Irrationality of special values of formal Laurent series represented by formal Mellin transform of G-functions

大阪大学理学研究科数学専攻 川島誠
Makoto Kawashima
Department of Mathematics,
Osaka University

概 要

p を素数とする. 本論説では代数体係数の形式的 Laurent 級数の特殊値で記述できる p 進数が, ある代数体に属さないための十分条件を与え, 特に「G-関数の形式的 Mellin 変換であらわされる Laurent 級数の特殊値」としてあらわされる, ある p 進数の族が上述の十分条件を満たすことを示す. 更にその応用として, p 進 Riemann ゼータ関数の正の整数点における特殊値と関連のある級数の特殊値の無理数性を証明する.

序論

0.1 p 進 Riemann ゼータ関数の正の整数点に於ける値の無理数性について

筆者の研究の動機は, p 進 Riemann ゼータ関数の特殊値の無理数性, 超越性を示すことにある. p 進 Riemann ゼータ関数の特殊値の性質について言及する前によく知られた複素数での Riemann ゼータ関数の特殊値の性質を纏めてみる. $\zeta(s) := \sum_{n1}^{\infty} n^{-s}$ で Riemann ゼータ関数を表すこととする. まず Riemann ゼータ関数の正の偶数点に於ける値の性質について思い出す.

定理 0.1. (Euler) m を自然数とする. この時, 次が成り立つ.

$$\zeta(2m) = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} B_{2n} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}. \tag{1}$$

Lindemann による 1882 年の仕事から π は超越数であることが知られているため, 定理 0.1 から, $\zeta(2m)$ は超越数であることがわかる. さて, $\zeta(s)$ の 3 以上の奇数点に於ける値は定理 0.1 のような明示的な表示が得られておらず, その性質は未だに謎が多い. それらに関して知られている結果は以下のものしかない.

定理 0.2. (Apéry, 1979) $\zeta(3)$ は無理数である.

定理 0.3. (Zudilin, 2001) $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ のいずれか一つは無理数である.

定理 0.4. (Bal-Rivoal, 2001) m を自然数とする. $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 V_m を

$$V_m := \mathbb{Q} + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Q}\zeta(2i+1)$$

とおく. この時

$$\dim_{\mathbb{Q}} V_m \geq \tfrac{1}{3}\log(2m+1) \tag{2}$$

が成り立つ. 特に $\{\zeta(2m+1) |\ m \in \mathbb{N}\}$ の中には無数に無理数が存在する.

定理 0.2, 0.3, 及び, 0.4 はいずれも, $\zeta(s)$ の 3 以上の奇数点に於ける値の級数表示, を基にした"良い近似"の構成により示された.

次に, p を素数とする. 上述の Riemann ゼータ関数の p 進類似として p 進 Riemann ゼータ関数がある. 上述の Riemann ゼータ関数の特殊値の性質に対する p 進類似は得られるであろうか? $\zeta_p(s)$ の正の整数点に於ける値の無理性, 超越性に関して知られている結果として以下のものがある.

定理 0.5. [3] [2] p, s を 2, 若しくは, 3 とする. この時 $\zeta_p(s) \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Q}$ が成り立つ.

定理 0.5 を示すためには, $\zeta_p(s)$ の無理数性を示すための"良い近似"を構成することでなされる. "良い近似"の意味は次節で説明する (cf. 補題 1.1). Calegari は「p 進 modular 形式を用いた $\zeta_p(s)$ の近似」を, Beukers は「Padé 近似を用いた $\zeta_p(s)$ の近似」を用いてそれぞれ"良い近似"を構成した. 本小論では定理 0.5 の Beukers による証明をより一般に適用するための試みとして行った. そのため定理 0.5 の $\zeta_3(2) \in \mathbb{Q}_3 \setminus \mathbb{Q}$ に関する, Buekres による, "良い近似"の構成を簡単に説明する. "良い近似"の構成のための重要な手順は次の 3 つである.

(ア) B_k を k 次ベルヌーイ数とし, $R_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left(-\frac{1}{z}\right)^{k+1}$ とおく. この時,

$$\zeta_3(2) = -\frac{2}{3}R_0\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

が成り立つ.

(イ) $R_0(z)$ に関する, 有理関数近似 (Padé 近似) を求める.

(ウ) (イ) で求めた有理関数近似に $z = \frac{1}{3}$ を代入することで $\zeta_3(2)$ の有理数近似が得られるが, それが $\zeta_3(2)$ の無理数性を与える"良い近似"であることを示す.

m を自然数とすると, (ア) はより一般に, $R_m(z) := \left(\frac{d}{dz}\right)^m R_0(z)$ に対して,

$$\zeta_3(m+1) \in \mathbb{Q}^* R_m\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

が成り立つことが知られている. このことから, $R_m(z)$ の有理関数近似を求めることで, $\zeta_3(m+1)$ の無理数性の証明が期待できるのである. 次に主定理を述べる.

本小論では Kubota-Leopoldt p 進 L 関数に自明指標を代入したものを p 進 Riemann ゼータ関数と呼んでいる.

0.2 主定理

主定理の主張を述べるために記号の準備を行う. p を素数とし, $\mathbb{C}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数閉方の p 進完備化とする. $\mathbb{C}_p$ の p 進付値を $|\cdot|_p : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $|p|_p = p^{-1}$ で定める. 埋め込み $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ を固定する. 埋め込み ι_p の $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}}[[\frac{1}{z}]]$) への延長も ι_p と書き, $g \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ (resp. $f \in \overline{\mathbb{Q}}[[\frac{1}{z}]]$) に対して, $\iota_p(g)$ (resp. $\iota_p(f)$) を g_p (resp. f_p) と書く. 分母関数 den とハウス関数 $\overline{|\cdot|}$ を次で定める.

$$\mathrm{den} : \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathbb{Q}}^n \longrightarrow \mathbb{N},$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n\alpha_i \text{ は任意の } 1 \leq i \leq n \text{ に対して代数的整数 }\},$$
$$\overline{|\cdot|} : \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ \alpha \mapsto \max_{\sigma\in\mathrm{Hom}(\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{C})} |\sigma(\alpha)|.$$

定義 0.6. K を代数体とし $C_1, C_2 > 0$ とする. 任意の $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, 次の条件 (i), (ii) を満たす $K[[z]]$ の元全体の集合を $\mathbf{G}(K, C_1, C_2)$ とかく.

