Canonical systems arising from Dirichlet polynomials [1]

東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻　鈴木正俊 (Suzuki, Masatoshi)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1. 導入

この記事では [7] および [4, 5, 6] の一般化に関連した考察を述べる. 数理研での講演の際にも述べたように, 結果としては未だ完結したものではないので, 進行中の研究に関する中間報告とご理解頂きたい.

実軸上で実数値をとる整関数はしばしば実整関数（real entire function）と呼ばれる. この記事の背景になっているのは, 種々のゼータ関数に対する Riemann 予想の類似を念頭において, 実軸上にのみ零点をもつ実整関数を, 後述する正準系と呼ばれる常微分方程式の系を利用して理解しようとする試みである.

大域ゼータ関数から生ずる正準系については, Riemann ゼータ関数の場合を扱った [3] の一般化として [8] で詳しく論じている. それに対して, [7] および [4, 5, 6] は, 単独の有限素点に関する局所ゼータ関数から生ずる正準系を論じたものと言える. 単独の無限素点に関する局所ゼータ関数（ガンマ関数）に関係した正準系は Burnol [1] およびそこで参照されている彼の関連業績で詳しく扱われており, 上で挙げた筆者の一連の著作のベースにもなっている.

大域ゼータ関数から生ずる正準系を調べるのは難しいので, [7] と [8] の間を埋めるものとして, 複数の有限素点に関する局所ゼータ関数の有限積から生ずる正準系や, 無限素点と有限素点に関する局所ゼータ関数の積に関連した正準系の様子を調べる事で大域的な場合の研究のヒントにしたいが, [7] および [4, 5, 6] の方法では, 単独の有限素点に関する局所ゼータ関数のみしか扱えない.

そこで今回は, [7] および [4, 5, 6] の方法を, 複数の有限素点に関する局所ゼータ関数の有限積から生ずる正準系も扱えるように改良する方法をひとつ提案したい (§5). 以下の本文では説明の便宜のため [4, 5, 6] と重複する箇所がある点を御容赦頂きたい.

2. Hermite–Biehler クラスの整関数

大域的な場合も局所的な場合も, 我々はゼータ関数と正準系を結びつけるための道具として, Hermite–Biehler クラスという整関数のクラスを用いる. それは整関数 F で

(i) 虚部が正である任意の複素数 z に対して $|F^\sharp(z)| < |F(z)|$ が成り立ち, かつ
(ii) z が実数ならば $F(z) \neq 0$,

であるもの全体の成す族であり, 以下では $\mathbb{HB}$ で表す. ここで, $F^\sharp(z) := \overline{F(\bar{z})}$ とした. この記号は以下でも用いる.

整関数 E が $\mathbb{HB}$ に属すとき,

$$A(z) := \frac{1}{2}(E(z) + E^\sharp(z)), \qquad B(z) := \frac{i}{2}(E(z) - E^\sharp(z))$$

[1] この研究は二国間交流事業「多変数ゼータ関数とその応用」および科学研究費補助金・若手研究 (B)（研究代表者：鈴木正俊, 研究課題番号：25800007）の助成を受けています.

は共に実整関数（$F = F^\sharp$ を満たす整関数. つまり, 実軸上で実数値をとる整関数）であり, 零点はすべて 1 位の実零点である. また, さらに $E^\sharp(z) = E(-z)$ ならば, $A(z)$ は偶関数, $B(z)$ は奇関数である.

典型的な $\mathbb{HB}$ の元として, 指数関数 $E(z) = \exp(-iaz)$ $(a > 0)$ が挙げられる. このとき, $E^\sharp(z) = \exp(iaz) = E(-z)$ であり,

$$A(z) = \cos(az), \qquad B(z) = \sin(az)$$

である. つまり, $\mathbb{HB}$ の元 E は指数関数の類似であり, E に付随する A, B は余弦関数, 正弦関数の類似である. この事は, $\mathbb{HB}$ の各元に対して定義される一般 Fourier 変換に関して, 通常の Paley–Wiener 空間の類似を考えるとより明確になるが, 今回はその事には触れない.

ここで, 実整関数 F の零点がすべて 1 位の実零点であるための必要条件, および十分条件について考える.

