

# 重さ半整数の次数 2 のベクトル値ジーゲル保型形式に関する 伊吹山予想の証明

京都大学数学教室 石本宙<sup>1</sup>

Department of Mathematics, Kyoto University

## 概要

伊吹山 [8] による次数 2 の重さ半整数のベクトル値ジーゲル保型形式に関する志村型の予想に, Arthur [1] や Gan-市野 [5, 6] による重複度公式を用いて証明を与えることが出来たので, そのことについて報告する.

## 1 ベクトル値のジーゲル保型形式とその $L$ 関数の定義

伊吹山氏の予想とその証明を述べる前に, まずベクトル値のジーゲル保型形式について記号を整理する. 整数  $n \geq 1$  に対して次数  $n$  のジーゲル上半平面を

$$\mathfrak{H}_n = \{ Z = X + iY \in M_n(\mathbb{C}) \mid X = {}^t X, Y = {}^t Y \in M_n(\mathbb{R}), Y > 0 \}$$

と定める. ただし,  $Y > 0$  は  $Y$  が正定値であるという意味である.  $1$  をもつ可換環  $R$  に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_{2n}(R) &= \{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(R) \mid {}^t g J_n g = J_n \}, \\ \mathrm{GSp}_{2n}(R) &= \{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(R) \mid {}^t g J_n g = \nu(g) J_n, \exists \nu(g) \in \mathrm{GL}_1(R) \} \end{aligned}$$

と定める. ここで,  $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$  とおいた. よく知られたように, 群  $\mathrm{GSp}_{2n}^+(\mathbb{R}) = \{ g \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{R}) \mid \nu(g) > 0 \}$  は次のようにして  $\mathfrak{H}_n$  に作用する:

$$gZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GSp}_{2n}^+(\mathbb{R}), \quad Z \in \mathfrak{H}_n.$$

この分母を保型因子と呼び  $J(g, Z) = CZ + D$  とおく.

非負整数  $j \geq 0$  に対して  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  の次数  $j$  の対称テンソル表現をとり  $(\mathrm{Sym}_j, V_j)$  とおく. これは 2 変数複素  $j$  次齊次多項式全体のなす  $j+1$  次元のベクトル空間に, 作用  $[g \cdot P](x, y) = P((x, y)g)$  によって定められる表現と同型である. 同型類を除いて,  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  の既約有理表現は, 整数  $k$  と非負整数  $j$  を用いて  $\det^k \mathrm{Sym}_j$  の形であることが知られている.

さて, ジーゲル上半平面上のベクトル値関数  $f(Z) : \mathfrak{H}_2 \rightarrow V_j$  に対して  $g \in \mathrm{GSp}_4^+(\mathbb{R})$  からの重さ  $(k, j)$  の作用を

$$[f]_{k,j} g(Z) = \nu(g)^{k+\frac{j}{2}} \det(J(g, Z))^{-k} \mathrm{Sym}_j(J(g, Z))^{-1} f(gZ)$$

によって定め,  $f$  が次の条件 (0)-(2) を満たすとき, これを重さ  $(k, j)$  のカスプ形式といい, そのような関数の全体のなす空間を  $S_{k,j}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$  と書く.

(0)  $f$  は正則;

(1) 任意の  $\gamma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$  に対して  $f|_{k,j} \gamma = f$ ;

<sup>1</sup>本研究は日本学術振興会特別研究員奨励費 (研究番号 20J11779) からの助成を受けたものである.

(2)  $f$  は以下のようなフーリエ展開をもつ：

$$f(Z) = \sum_{\substack{T \in L_2^* \\ T > 0}} A(T) \exp(2\pi i \operatorname{tr}(TZ)).$$

ただし 2 次の半整数対称行列全体の集合を  $L_2^*$  とおいた。

$S_{k,j}(\operatorname{Sp}_4(\mathbb{Z}))$  にはヘッケ理論がある。自然数  $m$  に対して

$$X(m) = \{x \in M_4(\mathbb{Z}) \cap \operatorname{GSp}_4^+(\mathbb{R}) \mid \nu(x) = m\}$$