(i) $\delta > 0$ で $\overline{|a_j|} \leq \delta C_1^j$ を満たすものが存在する,

(ii) 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\gamma(\epsilon) > 0$ で $\mathrm{den}(a_k)_{0\leq k\leq j} \leq \gamma(\epsilon) C_2^{j(1+\epsilon)}$ を満たすものが存在する.

この論説では $\mathbf{G}(K, C_1, C_2)$ の元を G-関数と呼ぶ. p-進収束半径を

$$r_p : \overline{\mathbb{Q}}[[z]] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\},\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \mapsto \limsup_k (|\iota_p(a_k)|_p)^{-1}$$

と定義し, 集合 $\{g(z) \in K[[z]] \,|\, r_p(g_p) \geq 1\}$ を $\mathcal{B}_{p,K}$ とかく. これらの記号の元, 主定理は次のように述べられる.

定理 0.7. p を素数とし, $g \in (\mathbf{G}(K, C_1, C_2) \cap \mathcal{B}_{p,K}) \setminus \overline{\mathbb{Q}}[\log(1+z), (1+z)^\alpha \,|\, \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}]$ とする. $r := r_p(g)$ とおく. $\alpha \in \{\alpha \in \mathbb{Q} \,|\, |\alpha|_p > 1\}$, に対して $\mathcal{M}(g)_p(\alpha)$ について

$$[K_p : \mathbb{Q}_p] r p^{\frac{2}{p-1}} |\alpha|_p^2 > e[K : \mathbb{Q}] \mathrm{den}(\alpha) \prod_{q|\mathrm{den}(\alpha), q:\mathrm{prime}} q^{\frac{1}{q-1}} \times \begin{cases} 16(C_1C_2)^3 & \text{if } 1 < C_1, \\ 16C_1^2C_2^3 & \text{if } \frac{1}{2} < C_1 \leq 1, \\ 4C_2^3 & \text{if } C_1 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

を仮定する. このとき $\mathcal{M}(g)_p(\alpha) \in K_p \setminus K$ が成り立つ.

注意 0.8. 定理 0.7 において値 $\mathcal{M}(g)_p(\alpha)$ は K_p の元に収束する.

序論の最後に以下の節の内容を説明する. 2 節で以下で使用する無理数性の判定法を紹介する. 3 節で, 形式的 Laurent 級数に対して, その特殊値が, 2 節で述べた無理数性の判定法をみたすための十分条件である"良い Padé 近似"について言及する. 4 節において形式的 Mellin 変換を導入し, 形式的 Mellin 変換で表される形式的 Laurent 級数の Padé 近似に関する性質を与える. 5 節では, 2 節の結果を用いて G-関数の形式的 Mellin 変換で表される形式的 Laurent 級数が良い Padé 近似を持つことを確かめ, 6 節において定理 0.7 の具体例を与える.

1 無理数性の判定法

この部分節では「p-進数がある代数体に入らない」ことを示すための十分条件を与える. ここで述べる方法はSiegelにより考案された方法に基付いている (cf. [7]). K を代数体として K の $\mathbb{C}_p$ への埋め込みを固定しておく. $\mathcal{O}_K$ で K の整数環を表す. 固定した埋め込みによる K の $\mathbb{C}_p$ における閉包を K_p と書き, K の $\mathbb{C}$ への埋め込み全体の集合を $I_K^{(\infty)}$ とかく. このとき次が成り立つ.

補題 1.1 ([1, lemma 4.1]). $\theta \in \mathbb{C}_p$ とする. 各自然数 n に対して, 2つの $\mathcal{O}_K$ 係数2変数線形形式の組

$$L_0^{(n)}(X_0, X_1) = A_{0,0}^{(n)} X_0 + A_{1,0}^{(n)} X_1,$$
$$L_1^{(n)}(X_0, X_1) = A_{0,1}^{(n)} X_0 + A_{1,1}^{(n)} X_1,$$

及び, ある正数達, $\{c_\tau\}_{\tau \in I_K^{(\infty)}}$ と ρ で次の性質を満たすものが存在すると仮定する.

(i) 無数の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\det((A_{v,w}^{(n)})_{0 \leq v,w \leq m}) \neq 0$ が成り立つ.

(ii) 任意の $\tau \in I_K^{(\infty)}$ と $w = 0, 1$ に対して $\limsup_n \dfrac{\log ||\tau L_w^{(n)}||}{n} \leq c_\tau$ が成り立つ.

(iii) $w = 0, 1$ に対して $\limsup_n \dfrac{\log |L_w^{(n)}(1, \theta)|_p}{n} \leq -\rho$ が成り立つ.

(iv) $\dfrac{[K_p : \mathbb{Q}_p]\rho}{\sum_{\tau \in I_K^{(\infty)}} c_\tau} > 1$ が成り立つ.

但し, $||\tau L_w^{(n)}|| := \max_{0 \leq v \leq m} |\tau A_{v,w}^{(n)}|$ とする. このとき $\theta \in \mathbb{C}_p \setminus K$ が成り立つ.