もし $F(z) = A(z)$ または $F(z) = B(z)$ となるような $E \in \mathbb{HB}$ が存在すれば, 上で述べたように, F の零点はすべて 1 位の実零点だから, このような $E \in \mathbb{HB}$ の存在は実整関数 F の零点がすべて 1 位の実零点であるための十分条件である. 逆に, F に適当な条件を課せば, このような $E \in \mathbb{HB}$ の存在は必要条件であることも言える.

この事を踏まえると, $F = \frac{1}{2}(E + E^\sharp)$ または $\frac{i}{2}(E - E^\sharp)$ という分解が与えられたとき, $E \in \mathbb{HB}$ であることを確かめるための規準に興味が持たれる. 我々はそういった規準を, 後述する正準系の理論を用いて与えることを考える.

ここで一つ注意しておくと, 与えられた整関数 F の 1 階導関数 F' を用いて $E_0 := F + iF'$, $E_1 := -iF + F'\,(= -iE_0)$ と定義すると,

$$F = \frac{1}{2}(E_0 + E_0^\sharp) = \frac{i}{2}(E_1 - E_1^\sharp)$$

が成り立つから, 上記のような分解はいつでも可能であり, しかも $G = G^\sharp$ を満たす任意の整関数について,

$$F = \frac{1}{2}((E_0 + iG) + (E_0 + iG)^\sharp) = \frac{i}{2}((E_1 + G) - (E_1 + G)^\sharp)$$

が成り立つから, そういった分解を与える整関数 E はいつでも無数にとれる.

3. 正準系

3.1. 定義. 有限または無限の半開区間 $I = [t_1, t_0)$ $(-\infty < t_1 < t_0 \leqslant \infty)$ と I 上で定義された 2 次の実対称行列に値をもつ行列値関数 $H : I \to \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ が与えられているとき, $z \in \mathbb{C}$ でパラメータ付けられた 2×1 ベクトル値関数 $X(t)$ を未知関数とする I 上の 1 階線形常微分方程式系

$$X'(t) + zJH(t)X(t) = 0, \quad t \in I, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} A(t,z) \\ B(t,z) \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

を擬正準系（quasi-canonical system）と呼ぶ. さらに

- $H(t)$ は I 上の Lebesgue 測度 0 の部分集合を除いて半正定値であり,
- $H(t)$ は I の任意の Lebesgue 測度が正の部分集合上で恒等的に 0 でなく,
- $H(t)$ は I の任意のコンパクト部分集合上で可積分

であるとき, (3.1) を正準系（canonical system）と呼ぶ. また, 行列値関数 $H(t)$ を（擬）正準系のハミルトニアンと呼ぶ. ただし, 正準系（canonical system）という用語は既存のものだが, 擬正準系（quasi-canonical system）という用語は [4, 5, 6, 7, 8] だけのものなので, 文献を調べるときには注意して欲しい. また, 正準系に関する基本的文献としては, 例えば [7, 8] の文献表を御覧頂きたい.

3.2. 正準系の解. $X(t) = {}^t(A(t,z), B(t,z))$ を区間右端で境界条件

$$\lim_{t \nearrow t_0} {}^tX(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を満たすある正準系の解とする. すると, $A(t,z)$ と $B(t,z)$ は固定された t について z の整関数で, $E(t,z) := A(t,z) - iB(t,z)$ は $\mathbb{HB}$ に属す.

逆に, L. de Branges の 1960 年前後の仕事により, 与えられた $E \in \mathbb{HB}$ に対して, ある $I = [t_1, t_0)$ 上で定義されたハミルトニアン $H(t) \geqslant 0$ が存在して, E はその $H(t)$ から定まる正準系の解 $X(t) = {}^t(A(t,z), B(t,z))$ によって

$$E(z) = A(t_1, z) - iB(t_1, z)$$

と復元される事が知られている. つまり, $\mathbb{HB}$ に属す整関数と正準系のハミルトニアンはほぼ等価な対象である.

3.3. 方針の選択. こういった状況を踏まえると, 整関数 E がクラス $\mathbb{HB}$ に属すことを証明するために, 対応するハミルトニアンを利用できないかと考えられる. そのための具体的方針としては,

(A) $E \in \mathbb{HB}$ を認めた場合に対応すべき $H(t)$ の具体形を求め, （$E \in \mathbb{HB}$ を忘れて）$H(t)$ に付随する正準系の解 $X(t) = {}^t(A(t,z), B(t,z))$ を求めて, ある $t \in I$ に対して $E(z) = A(t,z) - iB(t,z)$ である事を示す.

