リーマンゼータ関数の絶対収束領域における普遍性の非存在

東京理科大学理工学部教養　中村隆

1 導入と主結果

このセクションでは，まず Riemann ゼータ関数の普遍性の歴史ついて述べる．ゼータ関数の普遍性に関しては [1], [2], [4], を参照して頂きたい．

1.1 Voronin の普遍性定理

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ に対して，$\sigma > 1$ では

$$0 < \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta(\sigma)} \leq |\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma) < \infty$$

となる．この不等式において $\sigma > 1$ が 1 に充分近いときを考える．$\sigma \to 1+0$ であるとき，$\zeta(\sigma) \to \infty$ であるから，$|\zeta(s)|$ は 0 より大きい任意の値を取り得るのではと推測できる．この観察は正しく，実際にはそれより強い次の主張が成り立つ．

Theorem A (Bohr, 1911). $\delta > 0$ とする．$1 < \sigma < 1+\delta$ において $\zeta(\sigma+i\tau)$ は 0 でない任意の値を無限回取り得る．特に $\{\zeta(\sigma+i\tau) : \sigma > 1,\ \tau \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}$ で稠密である．

$1/2 < \sigma \leq 1$ においても同様な主張が成り立つ．

Theorem B (Bohr and Courant, 1914). 任意に固定した $1/2 < \sigma \leq 1$ に対し，集合 $\{\zeta(\sigma+i\tau) : \tau \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}$ で稠密である．

これらの稠密性定理に関連するものとして，(Bohr and Jessen, 1930, 32), (Jessen and Wintner, 1935) などがあるが，その詳細は省略する．Theorem B から約 60 年後，Voronin は次の定理を証明した．実際には Voronin は離散版ともいえるもう少し強い形の定理を証明したことを注意しておく．

Theorem C (Voronin, 1972). $1/2 < \Re(s_k) \leq 1,\ k = 1, \ldots, n$ を充たす任意に固定した相異なる $s_1, \ldots, s_n$ に対し，

$$\left\{ \left(\zeta(\sigma_1+i\tau), \ldots, \zeta(\sigma_n+i\tau) \right) : \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

は $\mathbb{C}^n$ で稠密である．さらに，任意に固定した $1/2 < \sigma \leq 1$ に対し，集合

$$\left\{ \left(\zeta(\sigma+i\tau), \zeta'(\sigma+i\tau), \ldots, \zeta^{(n-1)}(\sigma+i\tau) \right) : \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

は $\mathbb{C}^n$ で稠密である．

Theorem C は Theorem B の多次元化である．これを無限次元化，即ち関数空間への拡張したものが，次に述べる普遍性定理である．

meas(A) で集合 A の Lebesgue 測度とし，$\nu_T\{\ldots\} := T^{-1}\text{meas}\{\tau \in [0,T] : \ldots\}$, ただし $\ldots$ の部分には τ が充たす条件が書かれる．$D := \{s : 1/2 < \Re(s) < 1\}$ とし，K を D に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とする．

Theorem D (Voronin, 1975). $f(s)$ を K 上で連続で零点を持たず，K の内部で正則な関数とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left\{\max_{s\in K}\left|\zeta(s+i\tau) - f(s)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

この定理は普遍性定理（universality theorem）と呼ばれるものであり，おおまかに言えば，零点を持たない任意の正則関数は Riemann ゼータ関数の平行移動により一様に近似でき，しかも近似できる τ の密度は正であることを意味する．Voronin 自身が得た結果はこれより弱い形であることを注意しておく．

Theorem B ($\sigma \neq 1$ とする) と Theorem C は普遍性定理の系である．コンパクト集合 K を虚軸に平行な線分とすれば，次の主張も得られる．$1/2 < \sigma < 1$ を任意に一つ固定し，$f(t)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left\{\max_{t\in[a,b]}\left|\zeta(\sigma+it+i\tau) - f(t)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