以下で, θ がある "形式的Laurent級数の特殊値" としてあらわせる場合に補題1.1にあるような数列 $\{(A_{v,w}^{(n)})_{0 \leq v,w \leq 1}\}$ を構成することで, その値が代数体に入らないことを示す.

2 良いPadé近似

K を代数体とする. $f \in \frac{1}{z}K[[\frac{1}{z}]]$, $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ で $\theta := f(\alpha)$ が K_p 内で収束するものを考察する. 次の目標は θ に対して補題1.1を満たすものを構成したい. そのために用いられるのが "形式的Laurent級数の有理関数近似" として知られるPadé近似である.

命題 2.1. (形式的Laurent級数のPadé近似)

K を代数体とし, $f \in \frac{1}{z}K[[\frac{1}{z}]]$ とする. 自然数 n に対して, $(P_0^{(n)}(z), P_1^{(n)}(z)) \in K[z]^2 \setminus \{(0,0)\}$ で次の条件を満たすものが存在する.

(1) $\deg P^{(n)} \leq n$ が成り立つ.

(2) $\mathcal{R}^{(n)}(z) := P_0^{(n)}(z) + P_1^{(n)}(z) f(z)$ とおく. このとき

$$n + 1 \leq \mathrm{ord}_{z=\infty} \mathcal{R}^{(n)}(z)$$

が成り立つ.

$(P_0^{(n)}(z), P_1^{(n)}(z))$ を f の n 次 Padé 近似という. $(P_0^{(n)}(z), P_1^{(n)}(z))$ を f の n 次 Padé 近似とするとき, $P_0^{(n)}(z)$ は $\mathcal{R}^{(n)}(z)$ の "正則部分" であり, $P_1^{(n)}(z)$ から一意に決まることに注意しておく. $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, 自然数 n, 及び, f の n 次 Padé 近似 $(P_0^{(n)}(z), P_1^{(n)}(z))$ に対して, 自然数 $D_n(\alpha) \in \mathcal{O}_K$ で

$$(A_{v,w}^{(n)}(\alpha) := D_n(\alpha) P_w^{(n-v)}(\alpha))_{0 \le v,w \le 1} \in \mathcal{O}_K^4 \tag{3}$$

を満たすものをとる. ここで決めた $(A_{v,w}^{(n)})_{0 \le v,w \le 1}$ が補題 1.1 の条件を満たす様な形式的 Laurent 級数の属を考えたい. そこで次の定義を与える.

定義 2.2. K を代数体とし, $f \in \frac{1}{z}K[[\frac{1}{z}]]$ とする. 各自然数 n に対して, f の n 次 Padé 近似 $(P_0^{(n)}(z), P_1^{(n)}(z))$ を取る. ある素数 p とある $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ に対して $f(\alpha)$ が K_p の元に収束し, かつ, ある $\mathcal{O}_K$ の部分集合 $\{D_n(\alpha)\}_{n \in \mathbb{N}}$ で条件:

・任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し関係 (3) が成り立つ.

・ある正数 $\{c_\tau\}_{\tau \in I_K^\infty}$, 及び, ρ が存在して, $(A_{v,w}^{(n)}(\alpha) := D_n(\alpha) P_w^{(n-v)}(\alpha))_{0 \le v,w \le 1}$ は, 補題 1.1 の条件 (i), (ii), (iii), (iv) を満たす.

ものが存在する時, $\{(P_0^{(n)}(z), P_1^{(n)}(z))\}_{n \in \mathbb{N}}$ を f の**良い Padé 近似**であるという.

本論説では従来知られていたものとは異なる, 良い Padé 近似を持つ形式的 Laurent 級数の族を定め, それらのある特殊値がある代数体に入らないことを示す. 次に主定理の紹介を行う.

3 形式的 Laurent 級数の Padé 近似の性質

この節では K を標数 0 の体とする. $K[[z]]$ 上に, 形式的 Mellin 変換 $\mathcal{M}_K : K[[z]] \longrightarrow \frac{1}{z}K[[\frac{1}{z}]]$ を定義し, 形式的 Mellin 変換であらわされた形式的 Laurent 級数に対する Padé 近似の性質について述べる (定理 3.7 参照).

3.1 形式的 Mellin 変換

この節では形式的 Mellin 変換の定義とその基本的性質を述べる. まず形式的 Mellin 変換の定義を与える.

定義 3.1. 形式的冪級数の形式的 Mellin 変換を次で定義する.

$$\mathcal{M}_K : K[[z]] \longrightarrow \frac{1}{z}K\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right],\ g(z) \mapsto \mathcal{M}_K(g) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{-1}{z}\right)^{k+1}.$$

ここで $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}}$ は $g(e^z - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{b_k}{k!} z^k$ で定義される代数的数である. $\mathcal{M}_K$ は K-線形同型写像である. $K = \overline{\mathbb{Q}}$ のとき, $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ を $\mathcal{M}$ と略記する.

例 3.2. m を 0 以上の整数とし, $R_m(z)$ を 0.1 節で現れた関数とする. この時,

$$\mathcal{M}\left(\frac{\log^{m+1}(1+z)}{z}\right) = R_m(z)$$

が成り立つ.

形式的 Mellin 変換について, 後に考察する形式的 Mellin 変換の性質を導き出すための基礎として次の性質がある.

命題 3.3. $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in K[[z]]$ とする. このとき次の等号が成り立つ:

$$\mathcal{M}_K(g) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k k!}{z(z+1)\cdots(z+k)}.$$

特に次の等号が成り立つ:

$$\frac{1}{z}K\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k k!}{z(z+1)\cdots(z+k)} \,\middle|\, c_k \in K \text{ for all } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

命題 3.3 の証明は省略する. 次に作用素と形式的 Mellin 変換の関係を述べる.

