

初期構造異方性を有する多重せん断型非線形弾性体の total Lagrange法に基づく大変形定式化

Large Deformation Formulation Based on the Total Lagrange Method for a Nonlinear Elastic Body within a Framework of Multiple Shear Mechanism Accounting for Inherent Anisotropy

上田恭平・中原知洋⁽¹⁾・井川誠二⁽¹⁾

Kyohei UEDA, Tomohiro NAKAHARA⁽¹⁾ and Seiji IGAWA⁽¹⁾

(1) 五洋建設株式会社

(1) Penta-Ocean Construction Co., Ltd.

Synopsis

A constitutive equation for a nonlinear elastic body within a framework of multiple shear mechanisms has been proposed to consider the geometrical nonlinearity based on large deformation (or finite strain) theory. However, the model could not take into account the effect of inherent anisotropy. This manuscript presents a formulation of a nonlinear elastic body that can consider the inherent anisotropy effect as well as the geometrical nonlinearity using the total Lagrange method in the large deformation theory.

キーワード: 初期構造異方性, 非線形弾性体, 多重せん断機構, 幾何学的非線形性, total Lagrange法

Keywords: inherent anisotropy, nonlinear elastic body, multiple shear mechanism, geometrical nonlinearity, total Lagrange method

1. はじめに

著者らは、地盤の液状化に代表される複雑な土の繰返し挙動を精緻に表現するため、これまで砂の構成モデルとしての多重せん断機構に基づくひずみ空間多重せん断モデル (Iai et al, 1992; 2011) の改良を実施してきている。改良の方向性の一つとして、地盤・構造物系の大変形現象を高精度に表現するため、材料非線形性に加えて幾何学的非線形性を厳密に考慮するために大変形 (有限ひずみ) 理論の枠組みで構成式の定式化を行った (Iai et al., 2013) 。もう一方の流れとして、微小変形理論の枠組みではあるものの、地盤の堆積環境等に起因する初期構造異方性 (固有異方性とも呼ばれる) の影響を考慮できるよう、構成モデルの改良を行っている (Ueda and Iai,

2019; 2021) 。

本稿では、液状化解析に適用可能な、幾何学的非線形性および初期構造異方性の両者の影響を同時に考慮できる土の構成モデルの開発に向けた1ステップとして、材料非線形性は考慮せずに幾何学的非線形性のみを考慮する条件 (非線形弾性体) における初期構造異方性モデルの定式化を行う。

2. 線形直交異方弾性体の一般形

ひずみ空間多重せん断モデルの説明に先立ち、微小変形理論に基づく線形直交異方弾性体の一般形について紹介する。既往の文献 (Boresi and Schmidt, 2009; Milton, 2002) を参考に、その定式化は以下のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^c \\ \varepsilon_y^c \\ \gamma_{xy}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} - \frac{\nu_{zx}^2}{E_z} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\nu_{zy}}{E_z} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} - \frac{\nu_{zx}\nu_{zy}}{E_z} & \frac{1}{E_y} - \frac{\nu_{zy}^2}{E_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに、 E_i は*i*方向 ($i=x, y, z$) のヤング率、 ν_{ij} は一軸圧縮・引張ひずみに対する横ひずみの比を表すポアソン比である。例えば、 $\nu_{xy} = -\varepsilon_y^c / \varepsilon_x^c$ は*x*方向の一軸圧縮・引張ひずみに対するポアソン比を表す。式(1)に対称性 $\nu_{yz}E_z = \nu_{zy}E_y$ および $\nu_{xz}E_z = \nu_{zx}E_x$ を適用すると、

$$\varepsilon_y^c - \varepsilon_x^c = A \left\{ \left(1 + \frac{B}{A}\right) \sigma_y - \left(1 - \frac{B}{A}\right) \sigma_x \right\} \quad (2)$$

$$\gamma_{xy}^c = \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy} \quad (3)$$

ここに、

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + \nu_{xy}}{E_x} + \frac{1 + \nu_{yx}}{E_y} - \frac{(\nu_{zx} - \nu_{zy})^2}{E_z} \right\} \quad (4)$$

$$B = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y} - \frac{1 - \nu_{xz}\nu_{zx}}{E_x} \right) \quad (5)$$

