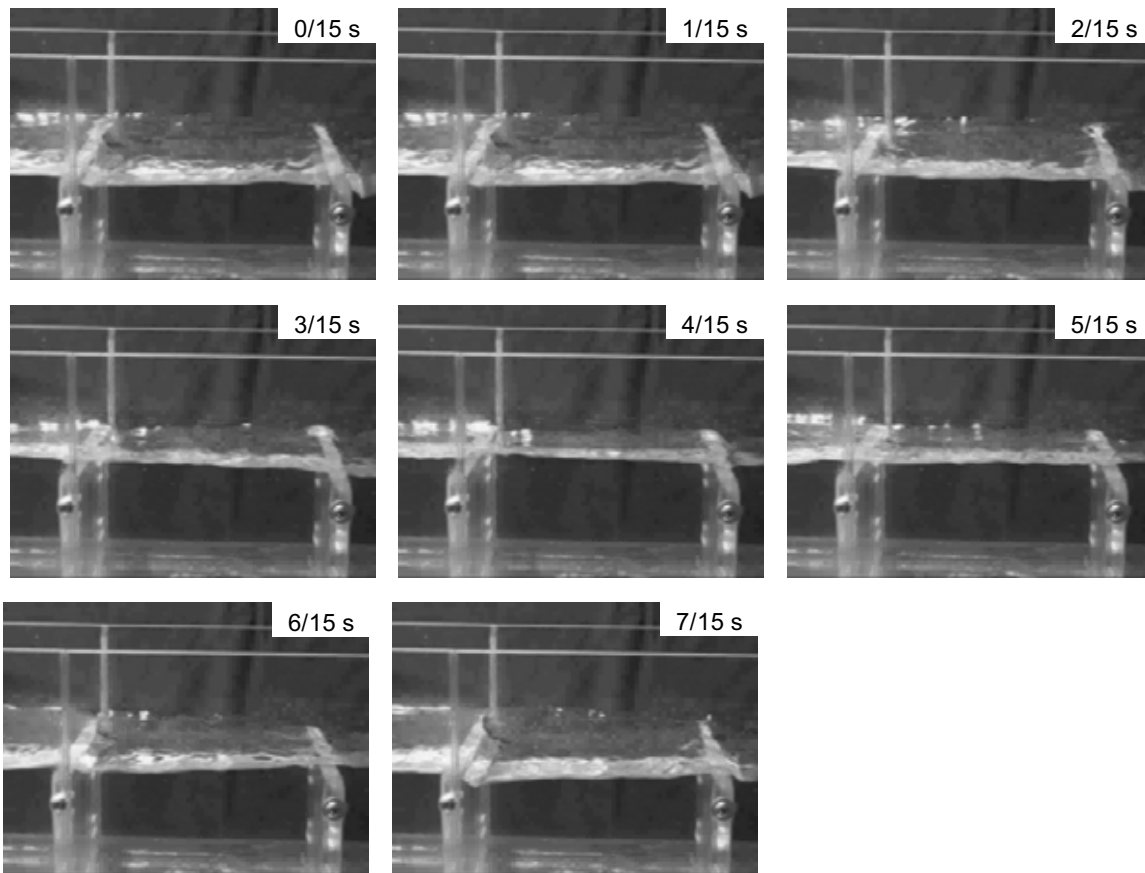


Fig. 3 Side view of flow patterns (Run1)

水面変動の観察にはデジタルビデオカメラを用い、水面振動の計測には超音波変位センサー（キーエンス製）を用いた。Fig. 2に超音波変位センサーの設置位置を示す。まず、水面振動が1次元的であるか2次

元的であるかを確認するために、水路横断方向に関してセンサーを対称に設置し、同時計測を行った。次に、波速などの水理特性を測定するために、水路中央、流下方向に0.15m離して設置し、同時計測を行

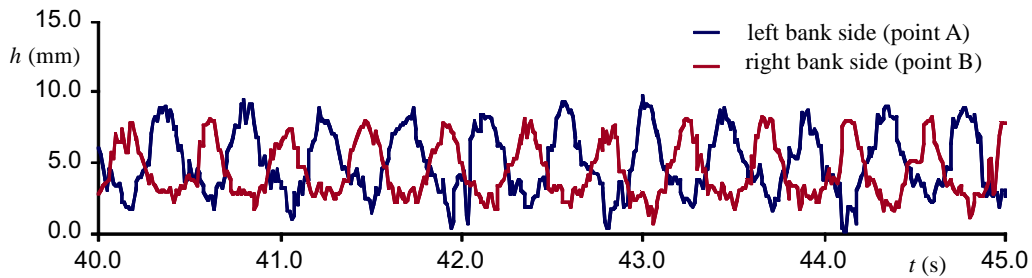


Fig. 4 Temporal variations of water depth in the transversal direction (Run1)

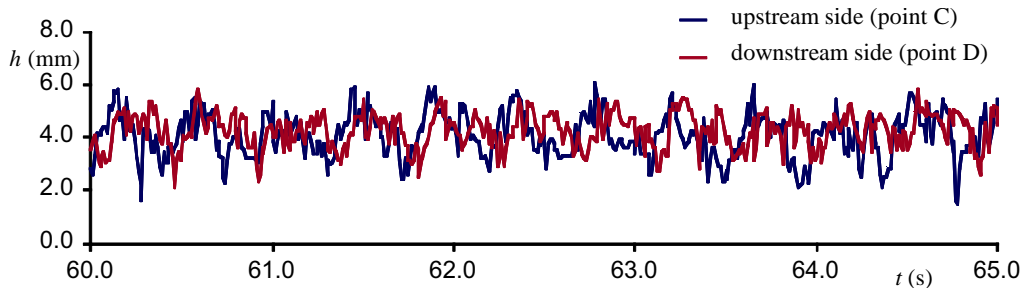


Fig. 5 Temporal variations of water depth in the longitudinal direction (Run1)

