Hardy 空間上のウェーブレットについて

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 木下 保
Tamotu Kinoshita
Institute of Mathematics,
University of Tsukuba

ウェーブレット理論でしばしば登場する Hardy 空間 $H^2(\mathbf{R})$ は $L^2(\mathbf{R})$ に含まれる部分空間であり、次で定義される。

$$H^2(\mathbf{R}) = \Big\{ f \in L^2(\mathbf{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \ \text{ for } a.e.\ \xi \le 0 \Big\}.$$

Hardy 空間 $H^2(\mathbf{R})$ に対する直交ウェーブレット ψ を H^2 ウェーブレットと呼ぶことにして、文献 [6] や [8] 等を参考に解説してこう。$H^2(\mathbf{R})$ に対しても $L^2(\mathbf{R})$ のときと同様に MRA が構成される。

定義 $H^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間の族 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ が次を満たすとき多重解像度解析 (MRA) という。

(i) $V_j \subset V_{j+1}$ $(j \in \mathbf{Z})$.

(ii) $f(x) \in V_j \Longleftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$.

(iii) $\varphi \in V_0$ が存在して、$\big\{\varphi(x-k) : k \in \mathbf{Z}\big\}$ が V_0 の正規直交基底となる。
φ をスケーリング関数と呼ぶ。

(iv) $\cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$.

(v) $\overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = H^2(\mathbf{R})$.

L^2 のときの MRA ウェーブレットに関する代表的な以下の公式も成り立つ。

ローパスフィルタ）$|m_0(\xi)|^2 + |\overline{m_0(\xi+\pi)}|^2 = 1$.

スケーリング関数）V_0 で少なくとも正規直交系より $\displaystyle\sum_{\ell\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\ell\pi)|^2 = 1$ で、

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \Longrightarrow \hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi).$$

ウェーブレット）$\hat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)}\hat{\varphi}(\xi)$ a.e. $\xi \in \mathbf{R}$.

MRA ウェーブレット）$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\hat{\psi}(2^j\xi)\right|^2$ の式も成り立つことを考慮して、必要十分条件は次である。

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\ell\in\mathbf{Z}}\left|\hat{\psi}\Big(2^j(\xi+2\ell\pi)\Big)\right|^2 = 1 \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbf{R}.$$

しかしながら、以下のような違いにも注目したい。

• コンパクトなサポートを持つ H^2 ウェーブレットは存在しない。なぜならば $H^2(\mathbf{R})$ の定義からわかるように、周波数空間の $\xi = 0$ において（恒等的 0 であるような関数以外だと）関数が解析的な滑らかさにはなり得ない。従って、時間空間で指数減衰ができなくなるからである。
• $|\hat{\psi}|$ が連続で、帯域制限となる H^2 ウェーブレットは存在しないという事実も後に紹介する Regularity condition と呼ばれる $\mathfrak{R}^0$ に関する結果から示される。

結局のところ周波数空間において不連続で、時間空間において減衰の低いものならば、見つかりやすい可能性を示唆している。

L^2 ウェーブレットである Shannon ウェーブレットのフーリエ変換は、$\hat{\Psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}}\chi_{[-2\pi,-\pi)\cup(\pi,2\pi]}(\xi)$ であった。さらに、Shannon ウェーブレットでは例外的に $e^{i\frac{\xi}{2}}$ を取り除くことができ、1 の単位分割にもとづく

$$\hat{\Psi}(\xi) = \chi_{[-2\pi,-\pi)\cup(\pi,2\pi]}(\xi)$$

の導入もできた。これと類似な H^2 ウェーブレットを紹介しよう。

例 1）$\hat{\psi}(\xi) = \chi_{[2\pi,4\pi]}(\xi)$ で定義される $\psi(x)$ は、H^2 ウェーブレットである。周波数空間の正の方だけで、区間幅が 2 倍になっていることに注意する（ノルムの値が 1 のままとなる）。ただし、$\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[0,2\pi]}(\xi)$ で、$m_0(\xi) = 1$ for $\xi \in [0,\pi],\ = 0$ for $\xi \in [\pi, 2\pi]$ である。また、$|m_0(\xi)|^2 + |\overline{m_0(\xi+\pi)}|^2 = 1$ の関係式から $m_0(\xi) = 0$ for $\xi \in [-\pi, 0]$ ということもわかる（2π 周期拡張より、$m_0(\xi) = 1$ for $\xi \in [-2\pi, -\pi]$）。