3. 微小変形理論に基づく初期構造異方性を考慮した多重せん断型弾性体の定式化

3.1 初期構造異方性を考慮したひずみ空間多重せん断モデル

以下では、微小変形理論に基づく初期構造異方性を考慮したひずみ空間多重せん断モデル (Ueda and Iai, 2019; 2021) の復習を行う。

粒状体を連続体ととらえたときの巨視的応力は、粒子間の接点力のある種の平均により与えられる。Fig. 1に示すような平面内の円形粒子の集合体では、接点力 \mathbf{P} は接点垂直 (もしくは粒子の中心を結ぶ枝) 方向の成分 \mathbf{n} 、およびこれに直交する接線方向成分 \mathbf{t} に分解できる。

$$\mathbf{P} = f_n \mathbf{n} + f_t \mathbf{t} \quad (6)$$

ここに、

$$\mathbf{n}^T = [\cos \theta \quad \sin \theta], \quad \mathbf{t}^T = [\sin \theta \quad -\cos \theta] \quad (7)$$

巨視的応力は代表体積要素 (体積 V) における接点力の平均として、枝の長さ l を用いて以下のとおり与えられる (Christofferen et al., 1981; Mehrabadi et al., 1982) .

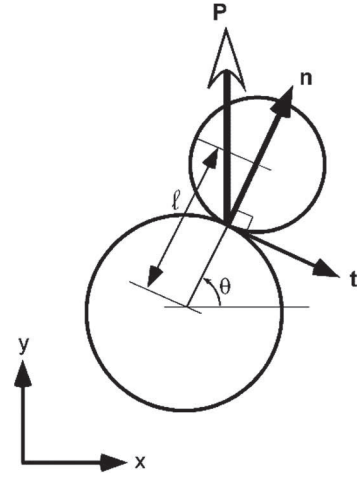


Fig. 1 Contact normal (\mathbf{n}) and tangential (\mathbf{t}) directions, and contact force \mathbf{P}

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{V} \sum l \mathbf{P} \otimes \mathbf{n} \quad (8)$$

Rothenburg and Bathurst (1989)に従うと、接点密度 (単位体積当たりの接点数) m_v 、平均枝長さ \bar{l}_0 、および接点分布関数 $E(\theta)$ を用い、式(8)は以下のとおり書き換えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = m_v \bar{l}_0 \left[\int_0^{2\pi} F^*(\theta - \theta_0) f_n(\theta) E(\theta) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\theta + \int_0^{2\pi} F^*(\theta - \theta_0) f_t(\theta) E(\theta) \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} d\theta \right] \quad (9)$$

ここに、

$$\int_0^{2\pi} E(\theta) d\theta = 1 \quad (10)$$

$$F^*(\theta) = 1 + a_1 \cos 2\theta + a_2 \cos 4\theta \quad (11)$$

式(11)は初期構造異方性を考慮するために新たに導入された関数で、 a_1 、 a_2 、 θ_0 は初期構造異方性を表現するパラメータである。なお、式(9)における接点力分布を表す f_n 、 f_t なる記号は、 θ 方向についての平均的な成分として定義し直している。

Ueda and Iai (2019)に示すように、式(9)を展開すると、以下のとおり等方成分 (等方応力 p') ならびに偏差成分 (仮想単純せん断応力 q) に分解できる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p' \mathbf{I} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} q \langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle d\theta \quad (12)$$

ここに、

$$p' = -\frac{1}{2} m_v \bar{l}_0 \bar{f}_0 \quad (13)$$

$$q = m_v \bar{l}_0 \left[\left\{ F^*(\theta - \theta_0) f_n(\theta) E(\theta) - \bar{f}_0 \bar{E}_0 \right\} + F^*(\theta - \theta_0) f_t \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) E \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (14)$$

であり, 式(13)(14)における平均垂直成分 \bar{f}_0 および平均接点分布 \bar{E}_0 は以下のとおりである.

$$\bar{f}_0 = \int_0^{2\pi} f_n(\theta) E(\theta) d\theta \quad (15)$$

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{2\pi} \quad (16)$$

ここで, 積分変数 θ を $\omega = 2\theta$ なる変数で置き換えると, 式(12)は以下のとおり書き換えられる.

