ネフ反標準因子を持つ KLT 対の構造について

松村 慎一 (MATSUMURA Shin-ichi) *

概要

本稿では反標準因子が適切な意味で “非負曲率” を持つ射影多様体について論じる．反標準因子のネフ性・半正値性・半豊富性について議論し, 射影多様体や KLT 対に対する有理連結射や Albanese 射の構造定理を紹介する．さらに, 構造定理に関連する基本群・ホロノミー群・葉層構造・順像層の正値性の理論について, 周辺の話題や未解決問題を交えながら解説する．

1 はじめに

本稿では, 複素数体上の射影多様体や KLT 対を研究対象とし, その反標準因子のネフ性・半正値性・半豊富性と呼ばれる “非負曲率性” について議論する．反標準因子が “正曲率” を持つ多様体は Fano 型の多様体であり, “平坦曲率” を持つ多様体は Calabi-Yau 型の多様体である．これらは双有理幾何学における代数多様体の基本的な構成要素である．本稿で議論される “非負曲率” を持つ多様体は Fano 型と Calabi-Yau 型を補間するクラスだと解釈できる．本稿では, 非負曲率の多様体を Fano-like な多様体 (有理連結多様体) と Calabi-Yau 型の多様体に分解する, という類の構造定理を紹介する．さらに, その証明で重要な役割を果たす基本群・ホロノミー群・葉層構造・順像層の正値性の理論との関係についても議論する．この構造定理により, 非負曲率の多様体 X は, 適切な Calabi-Yau

* 東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
mshinichi-math@tohoku.ac.jp, mshinichi0@gmail.com
2010 Mathematics Subject Classification: Primary 14E30, Secondary 32J25, 53C29.
Key words and phrases: KLT 対, 反標準因子, ネフ性, 半正値性, 半豊富性, 有理連結性, 特異 Calabi-Yau 多様体, 基本群, 準エタール被覆, ホロノミー群, 葉層構造, 順像層の正値性, 特異エルミート計量.

型の多様体 Y, 有理連結多様体 F, および (位相的) 基本群 $\pi_1(Y)$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(F)$ への表現 $\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{Aut}(F)$ から構成されることがわかる. また, 応用として, (対数的) 極小モデル理論に現れる Calabi-Yau 型の KLT 対に対する分解定理が得られる. この種の結果は代数多様体の基本的な構成要素を明らかにする点で意義がある.

正曲率・非負曲率の研究はさまざまな分野が交錯する魅力的なテーマである. その歴史を本稿の視点から眺めてみよう. この研究は Mori による Hartshorne 予想の解決 [Mor79] および Siu-Yau による Frankel 予想の解決 [SY80] を起源とする. Mori, Siu-Yau により "正曲率の接束" を持つ射影多様体は射影空間に限ることが証明された. この成果により, 正曲率の多様体の複素構造の剛性がより明確に理解された. また, その証明の過程で, 有理曲線を構成する技術が発見され, Fano 多様体が有理連結であることが明らかになった. 有理連結多様体は必ずしも Fano 多様体ではないが, 単連結性などの基本的な性質を共有し, 重要なクラスをなす. 一方で, 広い意味での Calabi-Yau 型の多様体は, Beauville-Bogomorov-Yau 分解 [Bea83] により, Abel 多様体, (狭義の)Calabi-Yau 多様体, 正則シンプレクティック多様体 (超 Kähler 多様体) に分解できる.

非負曲率の多様体に対する構造定理は上記の成果の自然な発展形であり, Fano 型と Calabi-Yau 型の補間を目指す点で重要なテーマである. 80 年・90 年代の一連の研究 [CP91, HSW81, Mok88, DPS93, DPS94] により, "非負曲率の接束" を持つ射影多様体 (より一般にコンパクト Kähler 多様体) の構造定理が確立された. 双有理幾何の視点からは接束よりも反標準因子を考える方が自然である. 近年, 非負曲率の反標準因子を持つ射影多様体に対する構造定理が確立され, 非負曲率性の研究が極めて大きく進展した. 例えば, [Cao19, CH19] は, [Pău97, Zha96, Zha05] などのネフ反標準因子の研究を土台に, 非特異な射影多様体に対する構造定理を確立した. [CCM19] は, 双有理幾何的にさらに自然な定式化を目指し, ネフ反標準因子を持つ KLT 対の研究を開始した. その後, [Wan21] を経て, [MW] がネフ反標準因子を持つ KLT 対の構造定理を確立した. 本稿の目的は上記の構造定理を紹介し, 基本群・ホロノミー群・葉層構造・順像層との関係について議論することである.

なお, 本稿では反標準因子に焦点を絞り議論するが, 微分幾何・複素解析の分野にはさまざまな "非負曲率" の概念があり, 互いに刺激し合いながら発展している. 例えば, [HIM21] で開始された接束の擬有効性・特異エルミート計量の半正値性の研究については [HIM21, HLS, Wu] を参照されたい. また, 正則断面曲率の微分幾何的な非負曲率性に対する研究については [HW20, Mat20, Mat21a, Yan18] を参照されたい. さまざまな半正

値性に対する構造定理の類似点と相違点については [Mat21b] に纏まっている.