Remark 1.1. *Hardy* 版になっても、*Shannon* タイプだとウェーブレットもスケーリング関数もよく似ている。周波数空間で正の方だけで、スケールを変えて幅を 2 倍にしただけである。しかし、ローパスフィルタは負の方もあり、幅を 2 倍にはしていないことに注意する。しかも、*Shannon* ウェーブレットの場合のローパスフィルタは偶関数だったが、*Shannon* タイプの H^2 ウェーブレットのローパスフィルタは偶関数になっていない。

より一般に

$$\begin{aligned} K_n^+ &= \left[\frac{2^n\pi}{2^{n+1}-1}, \pi\right] \cup \left[2^n\pi, \frac{2^{2n+1}\pi}{2^{n+1}-1}\right], \\ K_n^- &= \left[-\frac{2^{2n+1}\pi}{2^{n+1}-1}, -2^n\pi\right] \cup \left[-\pi, -\frac{2^n\pi}{2^{n+1}-1}\right] \end{aligned}$$

を用いて $K_n = K_n^+ \cup K_n^-$ とおき、L^2 ウェーブレットの Shannon タイプの族として、次を考えてみよう。

$$\hat{\Psi}^{(n)}(\xi) = \chi_{K_n}(\xi) \quad (n \geq 0).$$

帯域制限ウェーブレットが $|K_n| = 2\pi$ を満たすとき、Minimally Supported Frequency (MSF) ウェーブレットと呼ばれる。$K = K_n$ が同時に 2 種類の $\mathbf{R}$ の分割：

$$(i) \quad \left\{2^j K; j \in \mathbf{Z}\right\} \qquad (ii) \quad \left\{K + 2\ell\pi; \ell \in \mathbf{Z}\right\}$$

になることから、$\Psi^{(n)}$ が L^2 版の直交ウェーブレットになる（[6], [8] 等を見よ)。
(i) の $K = K_n$ が $\mathbf{R}$ の分割となっていること:

$$\begin{aligned} \bigcup_{j\in\mathbf{Z}} \left\{2^j K_n^+\right\} &= \left(\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} \left[\frac{2^{n+j}\pi}{2^{n+1}-1}, 2^j\pi\right]\right) \bigcup \left(\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} \left[2^{n+j}\pi, \frac{2^{2n+j+1}\pi}{2^{n+1}-1}\right]\right) \\ &= \left(\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} \left[\frac{2^{n+j}\pi}{2^{n+1}-1}, 2^j\pi\right]\right) \bigcup \left(\bigcup_{j'\in\mathbf{Z}} \left[2^{n+(j'-n-1)}\pi, \frac{2^{2n+(j'-n-1)+1}\pi}{2^{n+1}-1}\right]\right) \\ &= \left(\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} \left[\frac{2^{n+j}\pi}{2^{n+1}-1}, 2^j\pi\right]\right) \bigcup \left(\bigcup_{j'\in\mathbf{Z}} \left[2^{j'-1}\pi, \frac{2^{n+j'}\pi}{2^{n+1}-1}\right]\right) \\ &= \bigcup_{j\in\mathbf{Z}} \left[2^{j-1}\pi, 2^j\pi\right] \\ &= \mathbf{R}^+. \end{aligned}$$

同様に、

$$\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} \left\{2^j K_n^-\right\} = \mathbf{R}^-$$

であり、次がわかる。

$$\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}} \left\{2^j K_n\right\} = \left(\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}} \left\{2^j K_n^+\right\}\right) \bigcup \left(\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}} \left\{2^j K_n^-\right\}\right) = \mathbf{R}.$$

(ii) の $K=K_n$ が $\mathbf{R}$ の分割となっていること:

$$
\begin{aligned}
&\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left\{K_n^+ + 2\ell\pi\right\}\\
=\ &\left(\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left[\frac{2^n\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell\pi,\pi+2\ell\pi\right]\right)\bigcup\left(\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left[2^n\pi+2\ell\pi,\frac{2^{2n+1}\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell\pi\right]\right)\\
=\ &\left(\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left[\frac{2^n\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell\pi,\pi+2\ell\pi\right]\right)\\
&\qquad\bigcup\left(\bigcup_{\ell'\in\mathbf{Z}}\left[2^n\pi+2(\ell'-2^{n-1})\pi,\frac{2^{2n+1}\pi}{2^{n+1}-1}+2(\ell'-2^{n-1})\pi\right]\right)\\
=\ &\left(\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left[\frac{2^n\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell\pi,\pi+2\ell\pi\right]\right)\bigcup\left(\bigcup_{\ell'\in\mathbf{Z}}\left[2\ell'\pi,\frac{2^n\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell'\pi\right]\right)\\
=\ &\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left(\left[2\ell\pi,\frac{2^n\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell\pi\right]\bigcup\left[\frac{2^n\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell\pi,\pi+2\ell\pi\right]\right)\\
=\ &\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left[2\ell\pi,\pi+2\ell\pi\right].
\end{aligned}
$$