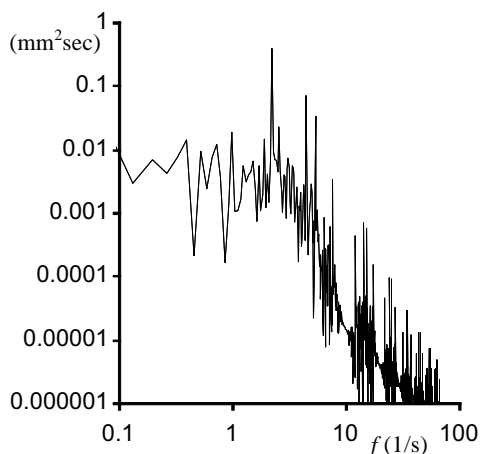


Fig. 6 Spectrum in Run1

った。データの収集条件は、時間間隔0.01s (10mms), サンプル数15000である。流下方向にx軸, 流下方向に対して垂直な方向をy軸として, 水路中央を原点とした。また, 鉛直方向z軸については, 隔壁上部を原点とした。

2.2 水面振動に関する観測結果

Run1における流れの観測結果をFig. 3に示す。図をみると流下方向2つのプールで1波長となる水面振動に水路幅半波長のねじれを伴った2次元的水面振動が発生していることがわかる。また, 目視観察によると, 振動波の振幅は下流端付近で一番大きく, 上流に向かって減衰するという特徴が観察された。

Run2におけるビデオ画像については省略するが, 流量を増加させるにつれて2次元的水面振動から1次元

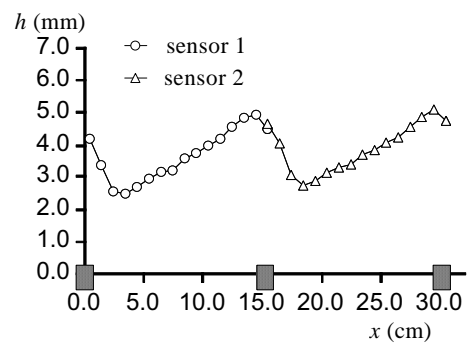


Fig. 7 Distribution of averaged water depth in longitudinal direction (Run1)

な波へ遷移する様子が観察された。しかし, 下流部で若干ねじれが見られたため, 1次元的水面振動と2次元的水面振動が混在していると考えられる。

2.3 水面振動に関する計測結果

Run1における横断方向の同時計測結果, 流下方向の同時計測結果をFigs. 4, 5に示す。いずれの結果も隔壁上部で計測した結果である。Fig. 4をみると右岸側と左岸側の振動が逆位相となっており, ねじれが見られ, 2次元的水面振動を示している。また, 卓越周期は約0.4秒であることがわかる。一方, Fig. 5の流下方向の同時計測結果をみると, 波速の値を明確に求めることは困難であるが, 上流側と下流側との振動のピークのズレ時間が約0.1秒から0.2秒であることから, 振動波の波速は0.75m/sから1.5m/sと考えられる。Fig. 5においても水路横断方向の同時計測結果と同様, 約0.4秒の周期が多く見られる。しかし,

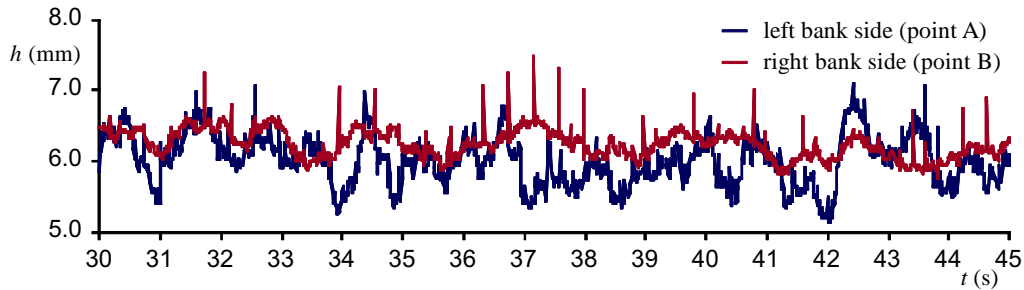


Fig. 8 Temporal variations of water depth in the transversal direction (Run2)