(B) ある $t \in I$ に対して $E(z) = A(t,z) - iB(t,z)$ であるような解を持つ擬正準系（つまり $H(t)$）を構成し, $H(t)$ が I 上で正定値である事を示す.

などが考えられる. (A) の方針だと, 従来の構成法では $H(t)$ の具体的な性質がよく分からないため, 解の構成やその性質を調べることが難しく, $E(z) = A(t,z) - iB(t,z)$ である事は示せそうにない. 実際, 具体形が知られている E と $H(t)$ の組は, E が多項式, 指数関数, K ベッセル関数の線形結合の場合などのわずかな場合しかない.

いっぽう, (B) の方針だと, 従来の $H(t)$ の構成法は $E \in \mathbb{HB}$ に対してしか適用できないことに加え, 一般の整関数 E に対しては, それを解から復元するような擬正準系が存在するかどうかも分からないという問題がある.

しかしながら, Burnol [1] の方法を利用すると, 大域ゼータ関数や局所ゼータ関数に関連した特殊な整関数 E については (B) の方針を推し進めることができる.

4. ハミルトニアン $H(t)$ の構成

4.1. 大域ゼータ関数の場合. 簡単のため Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の場合のみを扱う.

$$F(z) = \xi(1/2 - iz), \quad \xi(s) = s(s-1)\,\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

とする. $E(z) = \xi(1/2 - iz) + \xi'(1/2 - iz)$ とおくと $F = \frac{1}{2}(E + E^\sharp)$ である. Lagarias [2] によれば, $F(z)$ の零点がすべて実零点（Riemann 予想）でありしかも 1 位であること

と, E が $\mathbb{HB}$ に属すことは同値である．しかし, $E \in \mathbb{HB}$ を仮定しても, 対応すべき $H(t)$ の具体形や性質はよく分からない．そこで, 正の実数 ω, 自然数 ν に対して

$$F(z) = \frac{1}{2}(\xi(1/2+\omega-iz)^\nu + \xi(1/2-\omega-iz)^\nu)$$

を考えてみる．これは ω が十分小さいとき $\xi(s)^\nu$ を近似し, $E(z) = \xi(1/2+\omega-iz)^\nu$ とおくと $F = \frac{1}{2}(E+E^\sharp)$ であり, 任意の $\nu\omega > 1$ を満たす ω, ν について, $E \in \mathbb{HB}$ である事と Riemann 予想は同値である．

そして, $\nu\omega > 1$ という条件のもと, $E(z) = \xi(1/2+\omega-iz)^\nu$ が $\mathbb{HB}$ に属すことを仮定することなく, 任意の $t \geqslant 0$ について $L^2(-\infty, t)$ 上のある Hilbert–Schmidt 型の積分作用素 $\mathsf{K}[t]$ が定義できる．これを用いて $I = [0,\infty)$ 上の関数を

$$\gamma(t) = \left(\frac{\det(1+\mathsf{K}[t])}{\det(1-\mathsf{K}[t])}\right)^2 \tag{4.1}$$

により定め, $H(t) = \mathrm{diag}(1/\gamma(t), \gamma(t))$ と定義すると, $H(t)$ は, 少なくとも十分小さな $T > 0$ に対して, $[0,T)$ 上で well-defined で, $E(z) = \xi(1/2+\omega-iz)^\nu$ は $H(t)$ で定まる $[0,T)$ 上の擬正準系のある解の $t=0$ での値から復元される．

このとき, $E \in \mathbb{HB}$ である事は, $H(t)$ が $[0,\infty)$ 全体へ well-defined に延長され, 付随する正準系の解が $t = \infty$ で適当な境界条件を満たすことと同値になる [3, 8].

4.2. **有限素点での局所ゼータ関数の場合．** 有限素点に関する局所ゼータ関数 $\zeta_p(s)$ は多くの場合, 定数項が 1 のモニック多項式 $Q_p(x) \in \mathbb{C}[x]$ により

$$\zeta_p(s) = Q_p(p^{-s})$$

と表され, その零点がすべて純虚数であるという Riemann 予想の類似は Ramanujan 予想と呼ばれる．以下, $Q_p(x)$ は実数係数で, 次数は偶数 $(= 2g)$ であり, 関数等式 $x^{2g}Q_p(x^{-1}) = Q_p(x)$ を満たすと仮定する．このとき, Dirichlet 多項式

$$E(z) = p^{-igz}Q_p(p^{iz}) + i\frac{d}{dz}(p^{-igz}Q_p(p^{iz}))$$

を考えると, $E \in \mathbb{HB}$ は $\zeta_p(s)$ が Ramanujan 予想を満たし 2 位以上の零点を持たないことと同値である．

