第10章　交通渋滞の動学分析*

1．はじめに

今日，大都市ではいたる所で日常的に渋滞が発生しているが，交通混雑による経済的損失の大半はこの渋滞によるものといわれている。したがって渋滞現象を解明し，有効な対策を立案することの意義はきわめて大きい。経済学では，交通混雑の外部不経済を内部化する手段として混雑料金の理論が開発されているが，静学的分析に終始しており，それらは動的な現象である交通渋滞の対策にはそのまま適用できない。実際のところ，経済学者の間では渋滞現象の理論的定式化の段階で誤解に満ちた議論が散見され，そのことをめぐって不毛な論争も行われてきた。例えば多くの経済学者は走行費用曲線が反転（backward bending）すると考え，このような状態を「超混雑」(hyper-congestion）と呼んでいる。しかし，後述するように走行費用曲線が反転するというのはまったくの誤りであり，したがってそのような理論にもとづく混雑料金の導出も無意味である[1)]。

一方，交通工学においては，交通流理論の研究が数十年にわたって行われており,渋滞現象の調査,分析,モデルの適用など膨大な研究成果が蓄積されている。また渋滞対策として高速道路の入路制御などといった物理的規制手段についての研究もなされ，一部は実用化されている。しかしそのような規制手段が経済厚生に与える影響を正しく評価したうえで適用されてきたとはいいがたい。

経済分析にもとづく政策提言が有効であるためには，まず交通渋滞という現象を正しく理解し，それに立脚した経済分析の枠組みを構築することが必要で

ある。経済分析は，混雑料金などのような経済学的政策手段の分析にとどまらず，上述した物理的規制手段の有効性を評価するためにも重要な役割を果たす。

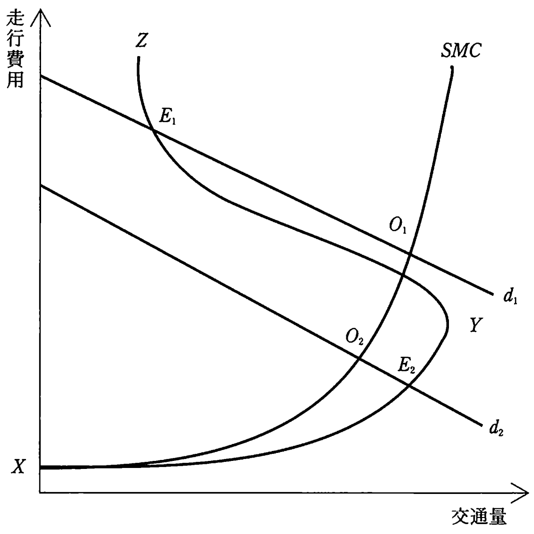
本章では，交通流理論の成果をふまえて，交通渋滞現象の動的モデルを提示する。そして道路の最適利用を図るための手段として，交通渋滞が生ずる場合の混雑料金のあり方を見いだすことを目的とする。

本章の第2節では，本論に先立って，交通渋滞に関する従来の経済学的研究を再検討し，それらの問題点を明らかにする。第3節では，渋滞の発生と変遷メカニズムを記述するモデルを定式化する。第4節と第5節では，このモデルを朝のラッシュアワーの道路利用問題に適用し，均衡解と最適解を求めるとともに，最適な道路利用を分権的に達成するためのピークロード料金を導出する。第6節では，モデルのパラメータに具体的数値を与えてシミュレーションを行い，均衡解と最適解における出発分布や利用者の厚生に関する分析を行う。

2．交通渋滞に関する従来の経済理論

この節では，とくに「超混雑」に関する従来の議論を批判的に検討する。図

図1　「超混雑」の理論における走行費用曲線と需要曲線



１は，そのような議論において用いられる道路の走行費用と需要曲線を描いている。図において走行費用曲線はX-Y-Zのように反転している。そしてその反転した部分Y-Zに相当する状態が「超混雑」と呼ばれている。

まずは，図１のような費用曲線がいかにして描かれたかについて述べておく。交通流の状態を表現する基本的変数として，交通量Q，走行速度V，そして密度Kが用いられる。そしてそれらの間には次の式のような関係がある。

$$V=f(K),\quad f'<0 \tag{1}$$

$$Q=KV \tag{2}$$

(１)式は，交通密度が高い（すなわち車両間の間隔が短い）と走行速度が低下するという関係を表している。(２)は定義式である。上の２つの式により，V，Q，Kの内一つの値が決まれば他の変数の値も同時に決まる。