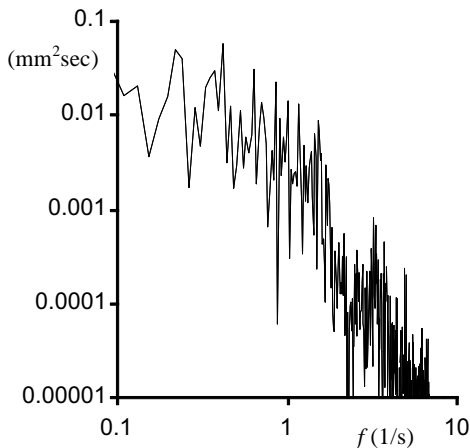


Fig. 9 Spectrum in Run2

より長周期，短周期の波の存在も確認されるので，時間刻み0.01秒ごとのデータの移動平均をとり，0.1秒ごとのデータに変換し，15秒分のデータよりスペクトル解析を行った。結果をFig. 6に示す。図をみると振動数2.27(Hz) (周期0.44秒) の位置にスペクトルピークが存在し，横断方向同時計測の時系列データで見られた約0.4秒の周期が卓越している。また，より低周波側 (振動数1.0(Hz), 周期1.0秒)，高周波側 (振動数4.53(Hz), 周期0.22秒) にもスペクトルピークが存在し，長周期，短周期の波が混在していると考えられる。Fig. 7に水路中央，流下方向0.3m (プール2つ分) における平均水深の流下方向分布を示す。平均水深分布の特徴として隔壁を越流直後に減少し，プール部を流下するにしたがって上昇，下流側隔壁直前で減少するという傾向が確認される。

一方，Run2における横断方向の同時計測結果をFig. 8に示す。図をみるとほぼ同位相を示しているが，所々で逆位相となっている箇所があり，ビデオ画像で見られたねじれが横断方向計測からも確認される。また，約1秒の周期と2秒から3秒の長い周期の水面変動が見られるため，前述のケースと同様，移動平均を用いて時間刻み0.1秒ごとのデータに変換し，45秒分のデータよりスペクトル解析を行い，卓越周期を求めた。結果をFig. 9に示す。図をみると，振動数

0.87(Hz) (周期1.15秒)，振動数0.42(Hz) (周期2.38秒) 及び振動数0.22(Hz) (周期4.50秒) の位置にスペクトルピークが存在しており，横断方向計測結果で見られた周期とほぼ同じ周期を示していることがわかる。平均水深分布については，Run1と同様な特徴を示していた。

3. 不安定波発生に関する理論的考察

3.1 基礎式

1次元不安定波の発生に関する理論的考察は，2次元不安定波の理論から得られるため，ここでは2次元不安定波の発生について理論的に説明する。Fig. 10を参照し，流れを単純に隔壁上の表層流とプール部の2つに分けて考える。上層と下層の流体交換を交換速度 Ve を用いて表せば，上層流の連続式と運動方程式は下記のようなになる。

[連続式]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = Ve \quad (1)$$

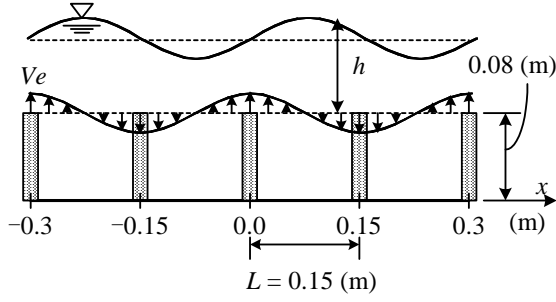
[運動方程式]

$$\begin{aligned} \frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + \frac{\partial vuh}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} \\ = gh \sin \theta - c_f u \sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned} \quad (2)$$

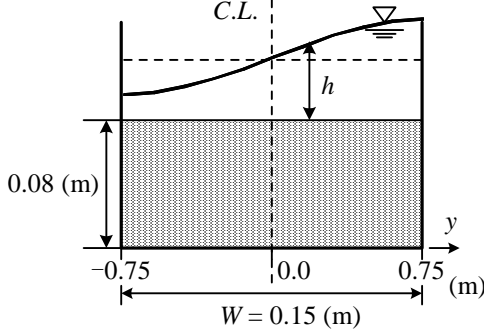
$$\begin{aligned} \frac{\partial vh}{\partial t} + \frac{\partial uvh}{\partial x} + \frac{\partial v^2 h}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} \\ = -c_f v \sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに， h ：上層流の水深， u ： x 方向流速， v ： y 方向流速， θ ：水路勾配， c_f ：摩擦係数， Ve ：上層と下層の連行速度， g ：重力加速度を表す。

運動方程式(2)，(3)を流速表示に書き換えると式(4)，(5)となる。



(a) Mode in the longitudinal direction ($\beta = \pi h_0/L, m = 1$)



(b) Mode in the transversal direction ($\gamma = \pi h_0/W$)

Fig. 10 Concept of theoretical analysis

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} \\ = g \sin \theta - c_f \frac{u}{h} \sqrt{u^2 + v^2} - \frac{u}{h} V_e \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} \\ = -c_f \frac{v}{h} \sqrt{u^2 + v^2} - \frac{v}{h} V_e \end{aligned} \quad (5)$$

3.2 線形方程式

一様水深と一様流速からの偏差

$$h' = h - h_0, u' = u - U_0, v' = v - V_0 \quad (6)$$

を考え、偏差が微小と仮定して基礎式系(1), (4), (5)を線形化する。式(6)を式(1), (4), (5)に代入して、整理すると次式となる。

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + h_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + h_0 \frac{\partial v'}{\partial y} = V_e \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial x} \\ = -c_f \left(\frac{2U_0 u'}{h_0} - \frac{U_0^2}{h_0^2} h' \right) - \frac{U_0}{h_0} V_e \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial y} = -c_f \frac{U_0 v'}{h_0} \quad (9)$$