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p' \mathbf{I} + \frac{1}{4} \int_0^{4\pi} q \langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle d\omega \quad (17)$$

ここに,

$$\langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ \sin \omega & -\cos \omega \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$q = F^* \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \right) q_{\text{Iso}}(\omega) + q_{\text{Aniso}}(\omega) \quad (19)$$

$$q_{\text{Iso}}(\omega) = m_v \bar{l}_0 \left[\left\{ f_n \left(\frac{\omega}{2} \right) E \left(\frac{\omega}{2} \right) - \bar{f}_0 \bar{E}_0 \right\} + f_t \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4} \right) E \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (20)$$

$$q_{\text{Aniso}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{F} \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \right) - 1 \right\} m_v \bar{l}_0 \bar{f}_0 \quad (21)$$

ここで, ひずみ空間多重せん断モデルでは, 式(20)に示す(初期構造異方性が存在しない場合の)仮想単純せん断応力 q_{Iso} を, 次式により仮想単純せん断ひずみ γ と関連付けている (Iai et al., 1992; 2011).

$$q_{\text{Iso}}(\gamma(\omega)) = \frac{\gamma(\omega) / \gamma_v}{1 + |\gamma(\omega) / \gamma_v|} q_v \quad (22)$$

ここに,

$$\gamma = \langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (23)$$

であり, 式(22)における q_v , γ_v は, それぞれ各単純せん断機構におけるせん断強度と(せん断)基準ひずみを表す. 式(22)より,

$$q_{\text{Iso}}(\omega + \pi) / q_v = -q_{\text{Iso}}(\omega) / q_v \quad (24)$$

なる関係式が成立するので, 式(17)は最終的に以下のように書き表せる.

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p' \mathbf{I} + \int_0^\pi q \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle d\omega \quad (25)$$

ここに,

$$q = F(\omega - \omega_0) q_{\text{Iso}}(\omega) + q_{\text{Aniso}}(\omega) \quad (26)$$

$$F(\omega) = 1 + a_2 \cos 2\omega \quad (27)$$

$$q_{\text{Aniso}}(\omega) = -\frac{1}{\pi} a_1 \cos(\omega - \omega_0) p' \quad (28)$$

であり, 初期構造異方性を表現する関数 F^* (式(11))が, 式(27)に示す関数 F に変換されている.

3.2 多重せん断型弾性体

前節で述べた構成モデルは, 材料的な非線形性を考慮したものである. ここで, 材料特性が(線形)弾性であると仮定すると, 上田・井合 (2016) に従い,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \int_0^\pi q \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle d\omega \quad (29)$$

ここに,

$$p = -K \varepsilon_e = -K (\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e) \quad (30)$$

$$q = \left\{ 1 + a_2 \cos 2(\omega - \omega_0) \right\} \frac{q_v}{\gamma_v} \gamma_e - \frac{1}{\pi} a_1 \cos(\omega - \omega_0) p \quad (31)$$

$$\gamma_e = (\varepsilon_x^e - \varepsilon_y^e) \cos \omega + \gamma_{xy}^e \sin \omega \quad (32)$$

さらに, 線形直交異方弾性体に対応して堆積面が水平である ($\theta_0 = \pi/2$) と仮定すると, 式(29)は以下のように書き換えられる.

$$\boldsymbol{\sigma} = K \varepsilon_e \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} a_1 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2} a_1 \end{bmatrix} + G_m^{\text{Iso}} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{1}{2} a_2 \right) (\varepsilon_x^e - \varepsilon_y^e) & \left(1 - \frac{1}{2} a_2 \right) \gamma_{xy}^e \\ \left(1 - \frac{1}{2} a_2 \right) \gamma_{xy}^e & - \left(1 + \frac{1}{2} a_2 \right) (\varepsilon_x^e - \varepsilon_y^e) \end{bmatrix} \quad (33)$$

ここに,

$$G_m^{\text{Iso}} = \frac{q_v}{\gamma_v} \int_0^\pi \sin^2 \omega d\omega = \frac{\pi q_v}{2 \gamma_v} \quad (34)$$