本稿の構成は以下の通りである: 第 2 章で, 射影多様体が非特異の場合に, 反標準因子のネフ性・半正値性・半豊富性に対する構造定理を紹介する. 第 3 章で, 射影多様体が(高々)KLT 特異点を持つ場合に対する, 上記の構造定理の一般化を紹介する. 第 4 章で, 構造定理に現れる有理連結多様体の Fano 性について議論する.

2 非負曲率の反標準因子を持つ射影多様体 –非特異の場合–

[CP91, HSW81, Mok88, DPS93, DPS94] により, “非負曲率の接束” を持つコンパクト Kähler 多様体の構造定理が確立された. この章では, 非特異な射影多様体に対する, この構造定理の反標準因子への一般化を紹介する.

定理の定式化のために, 局所自明射 (locally trivial fibration)・局所定数射 (locally constant fibration) の定義を復習する.

定義 2.1. X, Y を正規多様体とし, $\phi: X \to Y$ を代数的ファイバー空間 (即ち, 固有でファイバー連結な全射正則写像) とする.

(1) Y の任意の点に対しその開近傍 $B \subset Y$ 上の同型 $\phi^{-1}(B) \cong B \times F$ が存在するとき, $\phi: X \to Y$ を局所自明射と呼ぶ. ここで F は $\phi: X \to Y$ のファイバーである.
(2) $\phi: X \to Y$ を局所自明射とし, F をそのファイバーとする. Y の基本群 $\pi_1(Y)$ から F の自己同型群 $\mathrm{Aut}(F)$ への表現 $\rho: \pi_1(Y) \to \mathrm{Aut}(F)$ が存在して, 直積 $Y_{\mathrm{univ}} \times F$ への基本群 $\pi_1(Y)$ の作用より, Y 上の同型 $Y_{\mathrm{univ}} \times F/\pi_1(Y) \cong X$ が誘導されるとき, $\phi: X \to Y$ を局所定数射と呼ぶ. ここで Y_{univ} は Y の普遍被覆面であり, $\gamma \in \pi_1(Y)$ は $Y_{\mathrm{univ}} \times F$ に $\gamma \cdot (y, p) = (\gamma \cdot y, \rho(\gamma) \cdot p)$ で作用する.

定義から明らかに局所定数射は局所自明射であるが, 逆は成立しない. 例えば, 射影空間束 $X = \mathbb{P}(E) \to Y$ は常に局所自明射であるが, 局所定数射とは限らない. X, Y を非特異な射影多様体とする. 局所定数射 $\phi: X \to Y$ が与えられたとき, X の接ベクトル束 T_X は直和分解 $T_X \cong T_{X/Y} \oplus \phi^* T_Y$ を許し, 部分束 $\phi^* T_Y \subset T_X$ は X の葉層構造を与える. 逆に, 与えられた射 $\phi: X \to Y$ から直和分解 $T_X \cong T_{X/Y} \oplus \phi^* T_Y$ が誘導され, $\phi^* T_Y \subset T_X$ が X の葉層構造になれば, 射 $\phi: X \to Y$ は局所定数射となる (例えば [Hör07] とその参考文献を参照).

Cao-Höring は非特異な射影多様体の有理連結射 (maximal rationally connected fibration) に対して構造定理を与えた [Cao19, CH19]. (有理連結射とその性質については [Cam92, KoMM92, BDPP13, GHS03] を参照されたい.) 非負曲率の反標準因子を持つ多様体に対する決定的な結果である.

定理 2.2 (ネフ反標準因子を持つ非特異な射影多様体の構造定理, [Cao19, CH19])**.** X を非特異な射影多様体とする. 反標準因子 $-K_X$ がネフであると仮定する. このとき, 以下を満たす射 $\phi : X \to Y$ が存在する:

(1) $\phi : X \to Y$ は局所定数射である.
(2) ファイバー F は有理連結である.
(3) Y は数値的に自明な標準因子を持つ非特異な射影多様体である.

正確には, [CH19] では $\phi : X \to Y$ の局所自明性にしか言及していないが, その証明から局所定数射であることが従う. 局所定数性は極めて重要である. 例えば, 次章ではこの定理の KLT 対への一般化が与えられるが, その証明では定理を局所定数射で定式化することが重要な役割を果たす. なお, ごく最近, 上記の定理は $\det \mathcal{F}$ がネフとなる葉層構造 $\mathcal{F} \subset T_X$ を持つ多様体に拡張された [Ou].