そして, $Q_p(x)$ の係数から定まるある $2g+1$ 次の実正方行列 K と

$$J_n := \left[\begin{array}{c|c} j_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]_{2g+1}, \qquad j_n := \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}_n.$$

を用いて, $I = [0, g\log p)$ 上の局所定数関数を

$$\gamma(t) = \frac{\det(I+KJ_{n-1})\det(I+KJ_n)}{\det(I-KJ_{n-1})\det(I-KJ_n)} \quad \text{if} \quad \frac{n-1}{2}\log p \leqslant t < \frac{n}{2}\log p \tag{4.2}$$

により定め, $H(t) = \mathrm{diag}(1/\gamma(t), \gamma(t))$ と定義すると, $H(t)$ は少なくとも $[0, \frac{1}{2}\log p)$ 上では well-defined で, E は $H(t)$ で定まる $[0, \frac{1}{2}\log p)$ 上の擬正準系のある解の $t=0$ での値から復元される．

このとき, $E \in \mathbb{HB}$ である事は, $H(t)$ が $I = [0, g\log p)$ 全体で well-defined かつ正定値であることと同値である [7].

4.3. 局所・大域の比較から. 上述した $H(t)$ の構成では, 局所大域間に類似性が認められる. どちらも区間 I を十分小さくとることで $E \in \mathbb{HB}$ を仮定することなく構成でき, $H(t)$ は対角行列値であり, 対角成分を与える (4.1) と (4.2) も非常に似ている. そして, $E \in \mathbb{HB}$ には, H の定義区間 I を最大限にとれることが必要なことも共通している.

いっぽう, 違いとして顕著なのは, 局所の場合は ζ_p から実正方行列 K が直接作られているのに対し, 大域の場合はゼータ関数 ζ をそれの高次ベキ ζ^ν の近似で置き換えたものに対してしか積分作用素 $\mathsf{K}[t]$ が構成できてきない点である. この違いが単に技術的なものなのか, 本質的な違いなのかは現時点では定かではない. 例えば, Burnol [1] は無限素点の局所ゼータ関数に付随する正準系を扱ったものと見なせるが, 正準系の解が局所ゼータ関数を復元する形にはなっていない.

こういった状況に, 大域的ゼータ関数が局所ゼータ関数の積であることを考え合わせると, 局所と大域の中間的な対象である局所ゼータ関数の有限積に対して, [3, 7, 8] に類似の方法で $H(t)$ の構成が可能かどうかに興味が持たれる. しかし, 実正方行列 K や積分作用素 $\mathsf{K}[t]$ にあたるものの構成がこの場合はうまくゆかない.

そこで今回は, 筆者が局所ゼータ関数の場合に [4] から [5, 7] へ至る途中で考察した, 実正方行列 K を経由せずに, $H(t)$ をそれから定まる擬正準系のある解 $X(t)$ と共に, $t=0$ からより大きな t に向けて順に作っていく方法を用いて, 局所ゼータ関数の有限積に対応する $H(t)$ を構成することを試みる（この方法は [7, Theorem 6.1] にその名残りが残っている）.

5. Dirichlet 多項式から生ずる正準系

前置きが長くなったが, 本論となる以下では, 次のような Dirichlet 多項式について, それを解から復元するような擬正準系を構成する方法について述べる:

$$E(z) = \sum_{n=1}^{N}\Big(c(n)e^{iz\lambda(n)} + c(-n)e^{-iz\lambda(n)}\Big) + c(N+1), \tag{5.1}$$
$$c(\pm n) \in \mathbb{R}, \quad \lambda(1) > \lambda(2) > \cdots > \lambda(N) > \lambda(N+1) = 0.$$

この様な Dirichlet 多項式の典型例として, 一般約数関数

$$\prod_{p|N}\left(1 + p^{-s} + \cdots + p^{-s\cdot \mathrm{ord}_p(N)}\right) = \sum_{d|N} d^{-s} = \sigma_{-s}(N)$$

から得られる Dirichlet 多項式

$$E(z) = N^{-iz/2}\sigma_{iz}(N) + i\frac{d}{dz}\left(N^{-iz/2}\sigma_{iz}(N)\right)$$

が挙げられる. 定義から, $\sigma_{-s}(N)$ の複素変数 s の関数としての零点はすべて 1 位かつ純虚数で, そのことから $E \in \mathbb{HB}$ が従う. ゆえに E を解の特殊値として復元するような正準系の存在がいえるので, それを具体的に構成しようというのである.