同様に、

$$
\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left\{K_n^- + 2\ell\pi\right\}=\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left[-\pi-2\ell\pi,-2\ell\pi,\right]=\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left[-\pi+2\ell\pi,2\ell\pi\right]
$$

であり、次がわかる。

$$
\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left\{K_n + 2\ell\pi\right\}=\left(\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left\{K_n^+ + 2\ell\pi\right\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\left\{K_n^- + 2\ell\pi\right\}\right)=\mathbf{R}.
$$

ところで、Shannon タイプ $(n=0)$ だと、周波数空間で正の半空間だけで区間幅を 2 倍にしたものが H^2 ウェーブレットになっていた。この Shannon タイプの族 $(n\geq 0)$ のときにも、周波数空間の正の方だけで区間幅を 2 倍にしたものが H^2 ウェーブレットになり得るのかどうかを調べてみよう。

$$
\hat{\psi}^{(n)}(\xi)=\chi_{2K_n^+}(\xi)\quad(n\geq 0).
$$

ここで、$K=2K_n^+$ が次のような $\mathbf{R}^+$ の分割となっていることがわかる。

$$
(i)^+\quad\left\{2^jK;j\in\mathbf{Z}\right\}
$$

(i) の場合とまったく同様で正の方だけに注目し、番号 j をズラせば明らかである。

さらに、この特別な H^2 ウェーブレットの場合には、$K=2K_n^+$ も次のような $\mathbf{R}$ の分割となっていることがわかる。

$$(ii)^+ \quad \Big\{K+2\ell\pi ; \ell \in \mathbf{Z}\Big\}$$

実際、次が成り立っている。

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\Big\{2K_n^+ + 2\ell\pi\Big\}\\
=\ &\Big(\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\Big[\frac{2^{n+1}\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell\pi, 2\pi+2\ell\pi\Big]\Big)\cup\Big(\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\Big[2^{n+1}\pi+2\ell\pi, \frac{2^{2n+2}\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell\pi\Big]\Big)\\
=\ &\Big(\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\Big[\frac{2^{n+1}\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell\pi, 2\pi+2\ell\pi\Big]\Big)\\
&\qquad\qquad\bigcup\Big(\bigcup_{\ell'\in\mathbf{Z}}\Big[2^{n+1}\pi+2(\ell'-2^n)\pi, \frac{2^{2n+2}\pi}{2^{n+1}-1}+2(\ell'-2^n)\pi\Big]\Big)\\
=\ &\Big(\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\Big[\frac{2^{n+1}\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell\pi, 2\pi+2\ell\pi\Big]\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{\ell'\in\mathbf{Z}}\Big[2\ell'\pi, \frac{2^{n+1}\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell'\pi\Big]\Big)\\
=\ &\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\Big(\Big[\frac{2^{n+1}\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell\pi, 2\pi+2\ell\pi\Big]\bigcup\Big[2\ell\pi, \frac{2^{n+1}\pi}{2^{n+1}-1}+2\ell\pi\Big]\Big)\\
=\ &\bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}}\Big[2\ell\pi, 2\pi+2\ell\pi\Big]\\
=\ &\mathbf{R}.
\end{aligned}$$