定義 3.4. K-代数の同型 $\mathcal{M}_K^{\mathrm{ope}}$ を次で定義する:

$$\mathcal{M}_K^{\mathrm{ope}} : K[[z]] \longrightarrow K\left[\left[\frac{d}{dz}\right]\right],\ \mathcal{M}_K^{\mathrm{ope}}(z) := \exp\left(\frac{d}{dz}\right) - 1.$$

以下では $\exp(\frac{d}{dz})$ を Δ と記述する.

$K\left[\left[\frac{d}{dz}\right]\right]$ の $\frac{1}{z}K\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ への作用を次で定義する:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{d}{dz}\right)^k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{-1}{z}\right)^{k+1}\right) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{k} l! a_l \binom{k}{k-l} b_{k-l}\right] \left(\frac{-1}{z}\right)^{k+1}. \tag{4}$$

$\Delta \in K\left[\left[\frac{d}{dz}\right]\right]$ の $f(z) \in \frac{1}{z}K\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ への作用は次で記述されることに注意する.

$$\Delta(f(z)) = f(z+1).$$

これらの準備の下, 次が成り立つ.

命題 3.5. 次の図式は可換図式である.

$$\begin{array}{ccc}
K[[z]] \times K[[z]] & \xrightarrow{\mathcal{M}_K^{\mathrm{ope}} \times \mathcal{M}_K} & K\left[\left[\frac{d}{dz}\right]\right] \times \frac{1}{z}K\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right] \\
\downarrow & & \downarrow \\
K[[z]] & \xrightarrow{\mathcal{M}_K} & \frac{1}{z}K\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]
\end{array}$$

ここで左の縦の射は積で定まるものであり, 右の縦の射は (4) で定義されたものである.

Proof. $g \in K[[z]]$ に対して, $\mathcal{M}_K^{\mathrm{ope}}(z)\mathcal{M}_K(g) = \mathcal{M}_K(zg)$ を示せば十分である. $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ とする. はじめに $\mathcal{M}_K(zg)$ を計算する. 命題 3.3 により次の等式が成り立つ:

$$\mathcal{M}_K(zg) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a_{k-1} z^k}{z(z+1)\cdots(z+k)}. \tag{5}$$

一方で $\mathcal{M}^{\mathrm{ope}}(z)\mathcal{M}(g)$ に対して次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_K^{\mathrm{ope}}(z)\mathcal{M}_K(g) &= (\Delta - 1)\left[-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k k!}{z(z+1)\cdots(z+k)}\right] \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k k!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k k!}{z(z+1)\cdots(z+k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k k! \left[\frac{-1}{(z+1)(z+2)\cdots(z+k+1)} + \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+k)}\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a_{k-1} k!}{z(z+1)\cdots(z+k)}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

等式 (5) と (6) から命題 3.5 の証明が得られた. □

次に $g \in K[[z]]$ に対して $\mathcal{M}_K(g)$ の基本的な性質を挙げる.

補題 3.6. j を非負整数とする. $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in K[[z]]$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&z(z+1)\cdots(z+j-1)\mathcal{M}_K(g) \\
&= -z(z+1)\cdots(z+j-1)\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k a_k \frac{k!}{z(z+1)\cdots(z+k)} + (-1)^j \Delta^j \mathcal{M}_K\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^j g\right);
\end{aligned}$$

ここで $j = 0$ の場合は $z(z+1)\cdots(z+j-1) = 1$ かつ $\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k a_k \dfrac{k!}{z(z+1)\cdots(z+k)} = 0$ を表すものとする.

Proof. $j = 0$ の時, 主張は明らかなので $j \geq 1$ を仮定する. $\mathcal{M}(g)$ の定義から次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
z(z+1)\cdots(z+j-1)\mathcal{M}_K(g) = &- z(z+1)\cdots(z+j-1)\sum_{k=0}^{j-1} \frac{(-1)^k a_k k!}{z(z+1)\cdots(z+k)} \\
&+ \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k k!}{(z+j)(z+j+1)\cdots(z+k)}.
\end{aligned}$$

上記の等式から, 命題を示すためには次の等式を示せば十分である:

$$(-1)^j \Delta^j \mathcal{M}_K\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^j g\right) = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k k!}{(z+j)(z+j+1)\cdots(z+k)}. \tag{7}$$

等式 $\left(\frac{d}{dz}\right)^j g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdots(k+j)a_{k+j}z^k$ 及び, 補題3.3から次の等式が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
(-1)^j\Delta^j\mathcal{M}_K\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^j g\right) &= \Delta^j\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+j}(k+j)!a_{k+j}}{z(z+1)\cdots(z+k)}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+j}(k+j)!a_{k+j}}{(z+j)(z+j+1)\cdots(z+k+j)}\\
&= \sum_{k=j}^{\infty}\frac{(-1)^k k! a_k}{(z+j)(z+j+1)\cdots(z+k)}.
\end{aligned}
$$

これより等式(7)が成り立つことが示され, 補題3.6が証明された. □

3.2 形式的 Laurent 級数の Padé 近似について

次に形式的 Mellin 変換であらわされる形式的 Laurent 級数の Padé 近似について紹介する. $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in K[[z]]$ を固定し, $f := \mathcal{M}_K(g) \in \frac{1}{z}K\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ とおく.