5.1. 構成法. まず, 定義 (5.1) に現れる非負整数 N, 非負実数 $\lambda(n)$ について, $N_0 = N$, $\lambda_0(n) = \lambda(n)$ とおき, 次の Dirichlet 多項式の組を考える:

$$A_0(z) = \frac{1}{2}(E(z) + E^\sharp(z)) = \sum_{n=1}^{N_0} a_0(n)\cos(z\lambda_0(n)) + a_0(N_0+1),$$
$$B_0(z) = \frac{i}{2}(E(z) - E^\sharp(z)) = -\sum_{n=1}^{N_0} b_0(n)\sin(z\lambda_0(n)).$$

ここで $a_0(n)=c(n)+c(-n)$, $b_0(n)=c(n)-c(-n)$ であり, $N_0=0$ なら $A_0(z)=a_0(1)$, $B_0(z)=0$ と理解する．また, 係数を実数としているので $E^\sharp(z)=E(-z)$ だから, A_0 は偶数関数, B_0 は奇関数である.

次に, 与えられた実数列 $\{a_k(n)\}_{n=1}^{N_k+1}$, $\{b_k(n)\}_{n=1}^{N_k}$, $\{\lambda_k(n)\}_{n=1}^{N_k}$ から新たな実数列 $\{a_{k+1}(n)\}_{n=1}^{N_{k+1}+1}$, $\{b_{k+1}(n)\}_{n=1}^{N_{k+1}}$, $\{\lambda_{k+1}(n)\}_{n=1}^{N_{k+1}}$ を以下の手順で定める.

まず, $\{X_{k+1}(n)\}$, $\{Y_{k+1}(n)\}$ を未知の実数, t_k を与えられた非負実数として,

$$\begin{aligned} A_{k+1}(t,z) &= \sum_{n=1}^{N_k+1} X_{k+1}(n)\cos(z\Big(\lambda_k(n)-(t-t_k)\Big)) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{N_k} X_{k+1}(-n)\cos(z\Big(-\lambda_k(n)-(t-t_k)\Big)), \\ B_{k+1}(t,z) &= \sum_{n=1}^{N_k+1} Y_{k+1}(n)\sin(z\Big(\lambda_k(n)-(t-t_k)\Big)) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{N_k} Y_{k+1}(-n)\sin(z\Big(-\lambda_k(n)-(t-t_k)\Big)), \end{aligned}$$

と定義する．但し, $N_k=0,1$ のときは, 右辺の 2 項目の和は 0 と約束する．この時点では t_k は何でも良いが, 後で選び方を指定する．そして, $\{X_{k+1}(n)\}$ と $\{Y_{k+1}(n)\}$ を

$$\begin{aligned} A_{k+1}(t_k,z) &= \sum_{n=1}^{N_k} a_k(n)\cos(z\lambda_k(n)) + a_k(N_k+1), \\ B_{k+1}(t_k,z) &= -\sum_{n=1}^{N_k} b_k(n)\sin(z\lambda_k(n)), \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} X_{k+1}(n) &= \frac{a_k(1)}{b_k(1)}\cdot Y_{k+1}(n), \quad 1\leqslant n\leqslant N_k+1, \\ X_{k+1}(-n) &= \frac{a_k(1)}{b_k(1)}\cdot Y_{k+1}(-n), \quad 2\leqslant n\leqslant N_k \end{aligned} \tag{5.3}$$

を満たす定数として定める．ここで, $N_k=0$ のときは (5.2) の右辺の和は 0 とし, $N_k=0,1$ のとき (5.3) の 2 行目の関係式は無いものと約束する．このとき $a_k(1)b_k(1)\neq 0$ ならば, $\{X_{k+1}(n)\}$ と $\{Y_{k+1}(n)\}$ はこれらの関係式から t_k の値によらずに一意に定まる. ここで,

$$\delta_k := \frac{\lambda_k(1)-\lambda_k(2)}{2} \quad (\text{if } N_k\geqslant 1) \qquad := 0 \quad (\text{if } N_k=0), \tag{5.4}$$