ここに、以下の等流の条件式を用いている。

$$g \sin \theta - c_f \frac{U_0^2}{h_0} = 0 \quad (10)$$

次に式(7), (8), (9)から u' , v' を消去して、 h' のみの関係式を求めると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} h_0 U_0 (g h_0 - U_0^2) \frac{\partial^3 h'}{\partial x^3} + h_0 (g h_0 - 3U_0^2) \frac{\partial^3 h'}{\partial t \partial x^2} \\ - 3h_0 U_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial t^2 \partial x} - h_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial t^3} + g h_0^2 \frac{\partial^3 h'}{\partial t \partial y^2} + g h_0^2 U_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial x \partial y^2} \\ + \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \{ -3c_f U_0^3 + c_f U_0 (g h_0 - U_0^2) \} \\ + \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \{ -5c_f U_0^2 - 2c_f U_0^2 \} \\ + \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \{ -2c_f U_0 - c_f U_0 \} + \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} \{ c_f g h_0 U_0 + c_f g h_0 U_0 \} \\ + \frac{\partial h'}{\partial t} \left(-2c_f^2 U_0 \frac{U_0}{h} \right) + \frac{\partial h'}{\partial x} \left(-3c_f^2 \frac{U_0^3}{h_0} \right) \\ + h_0 \frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2} + 3U_0 h_0 \frac{\partial^2 V_e}{\partial x \partial t} \\ + 2U_0^2 h_0 \frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} + \frac{\partial V_e}{\partial t} (2c_f U_0 + c_f U_0) \\ + \frac{\partial V_e}{\partial x} (2c_f U_0^2 + 2c_f U_0^2) + 2c_f^2 \frac{U_0^2}{h_0} V_e = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)を無次元変数

$$\tilde{h}' = \frac{h'}{h_0}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{h_0}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{h_0}, \quad \tilde{t} = \frac{t U_0}{h_0}, \quad \tilde{V}_e = \frac{V_e}{U_0}$$

を用いて無次元化すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{\partial^3 \tilde{h}'}{\partial \tilde{x}^3} + \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 3 \right) \frac{\partial^3 \tilde{h}'}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{x}^2} \\ - 3 \frac{\partial^3 \tilde{h}'}{\partial \tilde{t}^2 \partial \tilde{x}} - \frac{\partial^3 \tilde{h}'}{\partial \tilde{t}^3} + \frac{1}{Fr_0^2} \frac{\partial^3 \tilde{h}'}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{y}^2} \\ + \frac{1}{Fr_0^2} \frac{\partial^3 \tilde{h}'}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{h}'}{\partial \tilde{x}^2} c_f \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 4 \right) - \frac{\partial^2 \tilde{h}'}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} 7c_f \\ - \frac{\partial^2 \tilde{h}'}{\partial \tilde{t}^2} 3c_f + \frac{\partial^2 \tilde{h}'}{\partial \tilde{y}^2} 2c_f \frac{1}{Fr_0^2} - \frac{\partial \tilde{h}'}{\partial \tilde{t}} 2c_f^2 - \frac{\partial \tilde{h}'}{\partial \tilde{x}} 3c_f^2 \\ + \frac{\partial^2 \tilde{V}_e}{\partial \tilde{t}^2} + 3 \frac{\partial^2 \tilde{V}_e}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{V}_e}{\partial \tilde{x}^2} \\ + 3c_f \frac{\partial \tilde{V}_e}{\partial \tilde{t}} + 4c_f \frac{\partial \tilde{V}_e}{\partial \tilde{x}} + 2c_f^2 \tilde{V}_e = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、 $Fr_0 \equiv U_0 / \sqrt{g h_0}$ である。

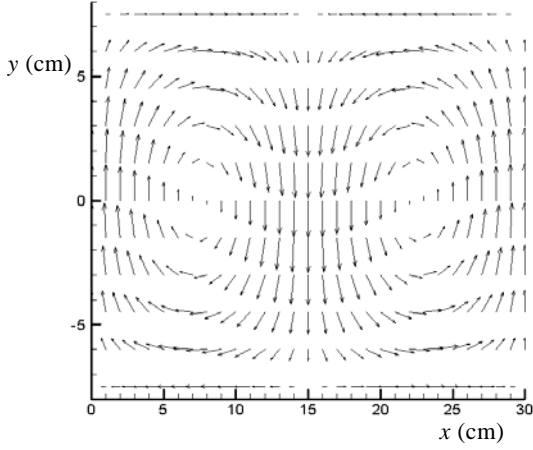


Fig. 11 Flow pattern in horizontal plane in two adjacent pools ($m = 1$)

3.3 線形解の誘導

水深の変動量 h' と強制振動 $\tilde{V}e$ を

$$\begin{aligned} \tilde{h}' &= A \cos(\tilde{\omega}t) \cos\left(\frac{1}{m}\beta\tilde{x}\right) \sin(\gamma\tilde{y}) \\ &+ B \cos(\tilde{\omega}t) \sin\left(\frac{1}{m}\beta\tilde{x}\right) \sin(\gamma\tilde{y}) \\ &+ C \sin(\tilde{\omega}t) \cos\left(\frac{1}{m}\beta\tilde{x}\right) \sin(\gamma\tilde{y}) \\ &+ D \sin(\tilde{\omega}t) \sin\left(\frac{1}{m}\beta\tilde{x}\right) \sin(\gamma\tilde{y}) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\tilde{V}e = K \cos(\tilde{\omega}t) \cos\left(\frac{1}{m}\beta\tilde{x}\right) \sin(\gamma\tilde{y}) \quad (14)$$

