

# 環境管理方針の策定におけるアーラン化と曖昧性 (Erlangization and ambiguity in environmental policy making)

島根大学 吉岡秀和

Shimane University, Hidekazu Yoshioka

同志社大学 辻村元男

Doshisha University, Motoh Tsujimura

## 1. はじめに

本稿では、京都大学数理解析研究所の共同研究（公開型）として2021年9月に開催された研究集会「ファイナンスの数理解析とその応用」における著者らの発表の中から、Erlangization（または Erlangisation）の部分に焦点を絞って解説する。Erlangization を和訳した文献が本稿執筆時点で見当たらないため、以下ではこれをアーラン化と呼ぶ。なお、アーラン化の環境管理への具体的な応用例については本稿で触れない。本稿に先立ち執筆された文献[1]を参照されたい。

アーラン化とは、待ち時間の確率分布がアーラン分布に従う場合の数理解析手法を指す[例えば、2-4]。一見、アーラン分布に従う待ち時間は指数分布が導くようなマルコフ性が自明ではなく、マルコフ的でない確率過程モデルを導くように捉えられる。だが、アーラン分布から生成される待ち時間は、互いに独立した指数分布から生成される待ち時間の有限和として表現できる[5]。この有限和の項数を「段数」と呼ぶ。誤解を恐れずに言えば、より段数が大きい場合ほど、より長い待ち時間が生成されやすい。上述した性質[5]を用いることで、待ち時間がアーラン分布に従う確率過程モデルをマルコフ過程の枠組みで定式化し直し、混合型確率過程[6]として解析することができる。アーラン分布は指数分布の一般化であるため、アーラン化によって待ち時間が指数分布に従う場合よりも広い条件下でのモデリングや解析を実現できる。

アーラン化は、これまでに主としてファイナンスや保険に関わる理論研究において活用されてきた。著者らは、河川や湖沼における環境管理の最適化に関わる諸問題を離散的な観測と制御に依拠した確率制御問題であると考え、アーラン化に基づく環境管理論の構築を進めてきた[1, 7]。河川や湖沼における環境管理では、対象とする系の状態（流量や水位、水質、生物のバイオマス等）の観測結果に依存して、管理方針を柔軟に意思決定していく必要がある。すなわち、フィードバック制御が必要である。また、自然環境を相手にするために、季節的すなわち非定常的にダイナミクスが変化する系を考える必要がある。例えば、駆除すべき対象である外来生物種が多い時期は密な観測と制御を要する一方、そうでない時期は比較的粗な観測と制御しか必要としない、という場合が想定される。さらに、しばしば技術やコストやマンパワーの制約から、観測機会の離散性の問題に直面する。著者らは、各観測機会の間の待ち時間をアーラン化によってモデル化し、さらに段数をフィードバック的に意思決定することで環境管理の問題にアプローチできると着想した[1, 7]。これは合理的不注意 (rational inattention)[8]とも似ている。

本稿では、アーラン化のアイデアを簡潔に説明する。アーラン化については、本稿執筆時点で和文による解説が見当たらない。本稿はごく短く簡単なものではあるが、読者にとって何らかの役に立てば幸いである。

## 2. アーラン化

まず、既往のアーラン化を解説する。その後、環境管理を念頭に置いたフィードバック的なアーラン化、すなわち適合的アーラン化を解説する。本稿の定式化は、既存の連続時間確率過程モデルのように完備確率空間のもとでの定式化による[9]。

時刻を  $t \geq 0$  と書く。観測と制御の対象とする系の状態をあらわす、実数値をとる連続時間確率過程  $X$  (状態変数) を考える。時刻  $t$  での  $X$  の値を  $X_t$  と書く。簡単化のために、 $X$  はジャンプを持たないとする。例えば、 $X$  として一変数の拡散過程を想像すればよい。以下で解説する枠組みは、 $X$  が多次元である場合やジャンプを有する場合についても拡張することができる[1]。