図２　交通量-密度-速度の関係

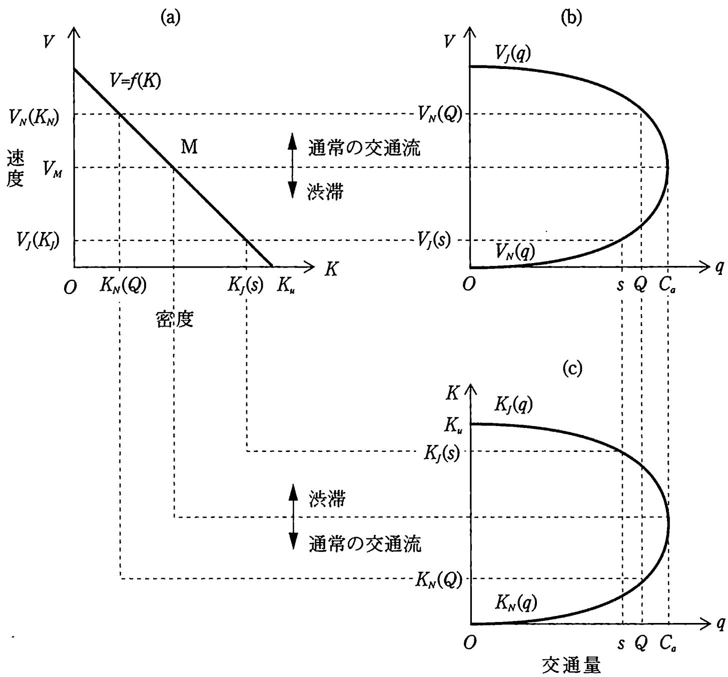


図２は，これら３変数の間の関係を図示したものである。これらの図において速度がV_Mよりも低い交通流の状態が渋滞に相当する。図において下付添え字Nは交通流が非渋滞状態，Jは渋滞状態であることを表している。なお，これらの関係は道路上の１地点ないしはごく短い区間について定義されるものであることに注意されたい[2]。

道路の走行費用は所要時間に比例し，所要時間は走行した距離を速度で除したものとして定義される。この定義にしたがい，図２(b)における交通量-速度関係を交通量-走行時間（費用）関係に変換すれば，確かに図１におけるX-Y-Zのように反転した走行費用曲線が描ける。しかしこれは上述したように，道路上のある地点における関係にすぎず，より長い道路区間に対しては必ずしも成立しない。

さて図１では，d_1やd_2のように需要曲線を描き，費用曲線との交点（図の点E_1やE_2）において均衡交通量が決まるとしている。なお点E_1では均衡において「超混雑」が生じるとされている。社会的限界費用はSMCのように描かれ，需要曲線との交点（図の点O_1やO_2）に相当する交通量が最適であるとしている。そしてそのような最適解を達成するためにはSMCと走行費用（＝私的費用）との差に等しい混雑料金を徴収することを主張する。社会的限界費用曲線は道路の交通容量（図１の点Yに相当する交通量）に近づくにつれ無限大に発散する。したがって，需要曲線がいかなる高水準になろうとも，最適において「超混雑」の存在は許されない。これは，「超混雑」の生ずる場合，同量の交通をより低い費用で処理できるためであると解釈されている。

以上の理論における費用曲線と需要曲線の定義には不整合がある。このことは，「超混雑」の生じる場合，とくに問題になる。それは図１における縦軸の費用の解釈である。需要者側からみれば，縦軸の費用は道路区間を走破すること，すなわちトリップのために要する費用と解釈すべきである。トリップとは，空間的に離れた２つの地点間の移動であり，ある目的を持った活動を行うための派生需要である。したがってトリップを行うかどうかの意思決定は，出発地から目的地までの費用を考慮して行われるはずである。一方，図１における費用曲線は，上述したように，道路上の１地点でのみ成り立つ交通量-速度関係にもとづいて描かれたものである。これより明らかなように，従来の理論にお

ける需要曲線と費用曲線は，本来，同一平面上に描くことはできないのである。1地点における関係ではなく，トリップに関して走行費用曲線を描くと，渋滞が起きても，図1のような反転部分を持たない。この点については次節で具体的に示される。したがって，とくに渋滞の存在する場合，点E_1のように均衡解が求められるとすることは正しくない。

図1のように反転する費用曲線を想定する経済学者の多くは，「超混雑」(交通渋滞) の状態がなぜ起きるかについて深く考察することなく分析を行っているようである。渋滞は，図3に示すように道路区間の途中に交通容量の低いボトルネックが存在し，上流からの交通量がボトルネックの容量Sを上回るときに生ずるものである。このときボトルネックを通過できなかった車が待ち行列を形成し，これが上流方向に伸びるが，この待ち行列の内部における交通流の状態が渋滞に相当する。

従来の「超混雑」の理論ではボトルネックを明示的に考慮せず，単一の交通量-費用関係にもとづいているが，これは均一な道路区間を対象に渋滞の分析を行っていることを意味する。実際には，渋滞は均一な道路区間では生じない。均一な道路区間では，流入交通量がその道路の交通容量を下回る限り，それらは渋滞することなく一定時間後に下流端から流出する。それ以上の交通量が流入しようとした場合は，当該道路区間の中ではなく，道路に入る直前で渋滞列が形成され，上流に伸びるので当該区間にはやはり渋滞は生じない。なんらかの原因により，道路区間の途中で渋滞に該当するほど高い密度の交通流の状態になったとしても，それはただちに解消される。なぜなら，そのような箇所の交通流の速度は低くなるが，その箇所の前方にはそれより密度が低く速度が高い交通流があるので，それら2つの交通流の間には車の存在しない空間が生じる。このとき一時的に生じた渋滞流は前方の空間を詰めるよう加速することによって密度を低下させることができるので，やがて渋滞は解消する。最近，Verhoef [1998] は，追従モデルを用いて上述のプロセスを厳密に記述することにより，均一な道路区間において渋滞状態が持続しえないことを示している。

渋滞はボトルネックの存在抜きには考えられない。その意味で，Walters [1961] がここでいう渋滞をボトルネック混雑と呼んだのは正しいが，彼の分析内容はそのような呼称と対応していなかった。

伝統的アプローチは，基本的に静学的分析であり，交通流の定常性を想定している。しかしこの想定は，渋滞の問題を取り扱うためには不適当である。例えば，定常的にボトルネック容量を超える一定の交通量が流入した場合，渋滞列はいつまでも伸び続けるので，同じ流入交通量に対しても，流入した時刻によって渋滞列の長さは異なり，したがって走行費用も異なる。渋滞を考慮するためには，ダイナミックな分析が必要である。