このとき、正規直交性についてのみ確認をしておこう。まず $(i)^+$ より、次が得られる。

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}_x}\psi_{j,k}^{(n)}(x)\psi_{j',k'}^{(n)}(x)dx\\
=\ &2^{\frac{j+j'}{2}}\int_{\mathbf{R}_x}\psi^{(n)}(2^jx-k)\overline{\psi^{(n)}(2^{j'}x-k')}dx\\
=\ &\frac{1}{2\pi}\cdot 2^{-\frac{j+j'}{2}}\int_{\mathbf{R}_\xi}e^{-i2^{-j}k\xi}\hat{\psi}^{(n)}(2^{-j}\xi)\overline{e^{-i2^{-j'}k'\xi}\hat{\psi}^{(n)}(2^{-j'}\xi)}d\xi\\
=\ &\frac{1}{2\pi}\cdot 2^{-\frac{j+j'}{2}}\int_0^\infty e^{-i(2^{-j}k-2^{-j'}k')\xi}\chi_{2K_n^+}(2^{-j}\xi)\chi_{2K_n^+}(2^{-j'}\xi)d\xi\\
=\ &\frac{1}{2\pi}\delta_{j,j'}2^{-j}\int_0^\infty e^{-i2^{-j}(k-k')\xi}\chi_{2K_n^+}(2^{-j}\xi)^2d\xi\\
=\ &\frac{1}{2\pi}\delta_{j,j'}\int_{\mathbf{R}_\xi}e^{-i(k-k')\xi}\chi_{2K_n^+}(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

従って、k に関する正規直交性はフーリエ級数の基底の正規直交性に帰着して、次が得られる。

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{R}_x} \psi_{j,k}^{(n)}(x)\psi_{j',k'}^{(n)}(x)dx \\
= \; & \frac{1}{2\pi}\delta_{j,j'} \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \int_{-2\ell\pi}^{2\pi-2\ell\pi} e^{-i(k-k')\xi}\chi_{2K_n^+}(\xi)d\xi \\
= \; & \frac{1}{2\pi}\delta_{j,j'} \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-k')\xi}\chi_{2K_n^+}(\xi-2\ell\pi)d\xi \\
= \; & \frac{1}{2\pi}\delta_{j,j'} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-k')\xi}\chi_{\cup_{\ell\in\mathbf{Z}}\{2K_n^+ +2\ell\pi\}}(\xi)d\xi \\
= \; & \frac{1}{2\pi}\delta_{j,j'} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-k')\xi}d\xi \\
= \; & \delta_{j,j'}\delta_{k,k'}.
\end{aligned}$$

例 2） $n \geq 0$ に対して $\hat{\psi}^{(n)}(\xi) = \chi_{2K_n^+}(\xi)$ で定義される $\psi^{(n)}(x)$ は、H^2 ウェーブレットである。

この Shannon タイプの族 $(n \geq 0)$ は、（MRA ウェーブレットとは限らない）H^2 版の直交ウェーブレットの必要十分条件

$$\begin{cases}
\displaystyle\sum_{j\in\mathbf{Z}} \left|\hat{\psi}(2^j\xi)\right|^2 = \chi_{\mathbf{R}^+}(\xi) \quad \text{for} \quad \text{a.e. } \xi\in\mathbf{R} \\
\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}\Big(2^j(\xi+2(2\ell+1)\pi)\Big)\overline{\hat{\psi}(2^j\xi)} = 0 \quad \text{for} \quad \text{a.e. } \xi\in\mathbf{R}, \quad \ell\in\mathbf{Z}
\end{cases}$$

を満たしている。L^2 版と違いは、上段の右辺を 1 から $\chi_{\mathbf{R}^+}(\xi)$ に変更したことである。

Remark 1.2. H^2 版で正規直交系の必要十分条件だと、次で与えられる。

$$\begin{cases}
\displaystyle\sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \left|\hat{\psi}(\xi+2\ell\pi)\right|^2 = 1 \quad \text{for} \quad \text{a.e. } \xi\in\mathbf{R} \\
\displaystyle\sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \hat{\psi}\Big(2^j(\xi+2\ell\pi)\Big)\overline{\hat{\psi}(\xi+2\ell\pi)} = 0 \quad \text{for} \quad \text{a.e. } \xi\in\mathbf{R}, \quad j\geq 1
\end{cases}$$

これは、L^2 版と全く同じである。

• 特に $n = 2$ のとき、L^2 版の MRA ウェーブレットでない有名な Journé ウェーブレット

$$\hat{\Psi}^{(2)}(\xi) = \chi_{[-32\pi/7,-4\pi)\cup[-\pi,-4\pi/7]\cup[4\pi/7,\pi]\cup[4\pi,32\pi/7]}(\xi)$$

となる。これに対応する H^2 ウェーブレット

$$\hat{\psi}^{(2)}(\xi) = \chi_{[8\pi/7,2\pi]\cup[8\pi,64\pi/7]}(\xi)$$

も、H^2 版の MRA ウェーブレットではない。L^2 版は [5] の定理 4.4 より Journé の $n = 2$ のときだけでなく、$n \geq 2$ のときも NG である。