### 2.1 既往のアーラン化

まず、アーラン分布を定義する。形状パラメータを  $T > 0$ 、段数パラメータを  $l \in \mathbb{N}$  とし、アーラン分布の確率密度関数  $P_{T,l}$  を次式で与える (図 1) :

$$P_{T,l}(Y) = \frac{1}{(l-1)!T^l} Y^{l-1} \exp\left(-\frac{Y}{T}\right), \quad Y \geq 0. \quad (1)$$

式(1)は、段数パラメータが最小値である  $l=1$  の場合に指数分布の確率密度関数に帰着される。この意味で、アーラン分布は指数分布の一般化である。アーラン分布  $P_{T,l}$  に従う変数 (以降、アーラン変数と呼ぶ) の平均値は  $lT$ 、標準偏差は  $\sqrt{lT}$  である。形式的には、 $lT$  を定数  $\bar{T} > 0$  に固定したうえで  $l \rightarrow +\infty$  の極限をとると、 $P_{T,l}$  は  $Y = \bar{T}$  に集中したディラック測度 (決定論的分布) に近づく。このように、アーラン分布は指数分布と決定論的分布を繋ぐ柔軟な確率分布である。

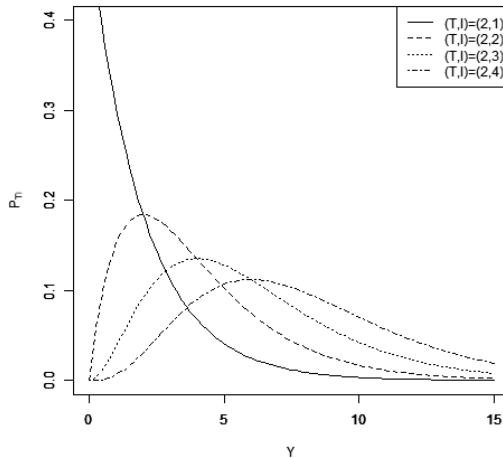


図 1: 様々なパラメータ値に対するアーラン分布の密度関数。  $l=1$  となる場合を除き、密度関数はユニモーダルである。

指数分布とアーラン分布に関する別の関係性についても言及しておく。分布  $P_{T,l}$  に従うアーラン変数  $Y$  は、分布  $P_{T,l}$  に従う互いに独立したアーラン変数  $\{y_j\}_{j=1,2,3,\dots,l}$  (この場合は指数変数) の

有限和として表現できる[5] :

$$Y = \sum_{j=1}^l y_j. \quad (2)$$

ただし, 等号は分布の意味で考える. この表現は, アーラン化をマルコフ過程, とりわけ連続時間かつ有限状態のマルコフ連鎖の見地[6]から再考する際に有用である.

さて,  $X$  を離散的に観測し制御していくための待ち時間  $\tau = \{\tau_i\}_{i=0,1,2,\dots}$  を定義する. 一般性を失わず  $\tau_0 = 0$  とし, 各  $\tau_{i+1} - \tau_i$  は  $P_{T,l}$  により生成されるとする. すなわち,  $(\tau_{i+1} - \tau_i) \sim P_{T,l}$  である. このとき, 確率 1 で  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \tau_i = +\infty$  である. 状態変数  $X$  の値は各時刻  $\tau_i$  でのみ取得できるとする.

式(2)のようにアーラン変数が指数変数の有限和として表現されることから, 待ち時間  $\tau_{i+1} - \tau_i$  を以下のように分割することができる (図 2(a)) :

$$\tau_{i+1} - \tau_i = \sum_{j=1}^l (\tau_{i,j} - \tau_{i,j-1}). \quad (3)$$

ここで,  $(\tau_{i,j} - \tau_{i,j-1}) \sim P_{T,l}$  かつ  $\tau_{i,l} = \tau_{i+1}$  および  $\tau_{i,0} = \tau_i$  である. このような表現式は, アーラン変数としての待ち時間を指数変数により特徴付けるだけでなく, アーラン化に基づいて最適性方程式を導出する際に有用である[1].