ただし流入交通量が容量を下回り，渋滞が生じない場合は，定常性を仮定しても問題はない。また，この場合は，道路区間が均一であれば，上流からの交通量がそのまま終点から流出するので，断面交通量と速度の局所的関係を全区間に引き伸ばすことができ，図１の点E_2のように均衡と最適を決めても定性的には間違いではない。すなわち伝統的アプローチは，渋滞の生じない限りにおいて正しい結果を与える。

渋滞問題を取り扱うためには，ボトルネックを考慮した動的な分析が必要なこと，費用曲線は「トリップ」について定義すべきであることが，以上の考察から得た結論である。

ところでElse［1981］は，需要曲線および費用曲線を交通密度について定義することによって，渋滞問題に関する代替的アプローチを提案した。同様の主張は，最近では，Evans［1992］においてもみられる。しかしある道路の利用者の意思決定変数が，そのElse自身が主張する“completed journey”であるためには，それは交通密度ではなく，道路の始点から終点までの「トリップ」でなければならない。さらに，Elseらのアプローチにおいてもボトルネックは考慮されておらず，静的な分析である。その意味でも，これは伝統的アプローチを発展させたものとはいいがたい。このElseの議論をめぐって，さまざまな論争が行われたが，それらはいずれも均一な道路区間を対象とした静的分析の枠内にとどまったものなので，かえって議論を混乱させただけの不毛なものであった。

以上の議論とは別のところで，実はVickrey［1969］以来，ボトルネック混雑に関する経済学的研究が行われている。このモデルは，ボトルネックを通過するための待ち時間にもとづくものであり，ドライバーの出発時刻選択を組み合わせてピークロード料金の分析が行われている。とくに最近，Arnott，de

Palma and Lindseyらによってさまざまな拡張が行われている[3)]。経済学の文献では，このボトルネックモデルが，先に述べた交通量-速度関係にもとづく混雑理論と互いに無関係のものであるかのように紹介されているが，実はいずれも，本来，統一的な交通流理論の体系から一部分を切り出して簡略化したものなのである。Vickreyモデルは，現象の本質を損なうことなく，操作性の高い枠組みを構築した点で優れているが，交通流の取扱いは過度に単純化されている。そこでは車が出発地からボトルネック地点まで（他の車に影響されず）一定の速度で走行するものと仮定されている。このことは，ボトルネックを通過するための（待ち時間は考慮されているものの）待ち行列の物理的長さはゼロであることを意味する。これは，あたかもボトルネック地点に車を駐車する広いスペースがあり，各車は自分の番がくるまでそこで車を止めて待つことができるような状況を想定することになる。Arnott et al.［1990］においても，今後の問題の一つとして渋滞現象を明示的に取り扱うべきであると述べている。

以上の検討をふまえ，次節では，渋滞発生のメカニズムを動学モデルにより記述し，それにもとづいて走行費用をトリップ（すなわち道路の始点から終点までの走行）に対するものとして定式化する。そして，このように定義された走行費用曲線には，図１のような反転部分は存在せず，それらは流入交通量の単調増加関数であることを示す。

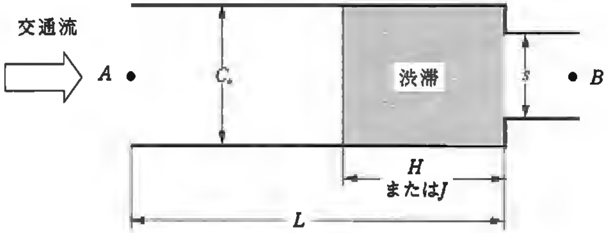
３．交通渋滞の動学モデルと道路の走行費用

３．１　交通渋滞の動学モデル

図３のような道路区間を想定する。区間の終端Bに容量sのボトルネックがある以外は，道路区間の交通条件は均一（容量はC_a）であると仮定する。また道路区間を走行する車の性能はすべて等しいものとする。

時刻tに地点Aから流入する交通量$Q(t)$がsを上回らない限り，同量の交通量が一定時間経過後に地点Bから流出し，渋滞は起こらない。このとき交通密度は，図２(c)における下半分の関係が該当するので$K_N(Q(t))$になる。しかし交通量$Q(t)$がボトルネックの交通容量sを超えると，ボトルネックを通過する交通量は容量を上回らないので，その超過分が渋滞列を形成する。このよう

図 3　道路区間の構造



な渋滞列の内部では，図 2 (c) における交通量-密度関係の上半分の関係が成立しており，連続条件よりボトルネック容量sに等しい交通量が流れるので，その密度は$K_J(s)$である。この場合でも渋滞列より上流側では流入した交通量がそのまま流れており，その密度は$K_N(Q(t))$である。したがって渋滞列の後端では交通流が不連続となるが，この部分の運動は衝撃波（shock wave）と呼ばれる。衝撃波の速度$G(t)$は次の式によって与えられる（導出についてはLighthill and Whitham [1955] を参照されたい)。

$$G(t)=\frac{s-Q(t)}{K_J(s)-K_N(Q(t))} \tag{3}$$

上式右辺の分母はつねに正であるから，流入交通量がボトルネック容量を上回る（$Q(t)>s$）とき，$G(t)$は負の値となる。このとき衝撃波は交通流と逆の方向に伝播するので，渋滞列が上流側に延伸する。一方，$Q(t)<s$のとき

$G(t)$は正となるので交通流と同じ方向に伝播する。すなわち渋滞列は縮小する。

ある時刻tにおける渋滞列の長さ$H(t)$は次式のように計算される。

$$H(t)=\int_{t_a}^{t}-G(u)\,du \tag{4}$$

ここにt_aは，流入交通量がはじめてボトルネックの容量を上回り，渋滞列の形成される時点である。$H(t)$の変遷は，次のような微分方程式で表される。

$$\dot{H}(t)=\begin{cases}-G(t), & \text{if } H(t)>0\text{, or } Q(t)>s & \text{(5 a)}\\ 0, & \text{if } H(t)=0\text{, and } Q(t)\leqq s & \text{(5 b)}\end{cases}$$