• 注目すべきなのは Shannon である $n = 0$ の次にシンプルな $n = 1$ のときである。[6] の §3 の定理 4.12 から次の定理が知られている（[5] の定理 4.4 も見よ）。

定理 1.3. $\Psi \in L^2(\mathbf{R})$ を直交ウェーブレットとする。$|\hat{\Psi}|$ のサポートが

$$\left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$$

に含まれるならば、Ψ は *MRA* ウェーブレットとなる。

この定理よりまさに

$$\hat{\Psi}^{(1)}(\xi) = \chi_{[-8\pi/3,-2\pi)\cup[-\pi,-2\pi/3]\cup[2\pi/3,\pi]\cup[2\pi,8\pi/3]}(\xi)$$

は L^2 版の MRA ウェーブレットであることがわかる。
一方で、これに対応する H^2 ウェーブレットは

$$\hat{\psi}^{(1)}(\xi) = \chi_{[4\pi/3,2\pi]\cup[4\pi,16\pi/3]}(\xi)$$

であるが、H^2 版の MRA ウェーブレットとならない。実際に、MRA ウェーブレットの必要十分条件の等式

$$\sum_{\ell\in\mathbf{Z}}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\hat{\psi}\Big(2^j(\xi+2\ell\pi)\Big)\right|^2 = 1$$

を $n \geq 1$ に対して満たしていない。

$n=1$ のときだけを確認してみよう。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell\in\mathbf{Z}}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\hat{\psi}^{(1)}\Big(2^j(\xi+2\ell\pi)\Big)\right|^2 \\
\geq\ & \sum_{j=1}^{\infty}\left|\hat{\psi}^{(1)}(2^j\xi)\right|^2+\sum_{j=1}^{\infty}\left|\hat{\psi}^{(1)}\Big(2^j(\xi+2\pi)\Big)\right|^2 \\
\geq\ & \sum_{j=1}^{\infty}\left|\chi_{[4\pi/3,2\pi]}(2^j\xi)+\chi_{[4\pi,16\pi/3]}(2^j\xi)\right|^2+\left|\hat{\psi}^{(1)}\Big(2(\xi+2\pi)\Big)\right|^2 \\
=\ & \sum_{j=1}^{\infty}\left|\chi_{[2^{2-j}\pi/3,2^{1-j}\pi]}(\xi)\right|^2+\sum_{j=1}^{\infty}\left|\chi_{[2^{2-j}\pi,2^{4-j}\pi/3]}(\xi)\right|^2 \\
&\quad+\left|\chi_{[4\pi/3,2\pi]\cup[4\pi,16\pi/3]}\Big(2(\xi+2\pi)\Big)\right|^2 \\
=\ & \sum_{j=2}^{\infty}\left|\chi_{[2^{3-j}\pi/3,2^{2-j}\pi]}(\xi)\right|^2+\sum_{j=1}^{\infty}\left|\chi_{[2^{2-j}\pi,2^{4-j}\pi/3]}(\xi)\right|^2 \\
&\quad+\left|\chi_{[2\pi/3,\pi]\cup[2\pi,8\pi/3]}(\xi+2\pi)\right|^2 \\
=\ & \sum_{j=2}^{\infty}\left|\chi_{[2^{3-j}\pi/3,2^{4-j}\pi/3]}(\xi)\right|^2+\left|\chi_{[2\pi,2^3\pi/3]}(\xi)\right|^2 \\
&+\left|\chi_{[2\pi/3-2\pi,\pi-2\pi]\cup[2\pi-2\pi,8\pi/3-2\pi]}(\xi)\right|^2 \\
=\ & \left|\chi_{(0,2^2\pi/3]}(\xi)\right|^2+\left|\chi_{[2\pi,2^3\pi/3]}(\xi)\right|^2 \\
&+\left|\chi_{[-4\pi/3,-\pi]\cup[0,2\pi/3]}(\xi)\right|^2.
\end{aligned}
$$

これより $\xi\in(0,2\pi/3]$ の区間上は 2 となり、1 よりも大きくなってしまうので条件を満たさないことがわかる。

また、[5] よりさきほどの K_n^+ を変更した

$$
\tilde{K}_n^+=\Big[\frac{(p+1)\pi}{2^{n+1}-1},\frac{p\pi}{2^n-1}\Big]\cup\Big[\frac{2^np\pi}{2^n-1},\frac{2^{n+1}(p+1)\pi}{2^{n+1}-1}\Big]
$$