もしくは, 式(33)は以下のように書ける.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{Bmatrix} \quad (35)$$

ここに,

$$D_{11} = \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) K + \left(1 + \frac{a_2}{2} \right) G_m^{\text{Iso}} \quad (36)$$

$$D_{12} = \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) K - \left(1 + \frac{a_2}{2} \right) G_m^{\text{Iso}} \quad (37)$$

$$D_{21} = \left(1 + \frac{a_1}{2} \right) K - \left(1 + \frac{a_2}{2} \right) G_m^{\text{Iso}} \quad (38)$$

$$D_{22} = \left(1 + \frac{a_1}{2} \right) K + \left(1 + \frac{a_2}{2} \right) G_m^{\text{Iso}} \quad (39)$$

$$D_{33} = \left(1 - \frac{1}{2} a_2 \right) G_m^{\text{Iso}} \quad (40)$$

式(33)もしくは式(35)をひずみについて解くと,

$$\varepsilon_y^e - \varepsilon_x^e = \frac{1}{(2 + a_2) G_m^{\text{Iso}}} \left\{ \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) \sigma_y - \left(1 + \frac{a_1}{2} \right) \sigma_x \right\} \quad (41)$$

$$\gamma_{xy}^e = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}a_2\right)G_m^{\text{Iso}}} \tau_{xy} \quad (42)$$

ここで、式(41)(42)を式(2)(3)を比較すると、

$$G_m^{\text{Iso}} = \frac{1+2AG_{xy}}{4A} \quad (43)$$

$$a_1 = -\frac{2B}{A} \quad (44)$$

$$a_2 = \frac{2(1-2AG_{xy})}{1+2AG_{xy}} \quad (45)$$

という関係があることがわかる。

4. Total Lagrange法（物質表示）での積分形構成式

（初期構造異方性を考慮しない）ひずみ空間多重せん断モデルの有限ひずみ（大変形）理論に基づく定式化（Iai et al., 2013；上田・井合, 2016）を参考に、まず式(25)が空間表示（現配置）において成立すると仮定する。ただし、 $\boldsymbol{\sigma}'$ はCauchy有効応力とし、粒状体のブランチ方向等を規定する方向ベクトル類（現配置では \mathbf{n}, \mathbf{t} ）は、以下のように基準配置 (\mathbf{N}, \mathbf{T}) から変形勾配 \mathbf{F} を通じて変化すると考える。

$$\mathbf{n} = \mathbf{F}\mathbf{N} \quad (46)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{F}\mathbf{T} \quad (47)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (48)$$

この条件の下で、式(25)のpull-backをとると、

$$\mathbf{S}' = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{F}^{-\text{T}} = -\mathbf{J}p'\mathbf{C}^{-1} + \bar{\mathbf{S}}' \quad (49)$$

ここに、 \mathbf{S}' は第2Piola-Kirchhoff有効応力であり、

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\text{T}}\mathbf{F} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I} \quad (50)$$

$$J = \det \mathbf{F} \quad (51)$$

$$\bar{\mathbf{S}}' = \int_0^\pi Jq \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle d\omega \quad (52)$$

$$\langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ \sin \omega & -\cos \omega \end{bmatrix} \quad (53)$$

の関係がある（ \mathbf{E} はGreen-Lagrangeひずみテンソル）。

ここで、式(52)と式(50)に示す右Cauchy-Greenテンソル \mathbf{C} との縮約を計算すると、

$$\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}' = (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}')_{\text{Iso}} + (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}')_{\text{Aniso}} \quad (54)$$

ここに、

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}')_{\text{Iso}} &= \mathbf{C} : \int_0^\pi JF(\omega - \omega_0)q_{\text{Iso}}(\omega) \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle d\omega \\ &= 2J \int_0^\pi F(\omega - \omega_0)q_{\text{Iso}}(\omega)\gamma(\omega) d\omega \\ &= 2J \int_0^\pi \{1 + a_2 \cos 2(\omega - \omega_0)\} q_{\text{Iso}}(\omega)\gamma(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}')_{\text{Aniso}} &= \mathbf{C} : \int_0^\pi Jq_{\text{Aniso}}(\omega) \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle d\omega \\ &= -\frac{1}{\pi} J a_1 p' \mathbf{C} : \int_0^\pi \cos(\omega - \omega_0) \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ \sin \omega & -\cos \omega \end{bmatrix} d\omega \\ &= -\frac{1}{2} J a_1 p' \mathbf{C} : \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle_{\omega_0} = -J a_1 \gamma(\omega_0) p' \end{aligned} \quad (56)$$