ここに$\dot{H}(t)$は$H(t)$の時間に関する導関数である。(5b)式は，渋滞長が非負であることを考慮したものである。なお，次のような関係が成り立つことを示すことができる（文［1993]）。

$$\frac{dG(t)}{dQ(t)} < 0 \tag{6a}$$

$$\frac{dH(u)}{dQ(t)} = \frac{dG(t)}{dQ(t)} > 0, \quad t_a \leqq t \leqq u \tag{6b}$$

3.2 渋滞する道路の走行費用

走行費用は道路区間の通過所要時間に比例すると仮定する。いまαをドライバーの時間評価値，$T(t)$を時刻tに地点Aを出発した車が地点Bに到着するまでに要した時間とすると，この道路区間の走行費用は$\alpha T(t)$により計算される。

時刻tに単位時間当たり$Q(t)$台の交通量がこの道路に流入するものと想定しよう。そしてこのとき，ボトルネックから渋滞列が生じているものとする。このような渋滞列の内部は，図2(b)における交通量-速度関係の下半分の関係が成立しており，連続条件よりボトルネック容量sに等しい交通量が流れるので，その速度は$V_J(s)$である。また，渋滞列よりも上流側では流入した交通量がそのまま流れ，その速度は$V_N(Q(t))$である。したがってこの道路を走破するための所要時間$T(t)$は次の式によって表される。

$$T(t) = \frac{J(t)}{V_J(s)} + \frac{L - J(t)}{V_N(Q(t))} \tag{7}$$

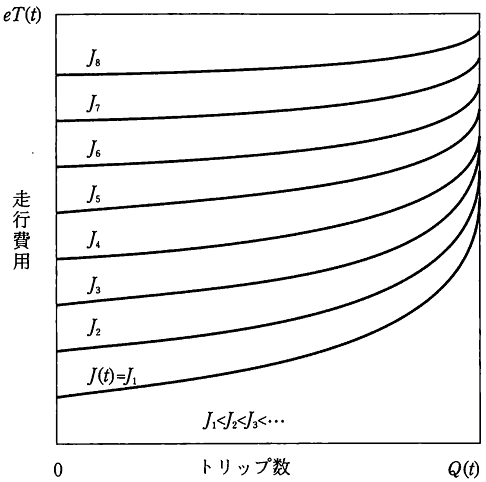
ここにLは道路区間の長さであり，$J(t)$は時刻tに流入した車が直面する渋滞列の長さである。上式の右辺第1項は渋滞列の内部を通過する時間であり，第2項は非渋滞区間を走行する時間である。

さて，この$T(t)$と流入交通量$Q(t)$の関係を調べるため，(7)式を$Q(t)$に関して微分する。

$$\frac{dT(t)}{dQ(t)} = -\frac{L - J(t)}{\{V_N(Q(t))\}^2}\frac{dV_N}{dQ} > 0 \tag{8}$$

上の式より所要時間$T(t)$は流入交通量とともに単調に増加する。すなわち走

図 4　トリップ数（＝流入交通量）と走行費用の関係



行費用曲線に反転部分は存在しない。また流入交通量-走行費用の関係は一意ではなく，図 4 のように，そのときまでに形成された渋滞列の長さによって無数に描ける。このことは，ある時刻tにおける走行時間は，その時刻以前に道路に流入し，渋滞列の形成に寄与した車両に影響されることを意味する。すなわち渋滞は，異なる時点に道路を利用する車の間で動学的外部効果を発生させる。１台の追加的道路利用は，現時点でわずかに渋滞列の長さを増加させるが，そのことはそれ以降，渋滞が解消されるまで道路を利用するすべての車に，より長い渋滞走行をさせるのである。動学的外部効果の具体的な導出については，文［1993］またはMun［1994］を参照されたい。

ところで(７)式の$J(t)$は，前節の(４)式で定義した渋滞長$H(t)$とは微妙に異なることを注意されたい。すなわち$H(t)$におけるtが絶対時刻であるのに対し，$J(t)$におけるtは流入時刻である。時刻tに流入した車は，それから$\frac{L-J(t)}{V_N(Q(t))}$を経過した後で渋滞列の最後尾に達するので，２つの変数の関係は次のように書ける。

$$J(t)=H\left(t+\frac{L-J(t)}{V_N(Q(t))}\right) \qquad (9)$$

また$J(t)$の時間変化は次式によって記述される[4]。

$$\dot{J}(t)=\frac{s-Q(t)}{K_J(s)-s/V_N(Q(t))} \tag{10}$$

4．通勤ラッシュアワーにおける出発時刻選択と無料金均衡

朝の出勤ラッシュアワーにおける交通渋滞は，多くの都市で共通にみられる代表的な交通問題である。

朝のラッシュアワーにおいて，ドライバーが混雑とスケジューリング費用とのトレードオフを考慮して出発時刻を選択するという仮説にもとづいて，時刻別道路利用の均衡解と最適解を求めるモデルに関する研究が従来より行われている。これらの研究では，混雑のモデル化に際して，大別すると2通りのアプローチがなされており，それらは混雑料金の効果に対して異なった結論を導いている。Vickrey [1969] 及びArnott，de Palma and Lindsey [1990] らは，ボトルネックにおける待ち行列として混雑をモデル化している。このモデルでは，無料金均衡と社会的最適解におけるラッシュアワーの長さは等しくなり，ドライバーの厚生，すなわちドライバーの負う私的費用は混雑料金を課しても変化しないという結果が得られる。一方，Henderson [1985] は，道路の走行費用が交通量の単調増加関数であると仮定したモデルにもとづいて，同様の分析を行った。彼は，混雑料金を導入した場合，無料金均衡に比べ社会的最適解におけるラッシュアワーの長さが長くなる，すなわち出発時刻分布がより分散することを示した。その結果，混雑料金を課すことによってドライバーの厚生は悪化する。