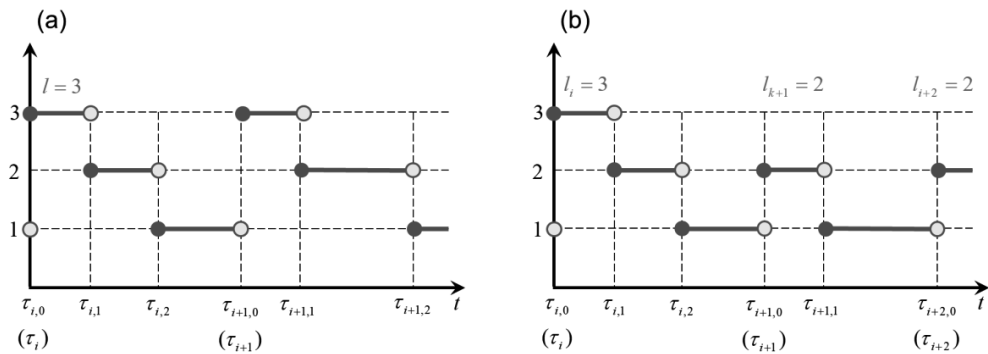


図 2 : 式(3)の概念図 ((a) 既往のアーラン化, (b) 適恰的アーラン化) .

さて, 各時刻  $\tau_i$  において状態変数  $X$  を  $\eta_i$  だけ変化させる制御を考える :

$$X_{\tau_i^+} = X_{\tau_i^-} + \eta_i. \quad (4)$$

ここでは  $\eta = \{\eta_i\}_{i=1,2,3,\dots}$  を制御変数の列として, 各  $\eta_i$  はあるコンパクト集合  $A$  に値をとるものとする. これは, 水草の刈取りや土砂の還元など, 系が発展していく時間スケールと比較して短い時間で作用する制御をあらわす, インパルス制御に対応する. また, 以下では任意の  $\eta$  (詳細は後述. 式(7)または(8)に従う  $\eta$ ) に対して状態変数  $X$  は確率 1 で有限であると仮定する.

式(4)について, 1 点だけ特記事項がある. 状態変数の発展を時間連続的に観測できる既存の確率過程モデルの枠組みでは, 式(4)ではなく

$$X_{\tau_i} = X_{\tau_i^-} + \eta_i \quad (5)$$

という定式化の方が自然に思える．式(4)は時刻  $\tau_i$  での状態に基づいて制御則を与える一方，式(4)は時刻  $\tau_i$  直前での状態に基づいて制御則を与える．すなわち，観測と制御のタイミングが形式的に“+0”だけずれている．後者の方が既存の確率過程モデルの枠組みとなじみやすいが，現実を考えると観測行為を行わない限り状態変数の値を取得できないため，前者の方が自然である．金融取引に関する類似の問題が文献[10, REMARK 2.1]でも議論されている．

時刻  $t$  までの観測  $X_{\tau_i}$  ( $i=0,1,2$ ) が生成する情報フィルトレーションを  $\mathcal{F}_t$  と書く：

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left\{\left(\tau_i, X_{\tau_i}\right)_{i=1,2,3,\dots,t}, I = \sup\{i, \tau_i \leq t\}\right\}. \quad (6)$$

このとき，状態変数  $X$  の最新の観測値に基づくインパルス制御に対応する制御許容集合を次で与える：

$$\mathcal{U} = \left\{ \{\eta_i\}_{i=0,1,2,\dots} \mid \text{For each } i \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \eta_i \text{ satisfies } \eta_i \in A \text{ and is } \mathcal{F}_{\tau_i}\text{-measurable} \right\}. \quad (7)$$

## 2.2 適合的アーラン化

前節で解説した既往のアーラン化では，待ち時間を生成するアーラン分布の段数パラメータが固定されていた．本節では，段数パラメータも制御変数とする適合的アーラン化を解説する．