$f(t)$ は $[a,b]$ 上で零点を持たないという仮定は必要ないことを強調しておきたい．

1.2 主結果

我々の主結果は次の絶対収束領域における普遍性の非存在である．講演では普遍性の存在が主定理であったが，その証明に誤りがあり，存在しないことが証明できた．

Theorem 1.1. $t \in [a,b]$, $b > a$ とする．集合

$$\left\{\zeta(\sigma+it+i\tau) : \sigma \geq 1,\ \tau \in \mathbb{R}\right\} \tag{1.1}$$

は $L^2[a,b]$ と $C[a,b]$ のどちらにおいても稠密でない．

つまり $1/2 < \sigma < 1$ においては $\zeta(\sigma+it+i\tau)$ は $L^2[a,b]$ と $C[a,b]$ の両方で稠密であるが，$\sigma \geq 1$ においてはそうではないことを示す．次の命題は関数空間の代わりに，$\mathbb{C}^n$ を考えると稠密になることを示している．

Proposition 1.2. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ は相異なるとする．このとき任意の $\delta > 0$ に対し，

$$\left\{\left(\zeta(\sigma+i\lambda_1+i\tau), \ldots, \zeta(\sigma+i\lambda_n+i\tau)\right) : 1 < \sigma < 1+\delta,\ \tau \in \mathbb{R}\right\} \tag{1.2}$$

は $\mathbb{C}^n$ において稠密である．さらに

$$\left\{\left(\zeta(\sigma+i\tau), \zeta'(\sigma+it), \ldots, \zeta^{(n-1)}(\sigma+i\tau)\right) : 1 < \sigma < 1+\delta,\ \tau \in \mathbb{R}\right\} \tag{1.3}$$

も $\mathbb{C}^n$ において稠密である．

即ち $\sigma \geq 1$ においては無限次元空間である $L^2[a,b]$ と $C[a,b]$ では $\zeta(\sigma+i\tau)$ は稠密にならないが，有限次空間 $\mathbb{C}^n$ では稠密になることを意味している．あるいは，n 点集合では $\zeta(\sigma+i\tau)$ は稠密になるが，線分 $[a,b]$ 上では稠密で無いことを意味している．Theorem D から $1/2<\sigma<1$ においては $\zeta(s+i\tau)$ は線分 $[a,b]$ 上で稠密であるだけでなく，補集合が連結なコンパクト集合 K で稠密になる．

上の命題から次の系を得る．いずれも新しい結果ではないが，新しい証明ではある．ゼータ関数の独立性は Hilbert 以来の問題であることを注意しておく．

Corollary 1.3. $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ は相異なるとし，$F_l,\ 0 \leq l \leq m$ が連続で

$$\sum_{l=0}^{m} s^n F_l\bigl(\zeta(s+i\lambda_1),\ldots,\zeta(s+i\lambda_n)\bigr)=0$$

が $s \in \mathbb{C}$ について成立するならば，F_l は $0 \leq l \leq m$ に対して恒等的に 0 である．さらに，上の式において $F_l(\zeta(s+i\lambda_1),\ldots,\zeta(s+i\lambda_n))$ を $F_l(\zeta(s),\zeta'(s)\ldots,\zeta^{(n-1)}(s))$ に置き換えても同じ主張が成り立つ．

論文 [3] では Riemann ゼータ関数しか扱っていないが，他のゼータや L 関数にも拡張することができる．しかしながら，Steuding [4] の L 関数の族や Selberg クラスより真に広くかつ意味のあるゼータや L 関数を扱えるかと問われたらそれは不明である．絶対収束領域における稠密性定理は解析接続する必要は無いので，より広いクラスが扱えるはずである．さらに極限定理と呼ばれるものを必要としないので，証明はかなり簡略化されることを強調しておく．