以下では，前節で定式化した交通渋滞の動学モデルにもとづいて，朝のラッシュアワーにおける道路利用の均衡解と最適な混雑料金を導出するとともに，その特性について分析する[5]。

毎朝，N人の労働者がA点にある自宅からB点にある勤務先まで通勤するものとする。各通勤者は通勤費用を最小化しようとする。通勤費用は，前節で定式化した走行費用と，スケジューリング費用から成る。スケジューリング費用

は，始業時刻よりも職場に早く着いたり，遅く着くことによって発生する。前者の場合は始業時刻までの待ち時間による損失，後者の場合は遅刻によるペナルティである。したがって時刻tに自宅を出発したドライバーの通勤費用$C(t)$は次のように表される。

$$C(t)=\alpha T(t)+\beta(\hat{t}-t-T(t)),\quad \text{if } t+T(t)\leqq\hat{t} \tag{11a}$$

$$C(t)=\alpha T(t)+\gamma(t+T(t)-\hat{t}),\quad \text{if } t+T(t)>\hat{t} \tag{11b}$$

ここにαは走行時間の金銭的評価値，β，γはそれぞれ，早着による待機時間の価値，遅刻時間当たりペナルティである。なお$\beta<\alpha<\gamma$を仮定する。また$\hat{t}$は始業時刻である。本研究では，Arnottらと同様，すべての労働者の始業時刻は同一であると仮定する。$t+T(t)$は時刻tに出発した人が職場に着く時刻なので，(11a)式は早着する場合の通勤費用，(11b)式は遅刻する場合の通勤費用である。

ドライバーは，始業時刻ちょうどに職場に着けばスケジューリング費用はかからない。しかしすべてのドライバーが始業時刻にちょうど着くことは不可能なので，大半の者は始業時刻の前か後に着くことになる。均衡は，どの個人も出発時刻を変更する誘因を持たなくなったとき達成される。そのような状況は，出発時刻にかかわらず通勤費用が一定であるとき達成される。このとき，始業時刻に近く到着する者は，スケジューリング費用が低いが，より長い間渋滞列の中で走行し，始業時刻よりも早くあるいは遅く着く者は長い渋滞走行を回避できる。したがって均衡条件は次のように書ける。

$$\alpha T(t)+\beta(\hat{t}-t-T(t))=C^*,\qquad \text{if } t_1\leqq\hat{t}\leqq t-T(t) \tag{12a}$$

$$\alpha T(t)+\gamma(t+T(t)-\hat{t})\ =C^*,\qquad \text{if } \hat{t}-T(t)<t\leqq t_2 \tag{12b}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}Q(t)\,dt=N \tag{12c}$$

ここにt_1，t_2は，それぞれ，N人のドライバーの内最も早く出る者，最も遅く出る者の出発時刻である。すなわちラッシュアワーの開始時刻，終了時刻である。またC^*は，均衡時に各ドライバー間で等しくなる通勤費用である。(12a)，(12b)式は次のことと同義である。

$$\dot{T}(t)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}, & \text{if } t_1 \leqq t \leqq \hat{t}-T(t)\\ \dfrac{\gamma}{\alpha+\gamma}, & \text{if } \hat{t}-T(t)<t\leqq T_2\end{cases} \tag{13}$$

前節で定式化した(７)式に従えば，上式の左辺は次のように表される。

$$\begin{aligned}\dot{T}(t)&=\frac{\partial T}{\partial Q}\dot{Q}(t)+\frac{\partial T}{\partial J}\dot{J}(t)\\ &=-\frac{L-J(t)}{\{V_N(Q(t))\}^2}\frac{dV_N}{dQ}\dot{Q}(t)+\left(\frac{1}{V_J(s)}-\frac{1}{V_N(Q(t))}\right)\dot{J}(t)\\ &=-\frac{L-J(t)}{\{V_N(Q(t))\}^2}\frac{dV_N}{dQ}\dot{Q}(t)+\frac{Q(t)-s}{s}\end{aligned} \tag{14}$$

最後の式は，(10)式を代入することによって得られたものである。渋滞列が存在しない場合，上式の右辺第２項は消え，そのときこのモデルは，Hendersonのモデルと基本的に同じものになる。一方，非渋滞区間における走行速度が交通量に依存しないと仮定すれば，$\frac{dV_N}{dQ}=0$ なので，右辺第１項が消え，そのときモデルはVickreyモデルとまったく同じ形である。すなわち本モデルはHendersonモデルとVickreyモデルを特殊ケースとして含んでいる。

5．最適な道路利用とピークロード料金

5．1　最適な道路利用

社会的に最適な道路利用は，ラッシュアワー中のドライバーの総通勤費用が最小化されたときに達成されるものとする。したがって目的関数は次のように書ける。

$$W=\int_{t_1}^{\tilde{t}} C^1(t)Q(t)\,dt+\int_{\tilde{t}}^{t_2} C^2(t)Q(t)\,dt \tag{15a}$$

ここに

$$C^1(t)=\alpha T(t)+\beta(\hat{t}-t-T(t)) \tag{15b}$$
$$C^2(t)=\alpha T(t)+\gamma(t+T(t)-\hat{t}) \tag{15c}$$