段数パラメータを制御変数とするに際して，新しい数列  $L = \{l_i\}_{i=0,1,2,\dots}$  を導入する．ここで，各  $l_i$  は有限な自然数集合  $\mathcal{L} = \{1,2,3,\dots,\bar{l}\}$  に値をとると仮定する．ただし， $\bar{l} \in \mathbb{N}$  は定数である．待ち時間は前節と同様に定義されるが， $\tau_{i+1} - \tau_i$  はアーラン分布  $P_{T,l_i}$  により生成されるとする．すなわち，待ち時間を生成するアーラン分布  $P_{T,l_i}$  が  $i$  ごとに異なり得る (図 2(b))．状態変数  $X$  の最新の離散的観測値に基づくインパルス制御として，観測時刻  $\tau_i$  に状態変数の値  $X_{\tau_i}$  を取得したうえで系への制御  $\eta_i$  と次の待ち時間  $\tau_{i+1} - \tau_i$  の生成分布  $P_{T,l_i}$  を意思決定することに対応する制御許容集合を次式で与える：

$$\mathcal{V} = \left\{ \{\eta_i, l_i\}_{i=0,1,2,\dots} \mid \text{For each } i \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \eta_i \in A, l_i \in \mathcal{L}, \eta_i \text{ and } l_i \text{ are } \mathcal{F}_{\tau_i}\text{-measurable} \right\}. \quad (8)$$

適合アーラン化の場合についても，各  $i$  について式(3)と類似の関係式が成り立つ．本稿では触れなかったが，観測結果に応じて形状パラメータ  $T$  を更新していく制御も理論的には可能である．なお，ここでは各制御変数の値域のコンパクト性を仮定したが，各制御変数がコンパクトでない場合の適合アーラン化については検討がなされていない．また，制御則(4)について，状態変数  $X$  の支配式次第では  $X$  が有限時間内に爆発する可能性があるが，解析事例は見当たらない．

## 3. おわりに

アーラン化の概念を紹介した．本稿で述べたように著者は適合的アーラン化を環境管理の問題に応用したが，連続時間的に発展する系の離散的な観測と制御に関連するその他多くの問題についても同様の定式化が可能であると考えられる．

最後に，アーラン化を用いた数値計算に関する注意点を述べておく．アーラン化を用いて確率制御問題を定式化したうえで最適性方程式を有限差分法等の汎用的な数値計算手法で解く場合，アーラン化の段数に比例して数値解の自由度が増加する．したがって，より柔軟なアーラン化を考えるほど計算時間が増大する．アーラン化によって発生する項は線型的な反応項であるため，

半陰的な離散化によって効率的に処理できるであろう。著者らは、リスク鋭敏型制御に基づく最適化を考える場合は、これらの項が非線形的になることを確認している。この場合、最適性方程式の各項を分割して離散化する演算子分割法を活用すれば、数値計算効率をある程度は担保できると考えられる。

## 謝辞

本研究は、京都大学数理解析研究所「共同利用・共同研究拠点事業」、ヤンマー資源循環機構助成事業（番号 KI0212021）、住友財団環境研究助成（番号 203160）、国土交通省出雲河川事務所からの受託研究「宍道湖における水草繁茂の抑制手法に関する研究」、JSPS 科研費（番号 21K01573）の支援を受けた。

## 引用文献

- [1] Yoshioka, H., Tsujimura, M. (2021). Preprint. Available at <http://arxiv.org/abs/2107.12526>.
- [2] Ramaswami, V. et al. (2008). *Annals of Operations Research*, 160(1), 215-225.
- [3] Zhang, Z., Cheung, E. C. (2016). *Methodology and Computing in Applied Probability*, 18(2), 275-306.
- [4] Choi, M. C., Cheung, E. C. (2014). *Insurance: Mathematics and Economics*, 59, 121-132.
- [5] Avanzi, B. et al. (2018). *Insurance: Mathematics and Economics*, 79, 225-242.
- [6] Yin, G. G., Zhu, C. (2009). *Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications*. Springer.
- [7] Yoshioka, H. (2021). Book of Abstract the international conference ICAME'21 (Second International Conference on Applied Mathematics in Engineering), p. 130.
- [8] Sims, C. A. (2003). *Journal of monetary Economics*, 50(3), 665-690.
- [9] Capasso, V., Bakstein, D. (2021). *An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes*, Birkhäuser.
- [10] Cont, R., Tankov, P. (2003). *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman and Hall/CRC.