とおき、 $f \in S_{k,j}(\operatorname{Sp}_4(\mathbb{Z}))$  に作用するヘッケ作用素  $T(m)$  を

$$f|_{k,j}T(m) = m^{k+\frac{j}{2}-3} \sum_{g \in \operatorname{Sp}_4(\mathbb{Z}) \setminus X(m)} f|_{k,j}g$$

で定義する。ヘッケ固有形式  $f \in S_{k,j}(\operatorname{Sp}_4(\mathbb{Z}))$  に対して  $T(m)$  の固有値を  $\lambda(m)$  とおくと、 $f$  の spinor  $L$  関数はオイラー積

$$L(s, f, \operatorname{spin}) = \prod_{p: \text{素数}} L(s, f, \operatorname{spin})_p$$

で与えられる。ただし、

$$L(s, f, \operatorname{spin})_p = (1 - \lambda(p)p^{-s} + (\lambda(p)^2 - \lambda(p^2) - p^{\mu-1})p^{-2s} - \lambda(p)p^{\mu-3s} + p^{2\mu-4s})^{-1}, \quad \mu = 2k + j - 3.$$

重さ半整数のカスプ形式も紹介していく。まず  $\operatorname{GSp}_4^+(\mathbb{R})$  の被覆群  $\widetilde{\operatorname{GSp}_4^+(\mathbb{R})}$  を導入する。これは行列  $g \in \operatorname{GSp}_4^+(\mathbb{R})$  と  $\mathfrak{H}_2$  上の複素数値正則関数  $\phi(Z)$  の組  $(g, \phi(Z))$  であって  $\phi(Z)^4 = \det J(g, Z)^2 / \det g$  を満たすもの全体の集合に、群演算  $(g_1, \phi_1(Z))(g_2, \phi_2(Z)) = (g_1g_2, \phi_1(g_2Z)\phi_2(Z))$  を定めた群である。これはたしかに群になり、写像  $(g, \phi(Z)) \mapsto g$  によって  $\operatorname{GSp}_4^+(\mathbb{R})$  の 4 重被覆群であることが分かる。そして、テータ級数  $\theta(Z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i {}^t x Z x)$ ,  $(Z \in \mathfrak{H}_2)$  を用いると合同部分群  $\Gamma_0(4) \subset \operatorname{GSp}_4^+(\mathbb{R})$  は、うめこみ  $\gamma \mapsto (\gamma, \theta(\gamma Z)/\theta(Z))$  によって  $\widetilde{\operatorname{GSp}_4^+(\mathbb{R})}$  の部分群とみなせる。本稿では指標付きのカスプ形式を扱うため、ここで  $\Gamma_0(4)$  の 2 次指標  $\left(\frac{-1}{\cdot}\right)$  を  $\gamma \mapsto \left(\frac{-1}{\gamma}\right) = \left(\frac{-1}{\det D}\right)$  によって定めておく。ここで  $D$  は  $\gamma$  の右下の  $2 \times 2$  行列。  $\gamma \in \Gamma_0(4)$  なので  $\det D$  は 4 と互いに素、つまり奇数であることに注意。

ジーゲル上半平面上のベクトル値関数  $F(Z) : \mathfrak{H}_2 \rightarrow V_j$  に対して  $(g, \phi(Z)) \in \widetilde{\operatorname{GSp}_4^+(\mathbb{R})}$  からの重さ  $(k - \frac{1}{2}, j)$  の作用を

$$\left[F|_{k-\frac{1}{2},j}(g, \phi(Z))\right](Z) = \nu(g)^{\frac{j}{2}} \phi(Z)^{-2k+1} \operatorname{Sym}_j(J(g, Z))^{-1} F(gZ)$$

によって定め、これが次の条件 (0)-(2) を満たすとき、 $F$  を重さ  $(k - \frac{1}{2}, j)$  でレベル  $\Gamma_0(4)$ 、指標  $\left(\frac{-1}{\cdot}\right)$  のカスプ形式といい、そのような関数の全体のなす空間を  $S_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$  と書く。