上式における$C^1(t)$，$C^2(t)$は，それぞれ始業時刻よりも早く着く者，遅く着く者に対する通勤費用である。また$\tilde{t}$は，ちょうど始業時刻に着く者が自宅を出発する時刻である。

最適制御理論を適用する。制御変数は各時点tにおける出発台数$Q(t)$であり，状態変数は渋滞長$J(t)$と，時刻tまでに出発した累積人数$N(t)$である。この問題は，(15a)式に示した目的関数からもわかるように，始業時刻に対する早着（$i=1$）と遅着($i=2$）という2通りの状況を結合した2-Stage最適制御問題（Tomiyama［1985］）になっている。(15a)式における$\tilde{t}$はswitching timeと呼ばれ，一つの制御パラメータである。最適条件の詳細についてはMun［1999］を参照されたい。

最適解において渋滞は生じない。それは渋滞が生じた場合よりも短い走行時間で，同量の交通を処理するような解を（渋滞なしの状況で）みつけることができるからである。したがって次の2通りの交通状況のみが可能であり，それぞれについて最適条件が導出される。

Phase A：　$J(t)=0$ and $Q(t)<s$
Phase B：　$J(t)=0$ and $Q(t)=s$

Phase Aは，流入交通量（＝出発率）がボトルネック容量よりも低い状況であり，Phase Bはボトルネック容量とちょうど等しい交通量がしばらく継続するような状況である。最適条件を分析することによって，Phase Aが実現している間，$\dot{Q}(t)>0$（for $t<\tilde{t}$）および$\dot{Q}(t)<0$（for $t>\tilde{t}$）となることがいえる(Mun［1999］を参照)。これより早着の場合は，交通量が単調に増加し，交通量はsを超えることはないので，Phase Bが生じるとすればそれは必ずPhase Aの後である。したがって早着の場合，ラッシュアワーが始まるとまずPhase Aのもとで交通量が徐々に増え，ボトルネック容量sに等しくなった時点からPhase Bに移行する。そして一旦Phase Bになると，早着の間はPhase Aに戻ることはない。遅着の場合は以上と逆のプロセスで交通状況が推移する。すな

わちPhase Bの後でPhase Aに移行する。

5．2　最適なピークロード料金

最適解を実現するように，通勤者の出発分布を誘導するためには，出発時刻ごとに変動するピークロード料金を課すればよい。ピークロード料金が通勤者の分権的な出発時刻選択と整合的であるためには，各時刻において次の条件が成り立たねばならない。

$$(\alpha-\beta)T(t)+\beta(\hat{t}-t)+\tau(t)=C^0, \quad \text{for } t_1 \leqq t \leqq \tilde{t} \tag{16a}$$
$$(\alpha+\gamma)T(t)+\gamma(t-\hat{t})+\tau(t)=C^0, \quad \text{for } \tilde{t} < t \leqq t_2 \tag{16b}$$

ここにC^0は最適ピークロード料金のもとでの私的通勤費である。なお料金は非負の値を持つものとする。上でみたような最適解におけるPhase間の順序関係を考慮しながら，(16)式と最適条件を対応させることにより，次のような最適ピークロード料金体系が得られる。

$$\tau(t)=\begin{cases} 0, & \text{for } t \leqq t_1 \\ (\alpha-\beta)E(Q(t)), & \text{for } t_1 < t \leqq t'_1 \\ (\alpha-\beta)E(s)+\beta(t-t'_1), & \text{for } t'_1 \leqq t \leqq \tilde{t} \\ (\alpha+\gamma)E(s)+\gamma(t'_2-t), & \text{for } \tilde{t} \leqq t \leqq t'_2 \\ (\alpha+\gamma)E(Q(t)), & \text{for } t'_2 \leqq t < t_2 \\ 0, & \text{for } t_2 \leqq t \end{cases} \tag{17}$$

ここに$E(Q(t))=Q(t)\dfrac{\partial T(t)}{\partial V_N}\dfrac{dV_N}{dQ(t)}$である。また$t'_1$と$t'_2$は，それぞれ，早着時にPhase AからBに移行する時刻，および遅着時にPhase BからAに移行する時刻である。$E(Q(t))$は，非渋滞流において交通量が$Q(t)$のとき，１台の交通量増加が，同時に道路を利用する他の車両の速度を低下させる外部効果である。これは静学的な混雑理論において導かれる外部効果にほかならないので，以下ではこれを**静学的外部効果**と呼ぶ。上の式より，Phase Aが実現している間（$t_1 < t \leqq t'_1$または$t'_2 \leqq t < t_2$），料金は静学的外部効果の値に等しい。この原則はHenderson［1981］によって導かれたものと同様である。一方，Phase Bが実現している間（$t'_1 \leqq t \leqq t'_2$），$E(s)$は一定なので料金は線形に推

移する。この性質は，Vickrey型のボトルネックモデルを用いてArnott，de Palma and Lindsey［1990］らが導いたものと同様である。したがって本章における最適ピークロード料金は，Henderson型（Phase A）とVickrey型（Phase B）の解を特殊ケースとして含むものである。Henderson型の料金は静学的外部効果を内部化する一方，Vickrey型の料金は渋滞の発生（すなわち動学的外部性）を完全に防止する。なお(17)式に示したように，料金は非負の値を持つので，どの通勤者も$t<t_1$や$t>t_2$の時間帯に出発する誘因を持たない。