式(55)(56)の導出にあたっては、以下の関係式を用いた。

$$\gamma(\omega) = \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle : \mathbf{E} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle : \mathbf{C} \quad (57)$$

$$\langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle_{\omega_0} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 & \sin \omega_0 \\ \sin \omega_0 & -\cos \omega_0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

このことより、式(54)はゼロにはならず、式(49)の右辺第2項（式(52)）が、物質表示における等方成分（体積変化成分）を含むことがわかる。

そのため、圧縮性を有する超弾性体の有限ひずみ解析での構成式（Holzapfel, 2000）を参考に、第2Piola-Kirchhoff有効応力テンソル \mathbf{S}' を、以下のように分解することを考える。

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}'_p + \mathbf{S}'_q \quad (59)$$

ここに、

$$\mathbf{S}'_p = -\mathbf{J}p'\mathbf{C}^{-1} \quad (60)$$

$$\mathbf{S}'_q = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{Q} : \bar{\mathbf{S}}' \quad (61)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N} - \frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \quad (62)$$

式(61)と式(50)に示す右Cauchy-Greenテンソル \mathbf{C} の縮約を計算すると、

$$\mathbf{S}'_q : \mathbf{C} = (\mathbf{J}^{-1}\mathbf{Q} : \bar{\mathbf{S}}') : \mathbf{C} = \mathbf{J}^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{S}}' - \frac{1}{2}(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}')\mathbf{C}^{-1} \right\} : \mathbf{C} = 0 \quad (63)$$

となり、式(59)の右辺第2項（式(61)）が、体積変化成分を含まない偏差成分（体積一定成分）となっていることがわかる。ここに、以下の関係式を用いた。

$$\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}^{\text{T}} : \mathbf{I} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} : \mathbf{I} = \mathbf{I} : \mathbf{I} = 2 \quad (64)$$

式(52)(62)を式(61)に代入すると、

$$\mathbf{S}'_q = \int_0^\pi q \left(\langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle - \gamma \mathbf{C}^{-1} \right) d\omega \quad (65)$$

ここで、材料特性が（非線形）弾性であると仮定すると、初期構造異方性を考慮した多重せん断モデル型非線形弾性体の物質表示での積分形構成式が以下のように与えられる。

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_q \quad (66)$$

ここに、

$$\mathbf{S}_p = -\mathbf{J}_c p_c \mathbf{C}_c^{-1} \quad (67)$$

$$\mathbf{S}_q = \mathbf{J}_c^{-1}\mathbf{Q} : \bar{\mathbf{S}} = \int_0^\pi q \left(\langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle - \gamma_c \mathbf{C}_c^{-1} \right) d\omega \quad (68)$$

$$p = -K\varepsilon_c \quad (69)$$

$$\varepsilon_c = \ln J_c \quad (70)$$

$$q = \{1 + a_2 \cos 2(\omega - \omega_0)\} q_{\text{Iso}} - \frac{1}{\pi} a_1 \cos(\omega - \omega_0) p \quad (71)$$

$$q_{\text{Iso}} = G_v^{\text{Iso}} \gamma_c \quad (72)$$

$$\gamma_c = \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle : \mathbf{E}_c = \frac{1}{2} \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle : \mathbf{C}_c \quad (73)$$

$$G_v^{\text{Iso}} = \frac{G_m^{\text{Iso}}}{\int_0^\pi \sin^2 \omega d\omega} = \frac{G_m^{\text{Iso}}}{\pi/2} \quad (74)$$