定理 3.7. $P_1^{(n)}(z) := \sum_{j=0}^{n} p_j^{(n)}\frac{z(z+1)\cdots(z+j-1)}{j!} \in K[z]$ をとる. $P_1^{(n)}(z)$ に対して, 「ある多項式 $P_0^{(n)}(z) \in K[z]$ で, $(P_0^{(n)}(z), P_1^{(n)}(z))$ が f の n 次 Padé 近似となるものが存在する」ための必要十分条件は, $0 \le k \le n-1$ を満たす任意の整数 k に対して

$$
\sum_{j=0}^{n}\left((-1)^j\sum_{l=0}^{k}\binom{j}{l}\binom{k+j-l}{j}a_{k+j-l}\right)p_j^{(n)} = 0 \tag{8}
$$

が成り立つことである. ここで, $l > j$ を満たす際は, $\binom{k+j-l}{k} = 0$ を表すものとする. 更に, $(P_0^{(n)}(z), P_1^{(n)}(z))$ を f の n 次 Padé 近似とすると次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
P_0^{(n)}(z) &= \sum_{j=1}^{n}p_j^{(n)}\left(\frac{z(z+1)\cdots(z+j-1)}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(-1)^k a_k k!}{z(z+1)\cdots(z+k)}\right),\\
\mathcal{R}^{(n)}(z) &= \sum_{k=n}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j p_j^{(n)}\sum_{l=0}^{k}\binom{j}{l}\binom{k+j-l}{j}a_{k+j-l}\right)\frac{(-1)^{k+1}k!}{z(z+1)\cdots(z+k)}.
\end{aligned}
$$

Proof. 前半の必要十分条件の証明のみ与える. 補題3.6から次の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
P_1^{(n)}(z)f(z) &= \left(\sum_{j=0}^{n}\frac{p_j^{(n)}}{j!}z(z+1)\cdots(z+j-1)\right)\mathcal{M}_K(g)\\
&= \sum_{j=1}^{n}p_j^{(n)}\frac{z(z+1)\cdots(z+j-1)}{j!}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{(-1)^k a_k k!}{z(z+1)\cdots(z+k)}\\
&\quad + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{p_j^{(n)}}{j!}\Delta^j\mathcal{M}_K\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^j g\right).
\end{aligned} \tag{9}
$$

ここで命題3.5から, 等式:

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{p_j^{(n)}}{j!}\Delta^j\mathcal{M}_K\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^j g\right)=\mathcal{M}_K\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{p_j^{(n)}}{j!}\left((1+z)^j\left(\frac{d}{dz}\right)^j g\right)\right) \tag{10}$$

が成り立つことに注意する. 式 (9) から, $P_1^{(n)}(z)$ に対して, ある多項式 $P_0^{(n)}(z)\in K[z]$ で $(P_0^{(n)}(z),P_1^{(n)}(z))$ が f の n 次 Padé 近似になるものが存在することと,

$$n+1\le \mathrm{ord}_{z=\infty}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{p_j^{(n)}}{j!}\Delta^j\mathcal{M}_K\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^j g\right) \tag{11}$$

が成り立つことが同値である. 更に, 関係 (11) は, 等式 (10) から次の関係が成り立つことと同値である.

$$n\le \mathrm{ord}_{z=0}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{p_j^{(n)}}{j!}\left((1+z)^j\left(\frac{d}{dz}\right)^j g\right). \tag{12}$$

ここで

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{p_j^{(n)}}{j!}\left((1+z)^j\left(\frac{d}{dz}\right)^j g\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(-1)^jp_j^{(n)}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{j}{l}\binom{k+j-l}{j}a_{k+j-l}\right)z^k$$

に注意して関係 (12) を書き下すと命題3.5の線形関係式 (8) が得られる. 以上で示された. □

4 G-関数の形式的 Mellin 変換が良い Padé 近似を持つことについて

K を代数体とする. $0\neq g=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k\in\mathbf{G}(K,C_1,C_2)$ に対して, $f:=\mathcal{M}(g)$ とおく. f が良い Padé 近似を持つための十分条件を与えたい.

4.1 Padé 近似に関する評価

初めに f の Padé 近似の “大きさの評価” を与えたい. この部分節で与えられる主張の証明は省略する. まず定理3.7における式 (8) の非自明解 $\{p_{v,j}^{(n)}\}\subset\mathcal{O}_K$ で “十分に小さい” ものの存在を示す. そのために重要なのが次の補題である.

補題 4.1 (cf. [7]). K を代数体とし, s,t を $s>t$ を満たす自然数とする. t 個の $\mathcal{O}_K$ 係数線形形式

$$L_j(X_1,\dots,X_s):=a_{1,j}X_1+\cdots+a_{s,j}X_s \text{ for } 1\le j\le t, \tag{13}$$

で次の条件を満たすものが与えられているとする.

ある正数 A について $\overline{|a_{i,j}|}<A$ がすべての $1\le i\le s,\ 1\le j\le t$ に関して成り立っている.

このとき非自明な, 線形関係式 (13) の解, $(x_1,\dots,x_s)\in\mathcal{O}_K^s$ で条件

$$\overline{|x_i|}<c(csA)^{\frac{t}{s-t}} \text{ for all } 1\le i\le s,$$

を満たすものが存在する. ただし $c>0$ は K にのみ依存する定数である.

補題 4.1 を線形関係式 (8) に対してを用いたい. そのために線形関係式 (8) の係数の大きさを計算する.

補題 4.2. $0\le k\le n-1$ を満たす任意の自然数 k に対して, 次の不等式が成り立つ.

$$\overline{\left|(-1)^j\sum_{0\le l\le k, l\le j}\binom{j}{l}\binom{k+j-l}{j}a_{v,k+j-l}\right|}\le\begin{cases}e^{o(n)}2^{(m+2)n}C_1^{(m+1)n} & \text{if } C_1>\frac{1}{2},\\ e^{o(n)}2^n & \text{if } C_1\le\frac{1}{2}.\end{cases}$$

注意 4.3. 補題 4.2 の計算において G-関数の条件 (i) を用いている.

補題 4.1, 及び, 補題 4.2 から f の Padé 近似で次の条件を満たすものが存在することがわかる.