(0)  $F$  は正則；

(1) 任意の  $\gamma \in \Gamma_0(4)$  に対して  $F|_{k-\frac{1}{2},j}\gamma = \left(\frac{-1}{\gamma}\right) F$ ；

(2)  $F$  は以下のようなフーリエ展開をもつ：

$$F(Z) = \sum_{\substack{T \in L_2^* \\ T > 0}} A(T) \exp(2\pi i \operatorname{tr}(TZ)).$$

さらに、そのような  $F$  であって、 $T \equiv (-1)^k r {}^t r \pmod{4L_2^*}$  を満たす  $r \in \mathbb{Z}^2$  が存在しない  $T \in L_2^*$  に対しては  $T$  番目のフーリエ係数が消える ( $A(T) = 0$  となる) ようなもの全体のなす部分空間を  $S_{k-\frac{1}{2},j}^+(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$  と書く。

$S_{k-\frac{1}{2},j}^+(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$  にもヘッケ理論がある. 素数  $p$  に対して

$$K_s(p^2) = \begin{pmatrix} 1_{2-s} & & & \\ & p1_s & & \\ & & p^2 1_{2-s} & \\ & & & p1_s \end{pmatrix}, \quad s = 0, 1, 2$$

とおく.  $p$  を 2 でない素数とすると,  $F \in S_{k-\frac{1}{2},j}^+(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$  に作用するヘッケ作用素  $T_s(p)$  が

$$F|_{k-\frac{1}{2},j} T_s(p) = \sum_{\tilde{g}_s \in \Gamma_0(4) \setminus \Gamma_0(4)(K_s(p^2), p^{1-\frac{s}{2}})\Gamma_0(4)} \left(\frac{-1}{\tilde{g}_s}\right)^l F|_{k-\frac{1}{2},j} \tilde{g}_s, \quad s = 0, 1$$

で定義される. しかしながら, レベルが  $\Gamma_0(4)$  であるため 4 と互いに素でない素数 2 においてはヘッケ作用素は同様には定義できない. 次々節で紹介するが,  $p = 2$  におけるヘッケ作用素はヤコビ形式を用いて定義される. ひとまずここでは全ての素数  $p$  でのヘッケ作用素  $T_s(p)$  が与えられたものとして  $L$  関数を定義する. ヘッケ固有形式  $F \in S_{k-\frac{1}{2},j}^+(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$  に対して  $T_1(p)$  と  $T_0(p)$  の固有値をそれぞれ  $\eta(p)$ ,  $\omega(p)$  とおく. さらに  $\eta^*(p) = \left(\frac{-1}{p}\right) p^{k+j-\frac{7}{2}} \eta(p)$ ,  $\omega^*(p) = p^{2k+2j-7} \omega(p)$  とおくと,  $F$  の  $L$  関数はオイラー積

$$L(s, F) = \prod_{p: \text{素数}} L(s, F)_p$$

で与えられる. ただし,

$$L(s, F)_p = (1 - \eta^*(p)p^{-s} + (p\omega^*(p) + p^{\nu-2}(1+p^2))p^{-2s} - \eta^*(p)p^{\nu-3s} + p^{2\nu-4s})^{-1}, \quad \nu = 2k + 2j - 3.$$

## 2 主結果

本稿の主結果は, 次に述べる伊吹山予想に証明を与えたことである.

**定理 2.1** (伊吹山予想).  $k$  を 3 以上の整数,  $j$  を非負の偶数とする. このとき線形同型

$$\rho: S_{k-\frac{1}{2},j}^+(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right)) \longrightarrow S_{j+3, 2k-6}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$$

であって,  $F \in S_{k-\frac{1}{2},j}^+(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$  がヘッケ固有形式ならば  $\rho(F) \in S_{j+3, 2k-6}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$  もヘッケ固有形式であり, さらに

$$L(s, F) = L(s, \rho(F), \text{spin})$$

を満たすようなものが存在する.

ちなみに伊吹山氏による別の論文 [9] では, これと似た別の予想がいくつか紹介されている. そしてそれらの予想も, 上の伊吹山予想 (定理 2.1) とあわせて筆者による研究 [10] で証明された.