および $t_{k+1}:=t_k+\delta_k$ と定義し, すでに定まった $\{X_{k+1}(n)\}$, $\{Y_{k+1}(n)\}$ の値を代入した $A_{k+1}(t,z)$, $B_{k+1}(t,z)$ を用いて, 実数列 $\{a_{k+1}(n)\}_{n=1}^{N_{k+1}+1}$, $\{b_{k+1}(n)\}_{n=1}^{N_{k+1}}$, $\{\lambda_{k+1}(n)\}_{n=1}^{N_{k+1}}$

を

$$A_{k+1}(t_{k+1},z)=\sum_{n=1}^{N_{k+1}} a_{k+1}(n)\cos(z\lambda_{k+1}(n))+a_{k+1}(N_{k+1}+1),$$

$$B_{k+1}(t_{k+1},z)=-\sum_{n=1}^{N_{k+1}} b_{k+1}(n)\sin(z\lambda_{k+1}(n))$$

により定める. ただし, $\{\lambda_{k+1}(n)\}$ は

$$\lambda_{k+1}(1)>\lambda_{k+1}(2)>\cdots>\lambda_{k+1}(N_{k+1})>\lambda_{k+1}(N_{k+1}+1)=0$$

となるように番号付ける.

このようにして, $\{a_{k+1}(n)\}$, $\{b_{k+1}(n)\}$, $\{\lambda_{k+1}(n)\}$ と t_{k+1} が, $a_k(1)b_k(1)\neq 0$ という条件のもと, 与えられた $\{a_k(n)\}$, $\{b_k(n)\}$, $\{\lambda_k(n)\}$ および t_k に依存して定まる.

いま, Dirichlet 多項式 E から定まる $\{a_0(n)\}_{n=1}^{N_0+1}$, $\{b_0(n)\}_{n=1}^{N_0}$, $\{\lambda_0(n)\}_{n=1}^{N_0}$ に対して, $t_0=0$ として $\{a_k(n)\}_{n=1}^{N_k+1}$, $\{b_k(n)\}_{n=1}^{N_k}$, $\{\lambda_k(n)\}_{n=1}^{N_k}$ を上記の手順で帰納的に定めたとき, 任意の $1\leqslant k\leqslant K$ について $a_{k-1}(1)b_{k-1}(1)\neq 0$ であると仮定する.

このとき, $I=[0,t_K)$ 上の 2×1 ベクトル値関数 $X(t)$ を

$$X(t)=\begin{bmatrix}A(t,z)\\B(t,z)\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}A_k(t,z)\\B_k(t,z)\end{bmatrix}\quad \text{if}\quad t_{k-1}\leqslant t<t_k.$$

により定める. さらに, I 上の局所定数値関数を

$$\gamma(t)=\frac{a_{k-1}(1)}{b_{k-1}(1)}\quad \text{if}\quad t_{k-1}\leqslant t<t_k$$

により定め, $H(t)=\mathrm{diag}(1/\gamma(t),\gamma(t))$ とおく. すると, $X(t)$ は連続かつ区分的に微分可能で, $I=[0,t_K)$ 上の擬正準系

$$X'(t)+zJH(t)X(t)=0\quad (z\in\mathbb{C})$$

を満たすことが簡単に確かめられる. また, 定義により, この解 $X(t)$ が E を

$$E(z)=A(0,z)-iB(0,z)$$

と復元することは明らかである.

5.2. **結果.** 上で述べたような構成の結果, Dirichlet 多項式 E がクラス $\mathbb{HB}$ に属するための必要条件や十分条件が, [7] と同様に, 正準系の言葉で述べられる. まず必要条件の一つとして次が得られる.

定理 1. Dirichlet 多項式 E が (5.1) の形で与えられ, クラス $\mathbb{HB}$ に属するものとする. このとき, 任意の非負整数 k について $a_k(1)b_k(1)\neq 0$ である. したがって,

$$t_\infty=\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k \tag{5.5}$$

とおいたとき, $X(t)$, $\gamma(t)$, $H(t)$ は $I=[0,t_\infty)$ 全体で定義される. すると, I 上で $\gamma(t)>0$ である. したがって, $H(t)$ は I 上で正定値で, $X(t)$ は $H(t)$ が定める I 上の正準系の解である.