系 4.4. 補題 4.2 と同様の記号を用いる. ϵ を任意の正数とする. このとき, 定理 3.7 の線形関係式 (??) の非自明な解 $\{p_{j,\epsilon}\}_{1\le v\le m, 0\le j\le n_v}\subset\mathcal{O}_K$ で次を満たすものが存在する.

$$\overline{|p_{j,\epsilon}^{(n)}|}\le\begin{cases}e^{o(n)}2^{(m+2)n}(C_1C_2^{1+\epsilon})^{(m+1)n} & \text{if } C_1>\frac{1}{2},\\ e^{o(n)}2^nC_2^{(1+\epsilon)(m+1)n} & \text{if } C_1\le\frac{1}{2}.\end{cases}$$

以下では正数 ϵ と, 系 4.4 から決まる $\{p_{v,j,\epsilon}^{(n)}\}_{1\le v\le m, 1\le j\le n_v}\subset\mathcal{O}_K$ を固定する. 簡単のため $p_{j,\epsilon}^{(n)}$ を $p_j^{(n)}$ と書くことにし, 定理 3.7 により $p_j^{(n)}$ に対応する f の n 次 Padé 近似を $(P_0^{(n)}(z),P_1^{(n)}(z))$ と書くことにする. $\alpha\in\mathbb{Q}^*$ に対して, $P_0^{(n)}(\alpha)$, 及び, $P_1^{(n)}(\alpha)$ の分母を消す自然数の一つが次のように求まる.

補題 4.5. 正整数 n に対して $e_n:=\mathrm{den}(a_k)_{0\le j\le n}$ とおく. また自然数 n に対して, $d_n:=\mathrm{l.c.m.}(1,\dots,n)$ とおく. $\alpha\in\mathbb{Q}^*$ に対して次が成り立つ.

(i) 任意の $1\le v\le m$ に対して $\left[\mathrm{den}(\alpha)^n\prod_{q:\text{prime},\ q|\mathrm{den}(\alpha)}q^{\left[\frac{n}{q-1}\right]}\right]p_v^{(n)}(\alpha)\in\mathcal{O}_K$,

(ii) $\left[d_ne_n\mathrm{den}(\alpha)^n\prod_{q:\text{prime},\ q|\mathrm{den}(\alpha)}q^{\left[\frac{n}{q-1}\right]}\right]p_0^{(n)}(\alpha)\in\mathcal{O}_K$.

次に $\alpha\in\mathbb{Q}^*$ に対して, $\max\{\overline{|P_0^{(n)}(\alpha)|},\overline{|P_1^{(n)}(\alpha)|}\}$ の上界を与える.

補題 4.6. $\alpha\in\mathbb{Q}^*$ とする. 自然数 $l=l(\alpha)$ を $l<|\alpha|\le l+1$ を満たすようにとる. このとき, 次の不等式が成り立つ:

$$\max_{0\le v\le m}\overline{|p_v^{(n)}(\alpha)|}\le\begin{cases}e^{o(n)}2^{(m+3)n}C_1^{(m+2)n}C_2^{(1+\epsilon)(m+1)n} & \text{if } C_1>1,\\ e^{o(n)}2^{(m+3)n}(C_1C_2^{1+\epsilon})^{(m+1)n} & \text{if } \frac{1}{2}<C_1\le1,\\ e^{o(n)}4^nC_2^{(1+\epsilon)(m+1)n} & \text{if } C_1\le\frac{1}{2}.\end{cases}$$

g が $r_p(g_{v,p}) \geq 1$ を, $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ が $|\alpha|_p > 1$ を満たすときに剰余項の p 進付値の上界が次のように与えられる.

補題 4.7. g が $r_p(g_{v,p}) \geq 1$ を, $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ が $|\alpha|_p > 1$ を満たすとし, $r := \min_{1\leq v\leq m}\{r_p(g_{v,p})\}$ とおく. このとき十分大きな任意の自然数 n に対して次が成り立つ:

$$|\mathcal{R}^{(n)}(\alpha)|_p \leq e^{o(n)} \left[(r^{-1}+o(1))p^{-\frac{1}{p-1}}|\alpha|_p^{-1}\right]^{\sum_{v=1}^{m}(n_v+1)} \quad (n\to\infty).$$

以上で, 本部分節で構成した $(P_0^{(n)}(z), P_1^{(n)}(z))$ に対して $|\alpha|_p > 1$ を満たす $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ に対して $D_n(\alpha) := d_n e_n \mathrm{den}(\alpha)^n \prod_{q:\mathrm{prime},\ q|\mathrm{den}(\alpha)} q^{\left[\frac{n}{q-1}\right]}$ とおき, $(A_{v,w}^{(n)}(\alpha) := D_n(\alpha)P_w^{(n-v)}(\alpha))_{0\leq v,w\leq 1}$ とおく. この数列に対して補題 1.1 の条件 (ii), (iii) を満たす正数 $\{c_\tau\}_\tau, \rho$ を計算することができる. α の p 進付値を大きくすると補題 1.1 の条件 (iv) が成り立たせることができる. したがって残りは数列 $\{(A_{v,w}^{(n)}(\alpha))_{0\leq v,w\leq 1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が補題 1.1 の条件 (i) を満たすための条件を求めることが必要である. これについて次部分節で取り扱う.

4.2 “行列式” の非零性

[6] の 3 章を参照しながら $f \in \frac{1}{z}\overline{\mathbb{Q}}[[\frac{1}{z}]]$ の Padé 近似が補題 1.1 の条件 (i) に対応する条件を満たすための必要十分条件を求める. まず次の概念を定義する.