## 3 ヤコビ形式

重さ半整数の空間  $S_{k-\frac{1}{2},j}^+(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$  に作用するヘッケ作用素を  $p = 2$  でも定義するために, ヤコビ形式の理論を紹介する. 本節で, 伊吹山予想 (定理 2.1) の正確な記述が完了する.

保型形式は  $\mathfrak{H}_n$  上の関数であって,  $\mathfrak{H}_n$  への  $\mathrm{GSp}_{2n}^+(\mathbb{R})$  や  $\mathrm{GSp}_{2n}^+(\mathbb{R})$  からの作用について対称性をもつものであった. これに対しヤコビ形式は  $\mathfrak{H}_n \times \mathbb{C}^n$  上の関数であって,  $\mathfrak{H}_n \times \mathbb{C}^n$  へのヤコビ群  $\mathrm{Sp}_{2n}^j(\mathbb{R})$  からの

作用について対称性をもつものであるので、まずヤコビ群を定義する。1をもつ可換環  $R$  に対して、次数  $n$  のハイゼンベルグ群  $\mathcal{H}_n(R)$  を

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n(R) &= \{([\lambda, \mu], \kappa) \mid \lambda, \mu \in R^n, \kappa \in R\}, \\ ([\lambda_1, \mu_1], \kappa_1) \cdot ([\lambda_2, \mu_2], \kappa_2) &= ([\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2], \kappa_1 + \kappa_2 + {}^t\lambda_1\mu_2 - {}^t\mu_1\lambda_2) \end{aligned}$$

と定義する。  $\mathcal{H}_n(R)$  と  $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$  を以下のうめこみによって  $\mathrm{Sp}_{2(n+1)}(R)$  の部分群とみなす：

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_{2n}(R) &\hookrightarrow \mathrm{Sp}_{2(n+1)}(R), & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & A & B & \\ & & 1 & \\ & C & & D \end{pmatrix}, \\ \mathcal{H}_n(R) &\hookrightarrow \mathrm{Sp}_{2(n+1)}(R), & ([\lambda, \mu], \kappa) &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & {}^t\lambda & \kappa & {}^t\mu \\ & 1_n & \mu & \\ & & 1 & \\ & & & -\lambda & 1_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これによって、  $\mathrm{Sp}_{2(n+1)}(R)$  の部分群としてヤコビ群  $\mathrm{Sp}_{2n}^J(R) = \mathrm{Sp}_{2n}(R) \times \mathcal{H}_n(R)$  が実現できる。

ベクトル値関数  $F(Z, w) : \mathfrak{H}_2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow V_j$  に対して  $g \in \mathrm{GSp}_4^+(\mathbb{R})$  からの重さ  $(k, j)$  の正則および歪正則の (index 1 の) 作用をそれぞれ

$$\begin{aligned} [F]_{(k,j),1}^{\mathrm{hol}}(Z, w) &= \nu(g)^{k+\frac{j}{2}} \exp(2\pi i(-{}^t w J(g, Z)^{-1} C w)) \\ &\quad \times \det(J(g, Z))^{-k} \mathrm{Sym}_j(J(g, Z))^{-1} F(gZ, \nu(g)^{\frac{1}{2}} {}^t J(g, Z)^{-1} w), \\ [F]_{(k,j),1}^{\mathrm{skew}}(Z, w) &= \nu(g)^{k+\frac{j}{2}} \exp(2\pi i(-{}^t w J(g, Z)^{-1} C w)) \\ &\quad \times \frac{|\det J(g, Z)|}{\det J(g, Z)} \overline{\det J(g, Z)^{-k} \mathrm{Sym}_j(J(g, Z))^{-1} F(gZ, \nu(g)^{\frac{1}{2}} {}^t J(g, Z)^{-1} w)} \end{aligned}$$

で定める。ただしここで、  $C$  は  $g$  の左下の  $2 \times 2$  行列。またさらに、  $([\lambda, \mu], \kappa) \in \mathcal{H}_2(\mathbb{R})$  からの作用を

$$\begin{aligned} [F]_{(k,j),1}^{\mathrm{hol}}([\lambda, \mu], \kappa)(Z, w) &= [F]_{(k,j),1}^{\mathrm{skew}}([\lambda, \mu], \kappa)(Z, w) \\ &= \exp(2\pi i({}^t \lambda Z \lambda + 2 {}^t \lambda w + {}^t \lambda \mu + \kappa)) F(Z, w + Z \lambda + \mu) \end{aligned}$$