2 定理の証明

このセクションでは定理と命題の証明の概略について述べる．詳しい内容は [3] を参照して頂きたい．

2.1 Proof of Theorem 1.1

まず次の補題を証明する．

Lemma 2.1. $t \in [a,b],\ b>a$ とする．集合

$$\bigl\{\log\zeta(\sigma+it+i\tau) : \sigma>1,\ \tau\in\mathbb{R}\bigr\} \tag{2.1}$$

は $L^2[a,b]$ において稠密でない．

この補題を証明するため，H をヒルベルト空間とし，その内積を $\langle x,y\rangle$ と書き，ノルムを $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ で定義する．このとき次が成り立つ．

Lemma 2.2. $\{x_n(\sigma)\}$ を H 上の次を充たす列とする:
$\sigma \geq 1$ であるとき, 関数 $x_n(\sigma)$ はノルム $\|\cdot\|$ において連続であり，次を充たす定数 $M > 0$ と元 $0 \neq x \in H$ が存在すると仮定する:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big| \langle x_n(\sigma), x \rangle \big| \leq M \quad \textit{for all} \quad \sigma \geq 1.$$

このとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(\sigma)$, $|a_n| = 1$, $\sigma \geq 1$ の集合は H において稠密でない.

上の補題において $H = L^2[a, b]$ で場合を考える．$\sigma \in \mathbb{R}$，$z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\Delta_\sigma(z) := e^{-\sigma z} \int_a^b e^{-itz} dt = \big\langle e^{-\sigma z - itz},\, 1 \big\rangle$$

とする．明らかに $\|1\| \neq 0$ であり，さらに

$$\big| \Delta_\sigma(p_n) \big| = \frac{|p_n^{-ib} - p_n^{-ia}|}{p_n^\sigma \log p_n} \leq \frac{2}{p_n^\sigma \log p_n}.$$

である．よって全ての $\sigma \geq 1$ に対し

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big| \Delta_\sigma(p_n) \big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n^\sigma \log p_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n \log p_n}.$$

ここで部分和の方法と $\sum_{p \leq N} p^{-1} \log p = \log N + O(1)$ から

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq N} \frac{1}{p \log p} &= \sum_{p \leq N} \frac{\log p}{p} \frac{1}{\log^2 p} = \frac{1}{\log^2 N} \sum_{p \leq N} \frac{\log p}{p} + \int_2^N \frac{2}{u \log^3 u} \sum_{p \leq u} \frac{\log p}{p} du \\ &\ll \frac{1}{\log N} + \int_2^N \frac{\log u}{u \log^3 u} du \ll \int_2^N \frac{du}{u \log^2 u} \ll 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

よって Lemma 2.2 から級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n p_n^{-\sigma - it}$, $|a_n| = 1$, $\sigma \geq 1$ の集合は $L^2[a, b]$ において稠密でない. $\sigma > 1$ であるときは Kronecker の近似定理と次の右辺の級数表示

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log\big(1 - p^{-s}\big) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p^{ks}}, \qquad \sigma > 1, \tag{2.3}$$

が絶対収束することから，級数 $-\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - p_n^{-\sigma - it - i\tau})$, $\tau \in \mathbb{R}$, $1 < \sigma < 1 + \delta$ の全体は $L^2[a, b]$ で稠密でない．よって Lemma 2.1 は正しい.

以上が $\sigma > 1$ での議論であった．$\sigma = 1$ ではもう少し複雑になるが，基本的なアイデアは上に述べたことであるので，詳細は省略する.