6．均衡解および最適解のシミュレーション分析

6．1　関数の特定化とパラメータの設定

まず，(1)式に示した$f(K)$，すなわち密度-速度関係はGreenshieldの公式を用いる。

$$f(K)=V_f\left\{1-\left(\frac{K}{k_u}\right)\right\} \tag{18}$$

ここにV_fは自由走行速度であり，k_uは最大密度（速度がゼロのときの密度）である。なお，k_uは道路区間の容量が決まれば，次の式によって計算できる。

$$k_u=\frac{4C_a}{V_f}$$

道路区間の交通条件については，次のようにパラメータを設定した。

道路区間の長さ：$L=20$（km）
道路区間の交通容量：$C_a=3600$（台/時）$=60$（台/分）
ボトルネックの交通容量：$s=2400$（台/時）$=40$（台/分）
自由走行速度：$V_f=80$（km/時）
最大密度：$k_u=180$（台/km）

これらの値は，日本の名神高速道路を対象とした実証研究（Makigami et al.［1984］）の結果を参考にしている。

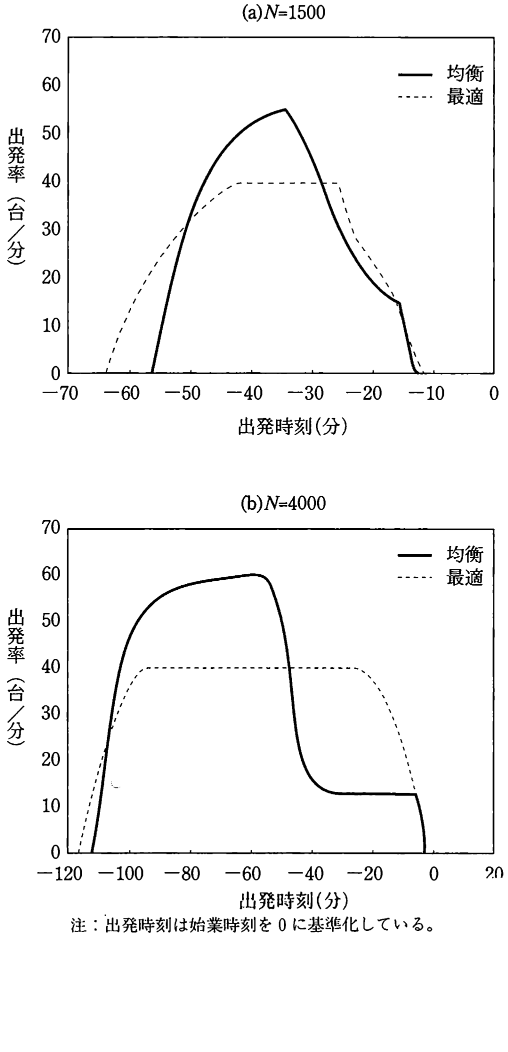
ドライバーの走行時間の時間価値αは，日本交通政策研究会［1988］による計測例を参考に，2000円/時とした。早着および遅着の時間価値に関しては，

日本を対象として本モデルと整合的な計測を行った例を知らない。そこで，しばしば引用されるSmall［1982］の計測例における走行時間価値との比率を参考にして$\beta/\alpha=0.4$，$\gamma/\alpha=2.1$とした。

６．２ 均衡解と最適解の比較

図５には，総通勤者数Nが1500と4000の２通りのケースについて，均衡解

図５ 均衡および最適な出発分布

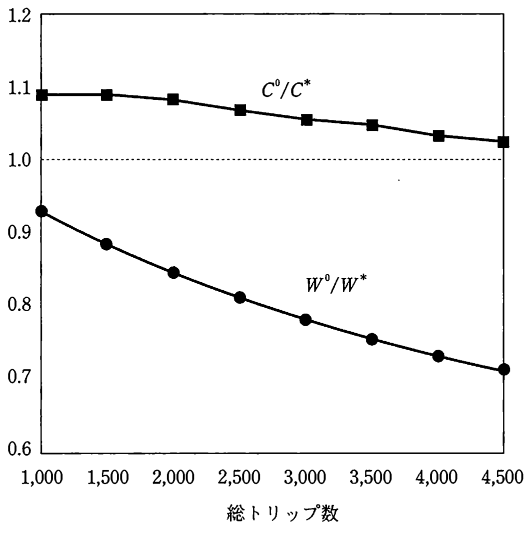


注：出発時刻は始業時刻を０に基準化している。

と最適解のもとでの出発時刻分布からボトルネック容量を超過しており，渋滞が発生している。しかし最適では，ボトルネック容量に達するまでは単調に増加するものの，そこまで達すればボトルネック容量に等しい率で出発する状態が継続する。図 5 (a)における出発分布の形状はHenderson [1985] が導いたものと似ている。この場合，総交通量が少なく渋滞は軽微なので，非渋滞領域における混雑の影響が支配的なのである。一方，図 5 (b)の出発分布はボトルネックからの待ち行列にもとづくArnott et al. [1990] で導かれたものによく似ている。すなわち早着時間帯については一定の高い出発率が続き，遅着時間帯にスイッチした直後から低い率で一定の率で出発する状態が継続する。この場合は，激しい渋滞が生じるので，ボトルネックからの渋滞列において費やす時間の項が支配的となったためである。

本モデルにおいては総トリップ数が固定されているので，道路利用に関する社会的厚生は総トリップ費用（(15)式で表されるW）で表される。一方，利用者の私的厚生は私的トリップ費用（均衡解のもとでは(12)式のC^*，最適解のもとでは料金込みの額である(16)式のC^0）で表される。図 6 には，総トリ