と仮定する。

ここに、 $\beta = \pi h_0/L$, $\gamma = \pi h_0/W$, $\tilde{\omega} = h_0\omega/U_0$, m : 任意の実数, L : 隔壁の間隔, W : 水路幅である。式(13)は非定常定在波の一般的な表示である。また、式(14)で表される交換速度はFig. 11に示されるプール内の平面流況に対応している。

ここで、交換速度 $\tilde{V}e$ を何らかの水理量で表現することは容易でないため、本研究では、上層と下層間に式(14)で表されるような強制的な交換が存在する場において、上層にどのような水面振動が生じるかを考察する。式(14)中、流下方向変動の関数に余弦関数を用いているのは、隔壁位置で下層プール内流体の流下方向流速が0となる条件を考慮したためである。また、水路横断方向変動の関数に正弦関数を用いているのは、側壁で水路横断方向流速が0となる条件を考慮したためである。 β の表示は、 m によって変更可能であるが、基本形は、1つのプール長さが半波長の波に対応している。 γ の表示は水路幅が半波長の波に対応している。

式(13)及び式(14)を式(12)に代入し、 $\cos(\tilde{\omega}t)$ $\cos(\beta\tilde{x}/m)\sin(\gamma\tilde{y})$ などの係数を0とおくと次式のような関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} &\cos(\tilde{\omega}t) \cos\left(\frac{\beta}{m}\tilde{x}\right) \sin(\gamma\tilde{y}); \\ &-\left(\frac{1}{Fr_0^2}-1\right)\frac{\beta^3}{m^3}B - \left(\frac{1}{Fr_0^2}-3\right)\frac{\beta^2}{m^2}\tilde{\omega}C + 3\frac{\beta}{m}\tilde{\omega}^2B \\ &+ \tilde{\omega}^3C - \frac{1}{Fr_0^2}\gamma^2\tilde{\omega}C - \frac{1}{Fr_0^2}\gamma^2\frac{\beta}{m}B \\ &-c_f\left(\frac{1}{Fr_0^2}-4\right)\frac{\beta^2}{m^2}A - 7c_f\frac{\beta}{m}\tilde{\omega}D + 3c_f\tilde{\omega}^2A \\ &-\frac{1}{Fr_0^2}2c_f\gamma^2A - 2c_f^2\tilde{\omega}C - 3c_f^2\frac{\beta}{m}B \\ &-K\tilde{\omega}^2 - 2K\frac{\beta^2}{m^2} + 2c_f^2K = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &\cos(\tilde{\omega}t) \sin\left(\frac{\beta}{m}\tilde{x}\right) \sin(\gamma\tilde{y}); \\ &\left(\frac{1}{Fr_0^2}-1\right)\frac{\beta^3}{m^3}A - \left(\frac{1}{Fr_0^2}-3\right)\frac{\beta^2}{m^2}\tilde{\omega}D - 3\frac{\beta}{m}\tilde{\omega}^2A \\ &+ \tilde{\omega}^3D - \frac{1}{Fr_0^2}\gamma^2\tilde{\omega}D + \frac{1}{Fr_0^2}\gamma^2\frac{\beta}{m}A \\ &-c_f\left(\frac{1}{Fr_0^2}-4\right)\frac{\beta^2}{m^2}B + 7c_f\frac{\beta}{m}\tilde{\omega}C + 3c_f\tilde{\omega}^2B \\ &-\frac{1}{Fr_0^2}2c_f\gamma^2B - 2c_f^2\tilde{\omega}D + 3c_f^2\frac{\beta}{m}A - 4c_fK\frac{\beta}{m} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\sin(\tilde{\omega}t) \cos\left(\frac{\beta}{m}\tilde{x}\right) \sin(\gamma\tilde{y}); \\ &-\left(\frac{1}{Fr_0^2}-1\right)\frac{\beta^3}{m^3}D + \left(\frac{1}{Fr_0^2}-3\right)\frac{\beta^2}{m^2}\tilde{\omega}A + 3\frac{\beta}{m}\tilde{\omega}^2D \\ &-\tilde{\omega}^3A + \frac{1}{Fr_0^2}\gamma^2\tilde{\omega}A - \frac{1}{Fr_0^2}\gamma^2\frac{\beta}{m}D \\ &-c_f\left(\frac{1}{Fr_0^2}-4\right)\frac{\beta^2}{m^2}C + 7c_f\frac{\beta}{m}\tilde{\omega}B + 3c_f\tilde{\omega}^2C \\ &-\frac{1}{Fr_0^2}2c_f\gamma^2C + 2c_f^2\tilde{\omega}A - 3c_f^2\frac{\beta}{m}D - 3c_fK\tilde{\omega} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\sin(\tilde{\omega}t) \sin\left(\frac{\beta}{m}\tilde{x}\right) \sin(\gamma\tilde{y}); \\ &\left(\frac{1}{Fr_0^2}-1\right)\frac{\beta^3}{m^3}C + \left(\frac{1}{Fr_0^2}-3\right)\frac{\beta^2}{m^2}\tilde{\omega}B - 3\frac{\beta}{m}\tilde{\omega}^2C \\ &-\tilde{\omega}^3B + \frac{1}{Fr_0^2}\gamma^2\tilde{\omega}B + \frac{1}{Fr_0^2}\gamma^2\frac{\beta}{m}C \\ &-c_f\left(\frac{1}{Fr_0^2}-4\right)\frac{\beta^2}{m^2}D - 7c_f\frac{\beta}{m}\tilde{\omega}A + 3c_f\tilde{\omega}^2D \\ &-\frac{1}{Fr_0^2}2c_f\gamma^2D + 2c_f^2\tilde{\omega}B + 3c_f^2\frac{\beta}{m}C + 3K\frac{\beta}{m}\tilde{\omega} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