式(68)を具体的に計算すると、

$$\mathbf{S}_q = \frac{1}{2} a_1 K \varepsilon_c \left\{ \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle_{\omega_0} - (\gamma_c)_{\omega_0} \mathbf{C}_c^{-1} \right\} + \mathbf{S}_{q1} + \mathbf{S}_{q2} \quad (75)$$

ここに、

$$(\gamma_c)_{\omega_0} = \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle_{\omega_0} : \mathbf{E}_c \quad (76)$$

$$\mathbf{S}_{q1} = G_m^{\text{Iso}} \begin{bmatrix} S_{q1-11} & S_{q1-12} \\ S_{q1-12} & -S_{q1-11} \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$S_{q1-11} = (E_x^c - E_y^c) \left(1 + \frac{1}{2} a_2 \cos 2\omega_0 \right) + E_{xy}^c a_2 \sin 2\omega_0 \quad (78)$$

$$S_{q1-12} = (E_x^c - E_y^c) \frac{1}{2} a_2 \sin 2\omega_0 + E_{xy}^c (2 - a_2 \cos 2\omega_0) \quad (79)$$

$$\mathbf{S}_{q2} = -G_m^{\text{Iso}} \left\{ (E_x^c - E_y^c) S_{q1-11} + 2E_{xy}^c S_{q1-12} \right\} \mathbf{C}_c^{-1} \quad (80)$$

となる。

なお、第1Piola-Kirchhoff応力（公称応力）テンソル \mathbf{P} が必要な場合は、式(66)より以下のように求めることができる。

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_q \quad (81)$$

ここに、

$$\mathbf{P}_p = \mathbf{F}_c \mathbf{S}_p = -J_c p \mathbf{F}_c \mathbf{C}_c^{-1} = -J_c p \mathbf{F}_c^{-T} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_q &= \mathbf{F}_c \mathbf{S}_q = \int_0^\pi q \left(\mathbf{F}_c \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle - \gamma_c \mathbf{F}_c^{-T} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2} a_1 K \varepsilon_c \left\{ \mathbf{F}_c \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle_{\omega_0} - (\gamma_c)_{\omega_0} \mathbf{F}_c^{-T} \right\} + \mathbf{F}_c \mathbf{S}_{q1} + \mathbf{F}_c \mathbf{S}_{q2} \end{aligned} \quad (83)$$

5. Total Lagrange法（物質表示）での増分形構成式

本章では、物質表示における、初期構造異方性を考慮した多重せん断型非線形弾性体の増分形構成式を導く。まず、式(66)の物質時間微分をとると、

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{S}}_p + \dot{\mathbf{S}}_q \quad (84)$$

ここに、

$$\dot{\mathbf{S}}_p = -\frac{D}{Dt} (Jp \mathbf{C}^{-1}) \quad (85)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_q = \frac{D}{Dt} (J^{-1}) (\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}) + J^{-1} \frac{D}{Dt} (\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}) \quad (86)$$

等方成分の定式化

式(85)の物質時間微分を計算すると、

$$\dot{\mathbf{S}}_p = -Jp \mathbf{C}^{-1} - J\dot{p} \mathbf{C}^{-1} - Jp \frac{D}{Dt} (\mathbf{C}^{-1}) \quad (87)$$

ここで、

$$\dot{J} = J \text{tr} \mathbf{d} = \mathbf{J} \mathbf{I} : \text{grad} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{J} \mathbf{I} : \text{Grad} \dot{\mathbf{u}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (88)$$

$$\dot{p} = \frac{dp}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon} \quad (89)$$

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{I} : \mathbf{d} = \mathbf{I} : \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (90)$$

$$\frac{D}{Dt} (\mathbf{C}^{-1}) = -\mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} = -2\mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{C}^{-1} \quad (91)$$

の関係式を式(87)に代入すると、等方成分の物質時間微分は以下のとおり与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_p &= -(\mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}}) p \mathbf{C}^{-1} + JK (\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}}) \mathbf{C}^{-1} + 2Jp \mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{C}^{-1} \\ &= -Jp \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}}) + JK \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}}) + 2Jp \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \\ &= [J(K - p) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2Jp \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}] : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (92)$$