図 6　私的厚生と社会的厚生の変化



ップ数の変化が，均衡解と最適解のもとでの私的厚生及び社会的厚生に及ぼす影響を図示している。図をみるとC^0/C^*の値はつねに1より大きいが，総トリップ数が増えるともにその値は減少している。すなわち渋滞が激しくなるほど，料金無しの場合に比べて最適なピークロード料金導入による私的厚生の低下割合が減少する。一方，W^0/W^*の値は総トリップ数が増加するにしたがい，急速に低下している。すなわち混雑の激しい状況であるほど，ピークロード料金導入による社会的トリップ費用の節約額が大きくなる。

7. おわりに

本章では，動的な現象である交通渋滞を記述するモデルを提示し，それを用いて渋滞する道路の効率的な利用をめざした料金政策の分析を行った。まずこの問題に関連する従来の経済学的研究を批判的に検討し，道路の走行費用は(断面交通量との関係からではなく）トリップに対して定式化すべきこと，交通渋滞の分析を行うためにはボトルネックを考慮した動学的な分析が必要であることを指摘した。そして渋滞の生ずる場合の道路走行費用を定義するとともに，衝撃波の理論にもとづいて，交通渋滞の時間的推移を記述する動学モデルを定式化した。このようなモデルを，朝の通勤ラッシュアワーにおける渋滞問題に適用し，利用者均衡と最適な道路利用を導いた。ここで得られた結果は次のとおりである。

①トリップに関して定義された走行費用関数は，渋滞が生じていたとしても反転しない。

②朝のラッシュアワーにおける最適な道路利用を達成するためには，非渋滞流に対して静的外部効果を内部化しながら，渋滞を発生させないよう時刻ごとに変動するピークロード料金を課する必要がある。

③均衡において，激しい渋滞が発生する場合，ピークロード料金による利用者の厚生低下分は小さくなり，渋滞解消による社会的便益は大きくなる。すなわちピークロード料金は，私的厚生の面でも，相対的に有利になる。

本章のモデルは，交通量−速度の物理的関係にもとづくHenderson流の解と，ボトルネックの待ち行列にもとづくVickrey流の解を，それぞれ特殊ケースと

して含んでいる。

本章で導いたような，時々刻々と変動する料金システムを実施することは，現状では困難と思われる。したがって厳密には最適ではないが，実行可能な次善の料金システムを考案し，その効果を分析することが今後の課題として挙げられる[6)]。ただし次善のシステムが最適解に比べてどの程度有効かを評価するためにも，ここで導いた最適解は重要な情報になる。

[注]

本章は主としてMun［1999］にもとづいている。その論文に対して東京大学の桑原雅夫教授より重要なご指摘をいただいたが，それを受けて(9)～(10)式に関する議論を追加するとともにモデルを修正している。後半の数値計算は修正されたモデルにもとづいてやり直している。また旧稿に対して，山田浩之教授，松澤俊雄教授，秋山孝正教授よりコメントをいただいた。ここに記して謝意を表する。

1）最近になって，経済学者の間でも費用曲線が反転するという説の矛盾を指摘する議論が次々と提示されるようになった（例えばHills［1993］，Small and Chu［1997］，Verhoef［1998］など）

2）本章において，渋滞は局地的な交通量-速度（q-V）関係にもとづいて定義したが，経済学の文献において「超混雑」は費用曲線の反転する状況を表す場合が多い。q-V関係と費用曲線は一対一に対応するものではないので，それらを区別するため，本章では反転した費用曲線にもとづく理論について述べる場合は「超混雑」，それ以外の場合は「渋滞」と呼ぶ。

3）ボトルネック・モデルに関する最新の研究動向はArnott et al.［1995］において総括されている。

4）(9)式の両辺をtについて微分し，(5a)式の関係を用いることにより，次が得られる。

$$\dot{J}(t)=\dot{H}(t_N)\left\{1-\frac{\dot{J}(t)}{V_N(Q(t))}\right\}$$

$$=\frac{-G(t_N)}{1-\dfrac{G(t_N)}{V_N(Q(t))}}$$

ここに$t_N=t+\dfrac{L-J(t)}{V_N(Q(t))}$である。さらに(3)式を代入して整理すると(10)式が得られる。

5）朝のラッシュアワーを対象とした分析は，Mahmassani and Herman [1984]，Newell [1988]，Chu [1993] [1995]，坂下 [1994] らによっても行われている。Mahmassani and Herman [1984] は，渋滞の可能性を含んだ走行費用関数を用いて出発時刻を内生化した均衡モデルを定式化している。このモデルは，均一な道路区間を対象としているにもかかわらず，均衡において渋滞が生じるとしている。しかしNewell [1988] も指摘したように，ボトルネックのない道路区間では渋滞は起こりえない。このようなモデルにもとづく分析は，いくつかの奇妙な結果を導くことがChu [1993] によっても示されている。Newell [1988] は，Kinematic wave理論に沿って厳密に定式化されたモデルにもとづいて利用者均衡および社会的に最適な出発時刻分布を導いている。しかし均一な道路区間を対象としているので，渋滞に関する分析は行われていない。坂下 [1994] は，Mahmassani and Hermanとほぼ同様のモデルにもとづいて最適な出発時刻分布を導いている。その結果，最適な交通量は時間を通じて一定であり，それは道路区間の容量に等しいという結果を得ている。さらにChu [1995] は，Hendersonのモデルにおける走行費用を到着地の交通量の関数として再定義し，同様の分析を行った。しかし交通流のモデルとしてそのような費用関数の正当性は疑問である。いずれにせよ，以上のモデルは，ボトルネックのない均一な道路区間を対象としており，渋滞現象を明示的に分析することはできない。

6）Arnott et al. [1990] は，単純なボトルネックモデルにもとづいて次善の料金を導いている。