で定める。  $F$  が次の条件 (0)-(2) を満たすとき、これを重さ  $(k, j)$  の (index 1 な) 正則ヤコビカスプ形式といい、そのような関数の全体がなす空間を  $J_{(k,j),1}^{\mathrm{hol,cusp}}$  と書く。また、  $F$  が条件 (3)-(5) を満たすとき、これを重さ  $(k, j)$  の (index 1 な) 歪正則ヤコビカスプ形式といい、そのような関数の全体がなす空間を  $J_{(k,j),1}^{\mathrm{skew,cusp}}$  と書く。

(0)  $F$  は  $\mathfrak{H}_2 \times \mathbb{C}^2$  上正則；

(1) 任意の  $g \in \mathrm{Sp}_4^J(\mathbb{Z})$  に対して  $F|_{(k,j),1}^{\mathrm{hol}} g = F$ ；

(2)  $F$  は以下のようなフーリエ展開をもつ：

$$F(Z, w) = \sum_{\substack{(N,r) \in L_2^* \times \mathbb{Z}^2 \\ 4N-r \quad {}^t r > 0}} A(N, r) \exp(2\pi i(\mathrm{tr}(NZ) + {}^t r w)).$$

(3)  $F$  は  $w \in \mathbb{C}^2$  に関して正則で、  $Z \in \mathfrak{H}_2$  の実部と虚部に関して実解析的；

(4) 任意の  $g \in \mathrm{Sp}_4^J(\mathbb{Z})$  に対して  $F|_{(k,j),1}^{\mathrm{skew}} g = F$ ；

(5)  $F$  は以下のようなフーリエ展開をもつ：

$$F(Z, w) = \sum_{\substack{(N, r) \in L_2^2 \times \mathbb{Z}^2 \\ 4N - r^t r < 0}} A(N, r) \exp(2\pi i(\operatorname{tr}(NZ - \frac{1}{2}i(4N - r^t r)Y))) \exp(2\pi i(\langle r, w \rangle)).$$

ただし  $Z \in \mathfrak{H}_2$  の虚部を  $Y$  と書いた。

$J_{(k,j),1}^{\text{hol,cusp}}$  と  $J_{(k,j),1}^{\text{skew,cusp}}$  にもヘッケ理論がある。  $p$  を 2 を含めた任意の素数とすると、  $F \in J_{(k,j),1}^{\star}$  ( $\star \in \{\text{hol, skew}\}$ ) に作用するヘッケ作用素  $T_s^J(p)$  が

$$F|_{(k,j),1}^{\star} T_s^J(p) = \sum_{\lambda, \mu \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2} \sum_{g_s \in \operatorname{Sp}_4(\mathbb{Z}) \setminus \operatorname{Sp}_4(\mathbb{Z})K_s(p^2)\operatorname{Sp}_4(\mathbb{Z})} F|_{(k,j),1}^{\star} g_s|_{(k,j),1}^{\star}([\lambda, \mu], 0)$$

で定義される。

伊吹山氏が [8] において述べられたように、  $J_{(k,j),1}^{\text{hol,cusp}}$  または  $J_{(k,j),1}^{\text{skew,cusp}}$  と  $S_{k-\frac{1}{2},j}^+(\Gamma_0(4), (\frac{-1}{\cdot}))$  の間には次のような性質のよい同型が知られている。

**定理 3.1.** 線形同型

$$\sigma : J_{(k,j),1}^{\star, \text{cusp}} \xrightarrow{\cong} S_{k-\frac{1}{2},j}^+(\Gamma_0(4), (\frac{-1}{\cdot})), \quad \star = \begin{cases} \text{hol}, & k \text{ が奇数のとき,} \\ \text{skew}, & k \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