2.2 Proof of Proposition 1.2

ここではProposition 1.2の証明について解説する．まず次の補題を必要とする．

Lemma 2.3. $\{x_n(\sigma)\}$ はヒルベルト空間 H 内の列で次を充たすとする．
(i) $\sigma \geq 1$ に対し，関数列 $x_n(\sigma)$ はノルム $\|\cdot\|$ について連続であり，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n(\sigma)\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n(1)\|^2 < \infty.$$

(ii) 任意の $0 \neq x \in H$ に対し，

$$\lim_{\sigma \searrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \big|\langle x_n(\sigma), x\rangle\big| = \sum_{n=1}^{\infty} \big|\langle x_n(1), x\rangle\big| = \infty.$$

このとき，任意の $h \in H$ と $\delta, \varepsilon > 0$ に対し，次を充たす $1 < \sigma_0 < 1 + \delta$ と $|a_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}$ が存在する

$$\left\| h - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(\sigma_0) \right\| < \varepsilon.$$

即ち，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(\sigma)$，ただし $|a_n| = 1$, $1 < \sigma < 1 + \delta$ の全体は H で稠密である．

この補題において $\sigma = 1$ である場合は，Bagchiの補題と呼ばれる．証明等は[1, Theorem 6.1.16]や[4, Theorem 5.4]などを参照していただきたい．上記の補題を適用することにより，集合

$$\left(\sum_p \frac{a_p p^{-i\lambda_1}}{p^\sigma}, \dots, \sum_p \frac{a_p p^{-i\lambda_n}}{p^\sigma} \right), \qquad |a_p| = 1$$

が $\mathbb{C}^n$ で稠密であることを示す．これには任意の $\|\overline{x}\| = 1$ に対して

$$\sum_p \frac{1}{p^\sigma} \big| x_1 p^{-i\lambda_1} + \cdots + x_n p^{-i\lambda_n} \big| \to \infty, \qquad \sigma \searrow 1. \tag{2.4}$$

であることを証明すればよい．$|y_l| \leq 1$, $1 \leq l \leq n$ であるとき

$$|y_1 + \cdots + y_n|^2 \leq |y_1 + \cdots + y_n| \cdot |1 + \cdots + 1| = n|y_1 + \cdots + y_n|.$$

が成り立つので，

$$\sum_p \frac{1}{p^\sigma} \big| x_1 p^{-i\lambda_1} + \cdots + x_n p^{-i\lambda_n} \big| \geq \frac{1}{n} \sum_p \frac{1}{p^\sigma} \big| x_1 p^{-i\lambda_1} + \cdots + x_n p^{-i\lambda_n} \big|^2$$

である．ここで右辺の対角成分と非対角成分にわけて考える．対角成分は

$$\sum_p \frac{1}{p^\sigma} \sum_{l=1}^{n} \big| x_l p^{-i\lambda_1} \big|^2 = \sum_p \frac{1}{p^\sigma} \sum_{l=1}^{n} \big| x_l \big|^2 = \sum_p \frac{1}{p^\sigma} \to \infty, \qquad \sigma \searrow 1$$

であり，非対角成分は本質的に

$$\sum_{1\le k\ne l\le n}\sum_{p}\frac{p^{i(\lambda_k-\lambda_l)}}{p^{\sigma}}$$

であるが，これは全ての $\sigma \ge 1$ に対して有界である．よって (2.4) を得る．Kronecker の近似定理と (2.3) の右辺の級数表示が絶対収束することを考慮に入れれば，Proposition 1.2 の前半が証明される．

後半部分は L を $x_l \ne 0$ である最大の添え字とするとき

$$\sum_{p}\frac{1}{p^{\sigma}}\left|x_1+x_2(-\log p)+\cdots+x_n(-\log p)^{n-1}\right| \gg \sum_{p}\frac{\log^L p}{p^{\sigma}}.$$

であることから証明できる．

参考文献

[1] Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-function*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[2] K. Matsumoto, *A survey on the theory of universality for zeta and L-functions*, Number theory, 95–144, Ser. Number Theory Appl., **11**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015. (arXiv:1407.4216).

[3] T. Nakamura, *Non universality of the Riemann zeta function when* $\sigma \ge 1$, preprint.

[4] J. Steuding, *Value Distributions of L-functions*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1877, Springer-Verlag, 2007.