上記4式を行列化し、逆行列の有無を調べることで波の安定・不安定領域を調べる。ここでは、簡単のため $c_f=0$ とした。

式(16), (17)は、

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{\beta^3}{m^3} - 3 \frac{\beta}{m} \tilde{\omega}^2 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \frac{\beta}{m} \right\} A \\ & - \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 3 \right) \frac{\beta^2}{m^2} \tilde{\omega} - \tilde{\omega}^3 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \tilde{\omega} \right\} D = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 3 \right) \frac{\beta^2}{m^2} \tilde{\omega} - \tilde{\omega}^3 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \tilde{\omega} \right\} A \\ & - \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{\beta^3}{m^3} - 3 \frac{\beta}{m} \tilde{\omega}^2 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \frac{\beta}{m} \right\} D = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

であるから、 K を定数としたとき、解が存在するためには

$$A = D = 0 \quad (21)$$

または、

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{\beta^3}{m^3} - 3 \frac{\beta}{m} \tilde{\omega}^2 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \frac{\beta}{m} \right\}^2 \\ & - \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 3 \right) \frac{\beta^2}{m^2} \tilde{\omega} - \tilde{\omega}^3 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \tilde{\omega} \right\}^2 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

が成り立つ。

一方、式(15), (18)より

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{\beta^3}{m^3} - 3 \frac{\beta}{m} \tilde{\omega}^2 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \frac{\beta}{m} \right\} B \\ & + \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 3 \right) \frac{\beta^2}{m^2} \tilde{\omega} - \tilde{\omega}^3 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \tilde{\omega} \right\} C = \\ & = -K \left(\tilde{\omega}^2 + 2 \frac{\beta^2}{m^2} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 3 \right) \frac{\beta^2}{m^2} \tilde{\omega} - \tilde{\omega}^3 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \tilde{\omega} \right\} B \\ & + \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{\beta^3}{m^3} - 3 \frac{\beta}{m} \tilde{\omega}^2 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \frac{\beta}{m} \right\} C \\ & = -3K \frac{\beta}{m} \tilde{\omega} \end{aligned} \quad (24)$$

であるから、式(22)が成り立つと、上式(23), (24)から得られる行列式も0となり、矛盾が生じる。

従って、係数 A, B, C, D が以下のように求められる。

$$A = D = 0 \quad (25a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (25b)$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (25c)$$

ここで、

$$[1] = -2K \frac{\beta}{m} \left(\tilde{\omega}^2 - \frac{\beta^2}{m^2} \right) \left\{ \frac{\beta^2}{m^2} \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \right\} \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} [2] = & \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 3 \right) \frac{\beta^2}{m^2} \tilde{\omega} - \tilde{\omega}^3 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \tilde{\omega} \right\}^2 \\ & - \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{\beta^3}{m^3} - 3 \frac{\beta}{m} \tilde{\omega}^2 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \frac{\beta}{m} \right\}^2 \end{aligned} \quad (26b)$$

$$\begin{aligned} [3] = & K \tilde{\omega} \left\{ \frac{\beta^2}{m^2} \frac{1}{Fr_0^2} \left(-\tilde{\omega}^2 + \frac{\beta^2}{m^2} + \gamma^2 \right) - \gamma^2 \frac{1}{Fr_0^2} \tilde{\omega}^2 \right. \\ & \left. + \tilde{\omega}^2 \left(\tilde{\omega}^2 - 4 \frac{\beta^2}{m^2} \right) + 3 \frac{\beta^4}{m^4} \right\} \end{aligned} \quad (26c)$$

である。

また、 B, C において(分母[2]) = 0から共鳴関係式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 3 \right) \frac{\beta^2}{m^2} \tilde{\omega} - \tilde{\omega}^3 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \tilde{\omega} \right\} \\ & = \pm \left\{ \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) \frac{\beta^3}{m^3} - 3 \frac{\beta}{m} \tilde{\omega}^2 + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \frac{\beta}{m} \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

上式を解くと、

$$\tilde{\omega} = \frac{\beta}{m}, \quad \tilde{\omega} = \pm \frac{\beta}{m} \left(1 \pm \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \right) \quad (28)$$

が導かれる。

3.4 共鳴関係における不安定波の伝播速度

波長 L の2次元長波の伝播速度は摩擦を無視した2次元浅水流方程式から式(29)で表される。

$$\lambda_{\pm} = \frac{dx}{dt} = U_0 \pm \sqrt{gh_0} \sqrt{1 + \frac{L^2}{B^2}} \quad (29)$$