であって、奇素数  $p$  と  $F \in J_{(k,j),1}^{\star, \text{cusp}}$  に対して

$$F|_{(k,j),1}^{\star} T_s^J(p) = p^{3+\frac{s}{2}} \left(\frac{-1}{p}\right)^s \sigma(F)|_{k-\frac{1}{2},j} T_s(p), \quad s = 0, 1, 2$$

を満たすものが存在する。

この同型  $\sigma$  はフーリエ係数を用いて明示的に構成される。詳しくは [8, Theorem 5.1] を参照されたい。これにより、  $S_{(k-\frac{1}{2},j)}^+(\Gamma_0(4), (\frac{-1}{\cdot}))$  上の  $p = 2$  でのヘッケ作用素  $T_s(2)$  を

$$F|_{(k,j),1}^{\star} T_s^J(2) = 2^{3+\frac{s}{2}} \sigma(F)|_{k-\frac{1}{2},j} T_s(2)$$

で定義する。ただし  $F \in J_{(k,j),1}^{\star, \text{cusp}}$  ( $\star \in \{\text{hol, skew}\}$ )。以上で、伊吹山予想 (定理 2.1) の正確な主張が述べられた。

## 4 定理 2.1 の証明

主結果である伊吹山予想 (定理 2.1) の証明を簡単に紹介したい。まず、ヘッケ固有形式  $f \in S_{j+3, 2k-6}(\operatorname{Sp}_4(\mathbb{Z}))$  は、よく知られた方法 ([2]) によって  $\operatorname{PGSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  のカスプ表現  $\pi_f$  を与える。偶然同型によって  $\operatorname{PGSp}_4$  と  $\operatorname{SO}_5$  は (標数が 2 でない限りは) 同型であり、Arthur [1] の重複度公式は  $\operatorname{SO}_5$  の保型表現を  $A$  パラメータというパラメータを用いて分類している。これらを用いて Chenevier-Lannes [4, Proposition 9.1.4] はカスプ形式の空間  $S_{j+3, 2k-6}(\operatorname{Sp}_4(\mathbb{Z}))$  のヘッケ固有基底を  $A$  パラメータで記述した。

本題は重さ半整数カスプ形式の方である。こちらは、筆者が [10] で研究した Bernt-Schmidt [3] のヤコビ群の表現論の発展形を用いる。まずヘッケ固有形式  $F' \in S_{k-\frac{1}{2},j}^+(\Gamma_0(4), (\frac{-1}{\cdot}))$  をひとつとると、定理 3.1 によって対応する (歪) 正則ヤコビカスプ形式  $F$  がある。これもヘッケ固有形式だから、ヤコビ群  $\operatorname{Sp}_4^J(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  のカスプ表現  $\pi_F$  を与える。ここで、Bernt-Schmidt [3] による次数 1 のヤコビ群  $\operatorname{Sp}_2^J$  の表現論を次数  $n$  に一般化した結果によって、  $\operatorname{Sp}_{2n}^J$  の表現は適切な意味でメタプレクティック群  $\operatorname{Mp}_{2n}$  の表現と 1 対 1 に対応していることが分かる。特に、  $\operatorname{Sp}_4^J(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  のカスプ表現  $\pi_F$  から  $\operatorname{Mp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  のカスプ表現  $\pi_F'$  が得られる。

Gan-市野 [5, 6] の重複度公式は  $\mathrm{Mp}_4$  の保型表現を  $A$  パラメータで分類しているから, Chenevier-Lannes [4, Proposition 9.1.4] に倣い, カスプ形式の空間  $S_{k-\frac{1}{2}, j}^+(\Gamma_0(4), (\frac{-1}{\cdot}))$  のヘッケ固有基底を  $A$  パラメータで記述することが出来る.

最後にそれぞれの  $A$  パラメータを比較してふたつの空間  $S_{j+3, 2k-6}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$  と  $S_{k-\frac{1}{2}, j}^+(\Gamma_0(4), (\frac{-1}{\cdot}))$  のヘッケ固有基底の間の全単射を構成すれば線形同型が得られる.