定義 4.8 (cf. [6, p.44]). $f(z)$ を $\frac{1}{z}\overline{\mathbb{Q}}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ の元とし, n を自然数とする. 任意の f の n 次 Padé 近似 $(P_0^{(n)}, P_1^{(n)})$ に対して $\deg P_1^{(n)}(z) = n$ が成り立つとき, n は f に関して正規であるという. f に関して正規である自然数全体の集合を $\Lambda(f)$ と表すことにする.

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{1}{z^{k+1}} \in \overline{\mathbb{Q}}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ に対して, f の n 次ハンケル行列式を

$$H_n(f) := \det\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-1} \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ f_{n-1} & f_n & \cdots & f_{2n-2} \end{pmatrix}$$

で定義する. $n \in \mathbb{N}$ が f に関して正規であるための必要十分条件を $H_n(f)$ を用いて, 次のように記述することができる.

補題 4.9. (cf. [6, Proposition 3.2])

$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{1}{z^{k+1}}$ を $\frac{1}{z}\overline{\mathbb{Q}}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ の元とし n を自然数とする. このとき, 次の条件は同値である.

(i) $n \in \Lambda(f)$ が成り立つ.

(ii) $H_n(f) \neq 0$ が成り立つ.

(iii) $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{1}{z^{k+1}}$ を $\frac{1}{z}\overline{\mathbb{Q}}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ の元とし, $n \in \mathbb{N}$ を $H_n(f) \neq 0$ を満たす自然数とする. $(P_0^{(n-1)}, P_1^{(n-1)})$, $(P_0^{(n)}, P_1^{(n)})$ をそれぞれ f の $(n-1)$ 次 Padé 近似, n 次 Padé とする. 多項式 $\Delta^{(n)}(z)$ を

$$\Delta^{(n)}(z) := \det \begin{pmatrix} P_0^{(n-1)}(z) & P_1^{(n-1)}(z) \\ P_0^{(n)}(z) & P_1^{(n)}(z) \end{pmatrix}$$

で定めるとき, $\Delta^{(n)}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ が成り立つ.

注意 4.10. 補題 4.9 と同様の記号を用いる. 自然数 n が $n \in \Lambda(f)$ を満たすとする. 補題 4.9 から任意の f の $(n-1)$ 次 Padé 近似 $(P_0^{(n-1)}, P_1^{(n-1)})$ と f の n 次 Padé 近似 $(P_0^{(n)}, P_1^{(n)})$, 及び, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ に対して次が成り立つ.

$$\det \begin{pmatrix} P_0^{(n-1)}(\alpha) & P_1^{(n-1)}(\alpha) \\ P_0^{(n)}(\alpha) & P_1^{(n)}(\alpha) \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{Q}}^*.$$

補題 4.9, 及び, 注意 4.10 にから, $|\Lambda(f)| = \infty$ であれば, 補題 1.1 の条件 (i) に対応する主張が成り立つことがわかった. $|\Lambda(f)| = \infty$ であるための必要十分条件が次で与えられる.

定理 4.11 (Kronecker [6, Theorem 3.1]). f を $\frac{1}{z}\overline{\mathbb{Q}}\left[\left[\frac{1}{z}\right]\right]$ の元とする. このとき次は必要十分条件である.

(i) $f \notin \overline{\mathbb{Q}}(z)$ が成り立つ.

(ii) $\Lambda(f)$ は無限集合である.

さて我々は, f がある $g \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ を用いて $f = \mathcal{M}(g)$ と記述される場合を考察していた. 定理 4.11 と $\mathcal{M}$ の性質から次が成り立つ.

系 4.12. $g(z)$ を $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ の元とする. このとき次は同値である.

(i) $|\Lambda(\mathcal{M}(g))| = \infty$,

(ii) $g(z) \notin \overline{\mathbb{Q}}[\log(1+z), (1+z)^{\alpha} \mid \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}]$.

Proof. $g(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ について, 以下の条件が同値であることからわかる.

(i) $\mathcal{M}(g) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$

(ii) $g(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[\log(1+z), (1+z)^{\alpha} \mid \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}]$. □

以上より集合, $(\mathbf{G}(K, C_1, C_2) \cap \mathcal{B}_{p,K}) \setminus \overline{\mathbb{Q}}[\log(1+z), (1+z)^{\alpha} \mid \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}]$ の $\mathcal{M}$ による像は良い Padé 近似を持つ. これらを纏めたものが定理 0.7 である.

5 定理 0.7 の例

l を自然数とする. 定理 0.7 において $K = \mathbb{Q}$, $\alpha = p^{-l}$ としたとき次の系が得られる.

系 5.1. p を素数とする．$g \in (\mathbf{G}(\mathbb{Q}, C_1, C_2) \cap \mathcal{B}_{p,\mathbb{Q}}) \setminus \overline{\mathbb{Q}}[\log(1+z), (1+z)^\alpha \,|\, \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}]$ とする．$r := r_p(g)$ とおく．l を自然数とし，$\alpha = p^{-l}$ とおく．

$$rp^{l+\frac{1}{p-1}} > \begin{cases} 16e(C_1C_2)^3 & \text{if } 1 < C_1, \\ 16eC_1^2C_2^3 & \text{if } \frac{1}{2} < C_1 \le 1, \\ 4eC_2^3 & \text{if } C_1 \le \frac{1}{2}. \end{cases}$$

と仮定する．このとき $\mathcal{M}(g)_p(\alpha) \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Q}$ が成り立つ．

以下で系 5.1 の例をいくつか与える．

例 5.2. m する．任意の素数 p に対して，次が成り立つ:

$$\frac{\log^{m+1}(1+z)}{z} \in (\mathbf{G}(\mathbb{Q}, 1, e^m) \cap \mathcal{B}_{p,\mathbb{Q}}) \setminus \overline{\mathbb{Q}}[\log(1+z), (1+z)^\alpha \,|\, \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}].$$