上式より伝播速度は進行波であることがわかる。

一方、本研究で得られた共鳴関係を満足する不安

定波の伝播速度が進行波で表されることを以下に示す。式(25)の B , C の分子に式(28)で表される線形解

$$\tilde{\omega} = \frac{\beta}{m} \left(1 - \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \right)$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} & B \text{の分子[1]} \\ &= -2K \frac{\beta}{m} \left(\tilde{\omega}^2 - \frac{\beta^2}{m^2} \right) \left\{ \frac{\beta^2}{m^2} \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \right\} \\ &= -2K \frac{\beta}{m} \left\{ \frac{\beta^2}{m^2} \left(1 - \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \right)^2 - \frac{\beta^2}{m^2} \right\} \\ & \quad \times \left\{ \frac{\beta^2}{m^2} \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right) + \frac{1}{Fr_0^2} \gamma^2 \right\} \\ &= -2K \frac{\beta^5}{m^5} \left\{ -\frac{2}{Fr_0^3} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \left(1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2} \right) \right. \\ & \quad + \frac{1}{Fr_0^4} \left(1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2} \right)^2 + \frac{2}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \\ & \quad \left. - \frac{1}{Fr_0^2} \left(1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

C の分子[3]

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{Fr_0^2} K \tilde{\omega} \left\{ \frac{\beta^2}{m^2} \left(-\tilde{\omega}^2 + \frac{\beta^2}{m^2} + \gamma^2 \right) - \tilde{\omega}^2 \gamma^2 \right\} \\ &+ K \tilde{\omega}^3 \left(\tilde{\omega}^2 - 4 \frac{\beta^2}{m^2} \right) + 3K \frac{\beta^4}{m^4} \tilde{\omega} \\ &= \frac{K}{Fr_0^2} \frac{\beta}{m} \left(1 - \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \right) \\ & \quad \times \left[\frac{\beta^2}{m^2} \left\{ -\frac{\beta^2}{m^2} \left(1 - \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \right)^2 + \frac{\beta^2}{m^2} + \gamma^2 \right\} \right. \\ & \quad - \frac{K}{Fr_0^2} \frac{\beta}{m} \left(1 - \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \right) \\ & \quad \times \left\{ \frac{\beta^2}{m^2} \left(1 - \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \right)^2 \gamma^2 \right\} \\ & \quad + K \frac{\beta^3}{m^3} \left(1 - \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \right)^3 \\ & \quad \left. \times \left\{ \frac{\beta^2}{m^2} \left(1 - \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \right)^2 - 4 \frac{\beta^2}{m^2} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 3K \frac{\beta^5}{m^5} \left(1 - \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \right) \\ &= 2K \frac{\beta^5}{m^5} \left\{ -\frac{2}{Fr_0^3} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \left(1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2} \right) \right. \\ & \quad + \frac{1}{Fr_0^4} \left(1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2} \right)^2 + \frac{2}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \\ & \quad \left. - \frac{1}{Fr_0^2} \left(1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2} \right) \right\} \\ &= -B \text{の分子[1]} \end{aligned} \quad (31)$$

また, $\tilde{\omega}$ に

$$\tilde{\omega} = \frac{\beta}{m} \left(1 + \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \right)$$

を代入した場合も同様である。

一方, 式(25)の B , C の分子に式(28)で表される線形解

$$\tilde{\omega} = -\frac{\beta}{m} \left(1 \pm \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2}} \right)$$

を代入すると,

$$(B \text{の分子[1]}) = (C \text{の分子[2]}) \quad (32)$$

となる。

そこで, 式(25), (31)より水深変動の解の表示式(13)に

$$A = D = 0, \text{ 及び } C = -B$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} \tilde{h}' &= B \cos(\tilde{\omega} \tilde{t}) \sin\left(\frac{1}{m} \beta \tilde{x}\right) \sin(\gamma \tilde{y}) \\ & \quad - B \sin(\tilde{\omega} \tilde{t}) \cos\left(\frac{1}{m} \beta \tilde{x}\right) \sin(\gamma \tilde{y}) \\ &= -B \sin(\gamma \tilde{y}) \sin\left(\tilde{\omega} \tilde{t} - \frac{1}{m} \beta \tilde{x}\right) \end{aligned} \quad (33)$$

同様に式(25), (32)

$$A = D = 0, \text{ 及び } C = B$$

を式(13)に代入すると,

$$\tilde{h}' = B \cos(\tilde{\omega} \tilde{t}) \sin\left(\frac{1}{m} \beta \tilde{x}\right) \sin(\gamma \tilde{y})$$

Table2 Comparison between experimental results and linear solutions

	Exp. (s)	Eq.(28), $m = 1$ (s)	Eq.(37), $m = 1$ (s)
Run1	0.44	0.66, 4.25	
Run2	1.15, 2.38, 4.50	0.51, 1.08, 10.14	0.60, 4.94

$$\begin{aligned}
& + B \sin(\tilde{\omega} \tilde{t}) \cos\left(\frac{1}{m} \beta \tilde{x}\right) \sin(\tilde{y}) \\
& = B \sin(\tilde{y}) \sin\left(\tilde{\omega} \tilde{t} + \frac{1}{m} \beta \tilde{x}\right) \quad (34)
\end{aligned}$$

$$C = \frac{K \tilde{\omega} \left\{ \tilde{\omega}^2 + \left(1 - \frac{1}{Fr_0^2}\right) \frac{\beta^2}{m^2} \right\} - 4K \frac{\beta^2}{m^2} \tilde{\omega}}{\left[\tilde{\omega}^2 + \left(1 - \frac{1}{Fr_0^2}\right) \frac{\beta^2}{m^2} \right]^2 - 4 \frac{\beta^2}{m^2} \tilde{\omega}^2} \quad (36c)$$