## 5 重要なこと

### 5.1 $j$ の偶奇について

前節では証明を短く述べたために  $j$  が偶数であるという条件がどこで使われたのかがわからなくなってしまっているが, この条件は, Gan-市野 [5, 6] の重複度公式を用いる際に必要となるものである. 実は,  $j$  が奇数のときにどうなるかについては少し見通しが立っており, 定理 2.1 と似た形の同型があるのではないかと考えられる. これは今後の課題である.

### 5.2 ヤコビ群を用いる理由

前節の証明ではヘッケ固有形式  $F' \in S_{k-\frac{1}{2}, j}^+(\Gamma_0(4), (\frac{-1}{\cdot}))$  からヤコビ形式  $F$  を対応させて,  $F$  からヤコビ群  $\mathrm{Sp}_4^J(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  のカスプ表現  $\pi_F$  を構成し, メタプレクティック群  $\mathrm{Mp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  のカスプ表現  $\pi'_F$  に対応させた. しかし, 重さ半整数の保型形式  $F'$  から直接メタプレクティック群の保型表現  $\pi_{F'}$  を構成する方法はすでに知られ ([7, 11]) ており, ヘッケ作用素の理論もある. 本稿でそうしなかった理由は, レベルが  $\Gamma_0(4)$  であるために 2 が悪い素点となっていたことにある.

定理 2.1 が  $L$  関数を保つことを要求しているが, これは保型形式から保型表現を構成するときのヘッケ作用素の理論に対応していて, 構成した保型表現の有限素点での局所因子が不分岐表現であることも暗に想定されている. だが悪い素点である 2 においては, ヘッケ作用素の理論がうまく働かないことが分かるように,  $\pi_{F'}$  の  $p=2$  での局所因子  $\pi_{F', 2}$  が  $\mathrm{Mp}_4(\mathbb{Q}_2)$  の表現として不分岐であると示すことは (少なくとも今の筆者には) できない. こうなると Gan-市野 [5, 6] の重複度公式も利用できず, 証明は得られない. しかし, ヤコビ形式はレベルが  $\mathrm{Sp}_4^J(\mathbb{Z})$  であるから 2 が悪い素点ではない. そのため保型表現を構成すれば有限素点での局所因子は不分岐表現で, ヘッケ作用素の理論も適用できて, 証明がうまくいくのである.

## 参考文献

- [1] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: orthogonal and symplectic groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **61**, (2013).
- [2] M. Asgari, R. Schmidt, *Siegel modular forms and representations*, Manuscripta Math. **104**, no. 2, pp. 173–200, (2001).
- [3] R. Berndt, R. Schmidt, *Elements of the representation theory of the Jacobi group*, Birkhäuser, (1998).
- [4] G. Chenevier, J. Lannes, *Automorphic forms and even unimodular lattices*, *Ergeb. Math. Grenz.* (3), **69**, Springer Verlag, (2019).
- [5] W. T. Gan, A. Ichino, *The Shimura–Waldspurger correspondence for  $\mathrm{Mp}_{2n}$* , *Ann. Math.* (2) **188**, no. 3, pp. 965–1016, (2018).

- [6] W. T. Gan, A. Ichino, *The automorphic discrete spectrum of  $\mathrm{Mp}_4$* , Int. Math. Res. Not., rnaa 121, (2020).
- [7] K. Hiraga, T. Ikeda, *On the Kohnen plus space for Hilbert modular forms of half-integral weight I*, Compos. Math. **149**, pp. 1963-2010, (2013).
- [8] T. Ibukiyama, *A conjecture on a Shimura type correspondence for Siegel modular forms, and Harder's conjecture on congruences*, Modular Forms on Schiermonnikoog Edited by Bas Edixhoven, Gerard van der Geer and Ben Moonen, Cambridge University Press, pp. 107-144, (2008).
- [9] T. Ibukiyama, *Conjectures of Shimura type and of Harder type revisited*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **41** pp. 79-103, (2014).
- [10] H. Ishimoto, *Proofs of Ibukiyama's conjectures on Siegel modular forms of half-integral weight and of degree 2*, arXiv:2010.08736.
- [11] R. H. Su, *The Kohnen plus space for Hilbert-Siegel modular forms*, J. Number Theory, **163**, pp. 267-295, (2016).