ここで $r_p\left(\frac{\log^{m+1}(1+z)}{z}\right) = 1$ が成り立つこと，及び，

$$\mathcal{M}\left(\frac{\log^{m+1}(1+z)}{z}\right) = \left(\frac{d}{dz}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left(\frac{-1}{z}\right)^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\cdots(k+m) B_k \left(\frac{-1}{z}\right)^{k+m+1},$$

が成り立つことに注意する．ここで $\{B_k{}^\dagger\}_{k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}}$ は $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!}$ で定義されるものとする．

l を自然数とし，p が l が $p^{l+\frac{1}{p-1}} > 16e^{3m+1}$, を満たすとき，$\mathcal{M}\left(\frac{\log^{m+1}(1+z)}{z}\right)_p (p^{-l}) \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Q}$ が成り立つ．

注意 5.3. 例 5.2 において，$m = 1$ の時，Beukers は $\mathcal{M}\left(\frac{\log(1+z)}{z}\right)$ の連分数展開を用いてより強い結果を求めている (cf. [2, Theorem 9.2])．

例 5.4. m を正整数とする．p を 2 と異なる素数とすると，

$$\frac{2\log^m(1+z)}{1+z+\frac{1}{1+z}} \in (\mathbf{G}(\mathbb{Q}, \sqrt{2}^{-1}, \sqrt{2}e^m) \cap \mathcal{B}_{p,\mathbb{Q}}) \setminus \overline{\mathbb{Q}}[\log(1+z), (1+z)^\alpha \,|\, \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}]$$

が成り立つ．ここで $r_p\left(\frac{2\log^m(1+z)}{1+z+\frac{1}{1+z}}\right) = 1$ が成り立つこと，及び，

$$\mathcal{M}\left(\frac{2\log^m(1+z)}{1+z+\frac{1}{1+z}}\right) = \left(\frac{d}{dz}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} E_k \left(\frac{-1}{z}\right)^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\cdots(k+m) E_k \left(\frac{-1}{z}\right)^{k+m+1}$$

$^\dagger B_k$ は k 次 Bernoulli 数と呼ばれる．

が成り立つことに注意する．ここで $\{E_k{}^{\ddagger}\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は $\dfrac{2}{e^z+e^{-z}}=\sum_{k=0}^{\infty}E_k\dfrac{z^k}{k!}$ で定義されるものとする．

l を自然数とし, p が l が $p^{l+\frac{1}{p-1}}>16\sqrt{2}e^{3m+1}$, を満たすとき, $\mathcal{M}\left(\dfrac{2\log^m(1+z)}{1+z+\frac{1}{1+z}}\right)_p(p^{-l})\in\mathbb{Q}_p\setminus\mathbb{Q}$ が成り立つ．

例 5.5. m を非負整数とする．p を 2 と異なる素数とする．このとき,

$$\frac{z\log^m(1+z)}{2+z}\in(\mathbf{G}(\mathbb{Q},2^{-1},2e^m)\cap\mathcal{B}_{p,\mathbb{Q}})\setminus\overline{\mathbb{Q}}[\log(1+z),(1+z)^{\alpha}\mid\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}]$$

が成り立つ．ここで $r_p\left(\dfrac{z\log^m(1+z)}{2+z}\right)=1$ が成り立つこと, 及び,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left(\frac{z\log^m(1+z)}{2+z}\right)&=\left(\frac{d}{dz}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}T_k\left(\frac{-1}{z}\right)^{k+1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdots(k+m)T_k\left(\frac{-1}{z}\right)^{k+m+1}\end{aligned}$$

が成り立つことに注意する．$\{T_k{}^{\S}\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は $\dfrac{e^z-1}{e^z+1}=\sum_{k=0}^{\infty}T_k\dfrac{z^k}{k!}$ で定義される．

l を自然数とし, p が l が $p^{l+\frac{1}{p-1}}>32e^{3m+1}$ を満たすとき $\mathcal{M}\left(\dfrac{z\log^m(1+z)}{2+z}\right)_p(p^{-l})\in\mathbb{Q}_p\setminus\mathbb{Q}$ が成り立つ．

Acknowledgement

2016 年度 RIMS 研究集会, 「解析的整数論の諸問題と展望」において講演の機会を与えてくださり, 大変お世話になりました組織委員の石川秀明先生, 藤田育嗣先生にこの場を借りて御礼申し上げます．

参考文献

[1] P. Bel, *Fonctions L p-adiques et irrationalité*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) **9** (2010), 189–227.

[2] F. Beukers, *Irrationality of some p-adic L-values*, Acta Math. Sin. **24** (2008), 663–686.

[3] F. Calegari, *Irrationality of Certain p-adic Periods for Small p*, International Mathmatics Reserch Notices, **20**, (2005), 1235–1249.

---

‡ E_k は k 次 Euler 数と呼ばれる．

§ T_k は k 次ハイパボリックタンジェント数と呼ばれる．

[4] M. Hirose, M. Kawashima and N. Sato, *A lower bound of the dimension of the vector space spanned by the special values of certain functions*, To appear Tokyo Journal of Math.

[5] M. Kawashima, *Irrationality of special values of formal Laurent series represented by the formal Mellin transform of G-functions*, preprint.

[6] E. M. Nikisin and V. N. Sorokin, Rational Approximations and Orhogonality, Translations of Mathematical Monographs, 92, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[7] C. L. Siegel, *Uber einige Anwendungen diophantischer Approximationen* (reprint of *Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Physikalisch-mathematische Klasse, 1929, Nr. 1), In: On some applications of Diophantine approximations, 81–138, Quad./Monogr., 2, Ed. Norm., Pisa, 2014.