ここに、

$$K = -\frac{dp}{d\varepsilon} \quad (93)$$

以上をまとめると、物質表示での等方成分の増分形構成式が、以下のように与えられる。

$$\dot{\mathbf{S}}_p = \mathbb{C}_p : \dot{\mathbf{E}} \quad (94)$$

ここに、

$$\mathbb{C}_p = J(K - p) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2Jp \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} \quad (95)$$

偏差成分の定式化

まず、式(86)の偏差成分の右辺第1項について計算を行う。

$$\frac{D}{Dt} (J^{-1}) = -J^{-2} \dot{J} = -J^{-1} \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (96)$$

であるので、

$$\frac{D}{Dt} (J^{-1}) (\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}) = -J^{-1} (\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} = -\mathbf{S}_q \otimes \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (97)$$

次に、式(86)の偏差成分の右辺第2項（に J を乗じたもの）における物質時間微分を計算する。まず、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}) &= \frac{D}{Dt} \left\{ \bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{2} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} \right\} \\ &= \left[\dot{\bar{\mathbf{S}}} - \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \{ (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} \} \right] \end{aligned} \quad (98)$$

と書き下すと、上式の右辺第1項の計算に関して、 $\langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle$ は時間に依存しないので、

$$\dot{\bar{\mathbf{S}}} = \int_0^\pi \frac{D}{Dt} (Jq) \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle d\omega \quad (99)$$

のように書き表せる。よって、以下の物質時間微分

を計算すればよい.

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(Jq) &= J\dot{q} + J\dot{q} = Jq\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} + J \frac{dq}{d\gamma} \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle : \dot{\mathbf{E}} \\ &= J(q\mathbf{C}^{-1} + G_v^{\text{Iso}} \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle) : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (100)$$

ここに,

$$G_v^{\text{Iso}} = \frac{dq_{\text{Iso}}}{d\gamma} \quad (101)$$

式(100)を式(99)に代入すると,

$$\dot{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{C}}_q : \dot{\mathbf{E}} \quad (102)$$

ここに,

$$\bar{\mathbf{C}}_q = J \int_0^\pi \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle \otimes (q\mathbf{C}^{-1} + G_v \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle) d\omega \quad (103)$$

続いて, 式(98)の右辺第2項の計算を行う. まず, 以下のように書き下しておく.

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \{ (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} \} \\ = (\dot{\mathbf{C}} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} + (\mathbf{C} : \dot{\bar{\mathbf{S}}}) \mathbf{C}^{-1} + (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \frac{D}{Dt} (\mathbf{C}^{-1}) \end{aligned} \quad (104)$$

この式の右辺各項を順に計算すると, 以下のようになる.

第1項: 式(50)(62)より,

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{C}} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} &= (2\dot{\mathbf{E}} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} = 2\mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{S}} : \dot{\mathbf{E}} \\ &= 2\mathbf{C}^{-1} \otimes (\mathbf{Q} : \bar{\mathbf{S}}) : \dot{\mathbf{E}} + 2\mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}} \right) : \dot{\mathbf{E}} \\ &= 2\mathbf{C}^{-1} \otimes (\mathbf{Q} : \bar{\mathbf{S}}) : \dot{\mathbf{E}} + (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (105)$$

第2項: 式(102)より,

$$(\mathbf{C} : \dot{\bar{\mathbf{S}}}) \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \dot{\bar{\mathbf{S}}} = \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \bar{\mathbf{C}}_q : \dot{\mathbf{E}} \quad (106)$$

第3項: 式(91)より,

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \frac{D}{Dt} (\mathbf{C}^{-1}) &= -2(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{C}^{-1} \\ &= -2(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) (\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}) : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (107)$$

式(104)に式(105)~(107)を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \{ (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}^{-1} \} \\ = \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \bar{\mathbf{C}}_q : \dot{\mathbf{E}} + 2\mathbf{C}^{-1} \otimes (\mathbf{Q} : \bar{\mathbf{S}}) : \dot{\mathbf{E}} \\ - 2(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (108)$$

となる. 式(98)に式(102)(108)を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\mathbf{Q} : \bar{\mathbf{S}}) \\ = \left[\mathbf{Q} : \bar{\mathbf{C}}_q + (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \right] : \dot{\mathbf{E}} \\ - J(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}_q) : \dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (109)$$