を用いて、次の H^2 ウェーブレットも知られている。

例３） $\hat{\psi}_p^{(n)}(\xi)=\chi_{2\tilde{K}_n^+}(\xi)$ $(n\geq 1,\ 1\leq p<2(2^n-1))$ で定義される $\psi^{(n)}(x)$ は、H^2 ウェーブレットである。

K_n^+ は $p=2^n-1$ の場合だけだったことになる。もし $p=1$ でかつ $n=1$ のときだと、

$$\hat{\psi}_1^{(1)}(\xi)=\chi_{[4\pi/3,2\pi]\cup[4\pi,16\pi/3]}(\xi)$$

となる。これは $\hat{\psi}^{(1)}(\xi)$ とまったく同じであり、MRA ウェーブレットにはならない。
　不連続なウェーブレット以外の H^2 ウェーブレットも考えてみよう。

Regularity condition $\mathfrak{R}^0$：もし $|\hat{\psi}|$ が $\mathbf{R}$ 上で連続で

$$(C)\qquad |\hat{\psi}(\xi)|=O\Big(\langle\xi\rangle^{-\alpha-1/2}\Big)\quad \text{for some } \alpha>0$$

を満たすならば、 ψ が Regularity condition $\mathfrak{R}^0$ を満たすという。

ψ が $L^2(\mathbb{R})$ 版の MRA ウェーブレットの場合、$\mathfrak{R}^0$ が満たされる。このため、H^2 ウェーブレットの特徴づけにも役立つことが期待できる。[7] において $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属する H^2 ウェーブレットが存在するか否かの問題が提起されたが、 [1] と [2] により $\mathfrak{R}^0$ 条件を満たす H^2 ウェーブレットは存在しないことが証明され、$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属する H^2 ウェーブレットが存在しないことも結論された。$H^2(\mathbf{R})$ 版の MRA の構造から、 $\hat{\varphi}$ は原点でジャンプすることになる。一方で、$|\hat{\psi}(\xi)|(=|\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\hat{\varphi}(\xi/2)|)$ は $m_0(\xi/2+\pi)$ の零点集合のおかげで、原点で滑らかになり得る。このとき、次の問題を考えることは自然である。

“$|\hat{\psi}|$ が $\mathbf{R}$ 上で連続で、(C) を満たさないような H^2 ウェーブレットは存在するのであろうか?”

この問題に対する答えとして、[4] で以下の結果を示した。

定理 1.4. $|\hat{\psi}|$ が $\mathbf{R}$ 上で連続で、次を満たすような H^2 ウェーブレット ψ が存在する。

$$|\hat{\psi}(\xi)|=O\Big((\log\langle\xi\rangle)^{-1}\Big).$$

　[4] では、$|\hat{\psi}|$ の減衰度は低いが連続な H^2 ウェーブレットになるような具体例を実際に構成している。

References

[1] P. Auscher, Solution of two problems on wavelets, *J. Geom. Anal.* **5** (1995), no. 2, 181–236.

[2] P. Auscher, Il n'existe pas de bases d'ondelettes régulières dans l'espace de Hardy $H^2(\mathbf{R})$, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **315** (1992), no. 7, 769–772.

[3] K. Fujita, Reproducing kernels related to the complex sphere, *Tokyo J. Math.* **23** (2000), no. 1, 161–185.

[4] H. Hashimoto and T. Kinoshita, On the construction of the orthonormal wavelet in the Hardy space $H^2(\mathbb{R})$, preprint.

[5] Y. Ha, H. Kang, J. Lee and J. K. Seo, Unimodular wavelets for L^2 and the Hardy space H^2, *Michigan Math. J.* **41** (1994), no. 2, 345–361.

[6] E. Hernandez and G. L. Weiss, A First Course on Wavelets, CRC Press, New York, 1996.

[7] E. Meyer, Ondelettes et opérrateurs. I. Ondelettes, Hermann, Paris, 1990. [English translation: Wavelets and operators, Cambridge University Press, 1992]

[8] ヘルナンデス・ワイス，ウェーブレットの基礎（芦野 隆一・萬代 武史・浅川 秀一 訳）, 科学技術出版, 2000.

Institute of Mathematics
Tsukuba University
Tsukuba Ibaraki 305-8571
Japan
E-mail address: kinosita@math.tsukuba.ac.jp

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 木下 保