注 1. [7, Theorem 6.1] により, ある $q>1$ に対して (5.1) で $\lambda(n)=(N-n+1)\log q$ であるならば, 上で構成した $H(t)$ は [7, Theorem 1.1] の $H(a)$ に $a=e^t$, $g=N$ という変数変換を経由して一致する.

いっぽう十分条件のひとつが, (5.5) で定義した t_∞ を用いて述べられる.

定理 2. Dirichlet 多項式 E が (5.1) で与えられ, 任意の $k \geqslant 0$ について $a_k(1)b_k(1) \neq 0$ であり, $E(0) \neq 0$, $[0, t_\infty)$ 上で $\gamma(t) > 0$ とする. さらに, $t_\infty = \lambda(1)$ が成り立つと仮定する. このとき $E \in \mathbb{HB}$ である.

この $t_\infty = \lambda(1)$ という条件は, t_∞ が取り得る最大値をとるという条件である. 実際, 定義 (5.4) より δ_k は非負なので, t_∞ は有限確定の値か $+\infty$ のいずれかである. ところが, $\{\lambda_k(n)\}$ の定め方から $\lambda_{k+1}(1) = \lambda_k(1) - \delta_k$ なので,

$$\sum_{k=0}^{K-1} \delta_k = \lambda_0(1) - \lambda_K(1) \leqslant \lambda_0(1) = \lambda(1)$$

である. したがって $t_\infty \leqslant \lambda(1)$ である. $\lambda(n) = (N - n + 1)\log q$ の場合には, $k > 2N$ ならば $\delta_k = 0$ で, $t_\infty = \lambda(1) = N \log q$ であることがわかる.

5.3. 今後の課題. 定理 1, 2 は [7, Theorem 1.2] と同様の方法で証明できる. つまり, これらの結果が得られる仕組みは [7] で扱った $\lambda(n) = (N - n + 1)\log q$ の場合とあまり変わりがない. 新しい要素は t_∞ という量である. これについて, $t_\infty = \lambda(1)$ が成り立つことが (5.1) で与えられた Dirichlet 多項式 E がクラス $\mathbb{HB}$ に属することの必要条件なのか否かは未解決の問題である.

筆者は当初, $E \in \mathbb{HB}$ ならば $t_\infty = \lambda(1)$ だろう, と予想して証明を試みたが成功しなかった. そこで, $E \in \mathbb{HB}$ であるが $t_\infty < \lambda(1)$, となるような例を見つけようと試みたが, 数値計算上はそれらしい例が見つかっても, 論理的に $t_\infty < \lambda(1)$ を示すことはできなかった. これが [7, 8] などと違って, 講演の際には結果を $E \in \mathbb{HB}$ であるための必要十分条件という形で述べられなかった理由である. 残念ながら現時点でも, $E \in \mathbb{HB}$ ならば $t_\infty = \lambda(1)$ が成り立つのか, それとも反例があるのかは分かっておらず, 真相の解明が待たれる状況である.

References

[1] J.-F. Burnol, Scattering, determinants, hyperfunctions in relation to $\Gamma(1-s)/\Gamma(s)$, *Rejecta Mathematica* **2** (2011), no. 1, 59–118, 出版前版は `http://arxiv.org/abs/math/0602425`

[2] J. C. Lagarias, Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions, *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, 365–377, *Springer, Berlin*, 2006.

[3] M. Suzuki, A canonical system of differential equations arising from the Riemann zeta-function, Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects, 397-436, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B34**, RIMS, Kyoto, 2012, 出版版の誤植などを修正したもの：`https://arxiv.org/abs/1204.1827`

[4] ———, 自己相反多項式と微分方程式の標準系, 数理研講究録 No.1806 解析数論–数論的関数の多重性に関連して (2012), 176-185.

[5] ———, 自己相反多項式の零点と微分方程式, 数理研講究録 No.1874 解析数論–近似と漸近的手法を通して見た数論 (2014), 125–134.

[6] ———, An inverse problem for a class of canonical systems, 数理研講究録 No.1898 解析的整数論–超越関数の数論的性質とその応用 (2014), 140–145.

[7] ———, An inverse problem for a class of canonical systems and its applications to self-reciprocal polynomials, to appear in Journal d'Analyse Math'ematique, 草稿：`https://arxiv.org/abs/1308.0228`

[8] ———, Hamiltonian systems arising from L-functions in the Selberg class, 草稿:`https://arxiv.org/abs/1606.05726`