式(86)に式(97)(109)を代入すると, 物質表示での偏差成分の増分形構成式が, 以下のように与えられる.

$$\dot{\mathbf{S}}_q = \mathbf{C}_q : \dot{\mathbf{E}} \quad (110)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_q &= J^{-1} \left[\mathbf{Q} : \bar{\mathbf{C}}_q + (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}) \tilde{\mathbf{Q}} \right] \\ &\quad - (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}_q + \mathbf{S}_q \otimes \mathbf{C}^{-1}) \end{aligned} \quad (111)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \quad (112)$$

以上をまとめると, 初期構造異方性を考慮した多重せん断型線形弾性体の物質表示での増分形構成式が, 以下のように与えられる.

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}} \quad (113)$$

ここに,

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_p + \mathbf{C}_q \quad (114)$$

6. まとめ

本稿では, 多重せん断モデル型の線形弾性体の拡張として, 初期構造異方性の影響に加え, 幾何学的非線形性の影響を考慮に入れた, total Lagrange法に基づく多重せん断型非線形弾性体の定式化を示した. 提案モデルは, 幾何学的非線形性を考慮しない場合には既往の文献に示されている一般的な線形直交異方弾性体と一致し, 多重せん断モデルの枠組みを用いることで, 自然な拡張として大変形(有限ひずみ)定式化がなされていると考えることができる. また, 既往の線形直交異方弾性体と比較して, 任意方向の初期構造異方性をより柔軟に表現できる利点を有している.

今後は, 初期構造異方性を有する多重せん断型非線形弾性体のupdated Lagrange法に基づく大変形(有限ひずみ)定式化を行うとともに, 非線形弾性体に対する実験結果との比較から, total Lagrange法およびupdated Lagrange法に基づく構成モデルの妥当性検証を実施したい.

参考文献

- 上田恭平, 井合進 (2016) : 多重せん断機構の概念に基づく有限変形を考慮した弾性体構成式の提案, 土木学会論文集A2 (応用力学), Vol. 72, No. 2, pp. I_345-I_356.
- 上田恭平, 井合進 (2020) : 初期構造異方性を考慮したひずみ空間多重せん断モデルによる誘導異方性の表現, 土木学会論文集A2 (応用力学), Vol. 76, No. 2, pp. I_359-I_367.
- Boresi, A.P., Schmidt, R.J. (2009): Advanced Mechanics

- of Materials (6th Edition). Wiley India Pvt. Limited.
- Christoffersen, J., Mehrabadi, M. M., Nemat-Nasser, S. (1981) : A micromechanical description of granular material behavior. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, No. 2, pp. 339-344.
- Holzappel, G.A. (2000): *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. Wiley.
- Iai, S., Matsunaga, Y., Kameoka, T. (1992): Strain space plasticity model for cyclic mobility, *Soils and Foundations*, Vol. 32, No. 2, pp. 1-15.
- Iai, S., Tobita, T., Ozutsumi, O. and Ueda, K. (2011): Dilatancy of granular materials in a strain space multiple mechanism model, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 35, No. 3, pp. 360-392.
- Iai, S., Ueda, K., Tobita, T., Ozutsumi, O. (2013): Finite Strain Formulation of a Strain Space Multiple Mechanism Model for Granular Materials, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 37(9), pp. 1189-1212.
- Mehrabadi, M. M., Nemat-Nasser, S., Oda, M. (1982): On statistical description of stress and fabric in granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 6, No. 1, pp. 95-108.
- Milton, G.W. (2002): *The Theory of Composites*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press.
- Rothenburg, L. and Bathurst, R. J. (1989): Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials, *Géotechnique*, Vol. 39, No. 4, pp. 601-614.
- Ueda, K., Iai, S. (2019): Constitutive modeling of fabric anisotropy in a strain space multiple mechanism model for granular materials, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 43(3), pp. 708-737.
- Ueda, K., Iai, S. (2021): Non-coaxiality considering inherent anisotropy under various loading paths in a strain space multiple mechanism model for granular materials, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 45(6), pp. 815-842.

(論文受理日 : 2021年8月31日)