となり、共鳴関係における不安定波の伝播速度が式(29)で表現される2次元長波の伝播速度と同様に進行波であることがわかる。

また、式(29)を次式のように変形すると、

$$\lambda_{\pm} = \frac{dx}{dt} = U_0 \left(1 \pm \frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{L^2}{B^2}} \right) \quad (35)$$

となり、フルード数 Fr_0 及び、 $\sqrt{1 + L^2/B^2}$ の大きさによって不安定波の伝播する向きが異なることがわかる。即ち、

$$\frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{L^2}{B^2}} < 1 \text{ のとき, } \lambda_{+} > 0, \lambda_{-} > 0$$

$$\frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{L^2}{B^2}} \geq 1 \text{ のとき, } \lambda_{+} > 0, \lambda_{-} < 0$$

ここで、 λ_{+} は短周期の振動波の波速を表し、 λ_{-} は長周期の振動波の波速を表すことから、

$$\frac{1}{Fr_0} \sqrt{1 + \frac{L^2}{B^2}}$$

の値によって長周期の振動波の伝播する向きが異なることがわかる。

3.5 1次元波の発生に関する考察

次に、上記の2次元不安定波の発生に関するモデルから、1次元波の発生について考察する(細田, 2005)。式(25), (26)において $\gamma = 0$ とすると、

$$A = D = 0 \quad (36a)$$

$$B = \frac{2K \frac{\beta}{m} \left(1 - \frac{1}{Fr_0^2}\right) \frac{\beta^2}{m^2}}{\left[\tilde{\omega}^2 + \left(1 - \frac{1}{Fr_0^2}\right) \frac{\beta^2}{m^2} \right]^2 - 4 \frac{\beta^2}{m^2} \tilde{\omega}^2} \quad (36b)$$

となる。また、共鳴関係式を満足する $\tilde{\omega}$ については、式(28)において $\gamma = 0$ とすると、

$$\tilde{\omega} = \pm \frac{\beta}{m} \left(1 \pm \frac{1}{Fr_0} \right) \quad (37)$$

が得られる。

4. 実験結果と線形解の比較

Table 1に示した実験の水利条件を式(28)及び(37)に代入し、卓越周期を計算した。ここで、式(28), (37)はそれぞれ2次元波、1次元波が発生する場合の卓越周期を表している。Run1では、2次元波が発生していたため、式(28)から得られる周期と比較を行った。Run2では2次元波と1次元波が混在していたため2つの解と比較を行った。実験結果との比較をTable 2に示す。

Run1では、実験結果の卓越周期が0.44秒であり、ビデオ画像において確認された、流下方向2つのプールで1波長のモードの線形解(0.66秒)と近い値を示していることがわかる。一方、Run2における実験結果の卓越周期は短周期が約1秒、長周期が2.4秒、4.5秒であるのに対し、2次元波、1次元波発生モデルから得られる周期が1.08秒、4.94秒であり、ほぼ一致していると考えられる。

本研究では、隔壁上層と下層の交換速度を仮定し、階段式魚道型水路の不安定波発生機構に関する線形理論を示した。しかし、非線形性の影響についても考察する必要がある。今後、非線形解析や3次元数値解析を行い、1次元あるいは2次元波が発生する水利条件について検討したい。

5. おわりに

本研究では、階段式魚道型水路における不安定波の発生機構について理論的に考察したものである。隔壁上層と下層の流体の交換速度を仮定した、不安定波の発生に関する線形解によって、実験結果における卓越周期をある程度再現できることを示した。今後、非線形解析や移動一般座標系を用いた3次元数値解析を行い、1次元的な波と2次元的な波が卓越する水理条件について考察したい。

謝辞

最後に、本研究を遂行するにあたり、水理実験、データ整理、図面作製に多大な協力を頂いた京都大学工学部・技官、仙波秀治氏に謝意を表します。

参考文献

- 中村俊六著, (財)リバーフロント整備センター編 (1995) : 魚道のはなし, 山海堂.
- 細田 尚 (2005) : 階段式魚道型水路における水面振動の発生機構に関する一考察, 第54回理論応用力学講演会講演論文集, pp. 621-622.

Some Considerations on the Unsteady Wave Generation in a Pool and Fish Weir Pass Type Flume

Miyuki OYAGI^{*}, Takashi HOSODA^{**} and Shinichiro ONDA^{**}

^{*} Electric Power Development Co., Ltd., Japan

^{**} Graduate School of Engineering, Kyoto University

Synopsis

In this paper, the unsteady water surface oscillations in a ladder fishway type flume are investigated. In the previous studies, a few patterns of water surface oscillations were observed and the countermeasures have been taken to prevent the oscillation. However, the fundamental mechanism of generation of unsteady waves is not clarified yet. In this study, laboratory experiments were firstly conducted to examine the oscillation characteristics and obtain the fundamental data. Then, a simple theoretical model on the unsteady wave generation was developed by assuming the exchange velocity between the surface and pool regions. The model was verified by comparing the theoretical results with the laboratory experiments.

Keywords: pool and fish weir pass type flume, unsteady water surface oscillation, open channel flow