この定理の主張を考察しよう. 以下の Beauville-Bogomorov-Yau 分解によれば, 定理 2.2 に現れる Y に対して, ある有限エタール被覆 $Y' \to Y$ が存在し, Y' は Abel 多様体, (狭義の)Calabi-Yau 多様体, 正則シンプレクティック多様体の直積に分解される. $\phi : X \to Y$ の $Y' \to Y$ によるファイバー積をとることで, X は (有限エタール被覆を法として) 有理連結多様体, Abel 多様体, Calabi-Yau 多様体, 正則シンプレクティック多様体を構成要素として, 表現 $\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{Aut}(F)$ から構成される. この意味で, ネフ反標準因子を持つ X は有理連結多様体, Abel 多様体, Calabi-Yau 多様体, 正則シンプレクティック多様体を基本的な構成要素とする. また, ファイバー F は有理連結 (特に単連結) なので, X の普遍被覆面 X_{univ} も直積に分解できる.

定理 2.3 (Beauville-Bogomorov-Yau 分解, [Bea83])**.** Y をコンパクト Kähler 多様体とし, その標準因子 K_Y は数値的に自明 (即ち, $c_1(K_Y) = 0 \in H^2(Y, \mathbb{R})$) であるとする. このとき, ある有限エタール被覆 $Y' \to Y$ が存在して, 被覆空間 Y' は直積に分解される:

$$Y' \cong A \times \prod_i B_i \times \prod_j C_j.$$

ここで A は Abel 多様体で, B_i は (既約な狭義)Calabi-Yau 多様体, C_j は (既約な) 正則

シンプレクティック多様体である.

次に, 定理 2.2 の証明の概略を説明しよう. 証明は極めて難解だが, 有用な概念・技術がつまっている. 証明は以下の 3 つの段階に分けられる.

(1) (基本群の研究, [Pău97]) X の基本群 $\pi_1(X)$ が多項式増大的 (of polynomial growth) であることを, Calabi-Yau の定理と Cheeger-Colding の理論を用いて証明する.
(2) (Albanese 射の研究, [Cao19]) X の Albanese 射 $X \to \mathrm{Alb}(X)$ が局所定数射であることを示す. (1) と合わせることで, 問題は X が単連結の場合に帰着される.
(3) (有理連結射の研究, [CH19]) X が単連結の場合に, X の有理連結射 $X \dashrightarrow Y$ を調べることで, 証明が完成する.

[Zha96, Zha05] では有理連結射 $X \dashrightarrow Y$ の双有理的な半安定性が証明されており, この成果は (2), (3) において重要な役割を果たす. (2), (3) の段階では順像層の正値性と平坦性の理論が重要な役割を果たす. 簡単のため, X の有理連結射 $\phi : X \to Y$ が正則になる場合を考える. このとき, 適切に定義された相対的に豊富な直線束 $\hat{A}$ に対し, 順像層

$$\mathcal{W}_m := \phi_* \mathcal{O}_X(m\hat{A}) \qquad (m \in \mathbb{Z}_+)$$

を考え, その数値的な平坦性を証明する. (数値的な平坦性の定義については定義 2.6 を参照されたい.) $\mathcal{W}_m$ の平坦性を示す段階では, 順像層の (解析的な) 正値性の理論が重要となる. これは, 近年, 急速に発展した重要な理論なので, ここで説明を加えておこう. X, Y を射影多様体, L を適切な半正値性を持つ直線束, $\phi : X \to Y$ を代数的ファイバー空間とする. このとき, 順像層 $\phi_*(mK_{X/Y} + L)$ は "適切な" 半正値性を持つ. ここで $K_{X/Y} := K_X - \phi^* K_Y$ は相対的標準因子である. "適切な" 半正値性とは, 解析的には特異エルミート計量の非負曲率性で定式化され, 代数幾何的にはある種の擬有効性で定式化される. 解析の半正値性の方が強く優位性があることを強調しておく. 詳細は [Ber09, BP08, HPS18, PT18] を参照されたい.

$\mathcal{W}_m$ の平坦性から射影空間束 $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1) \to Y$ は局所定数射になることがわかる. $\hat{A}$ に付随する有理連結射 $\phi : X \to Y$ の $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1) \to Y$ への (相対的な) 埋め込みを考えると, 局所定数性が有理連結射 $\phi : X \to Y$ に遺伝することが証明される. 実際には, 有理連結射は一意的でもないし正則でもないので, 両者の葉層構造を比較し, "良い" 有理連結射を構成する必要がある. この証明から平坦ベクトル束 E の射影空間束 $\mathbb{P}(E) \to Y$ がある意味で本

質的であることがわかる.

さて, 上記の証明では, [Pău97] の基本群の結果が起点となっていた. 反標準因子にネフよりも強い仮定を課すと, 上記の定理 2.2 は (基本群の結果を経ずに) 直接的に証明され, 逆に構造定理から基本群の多項式増大性が確認できる. 以下でこの事実をまとめておこう.

定理 2.4 (半正値または半豊富な反標準因子を持つ非特異な射影多様体の構造定理, [CDP15, Amb05, EIM])**.** X を非特異な射影多様体とする.
(a) 反標準因子 $-K_X$ が半正値である (即ち, $-K_X$ に付随する直線束上に Chern 曲率が半正値となる C^∞-級のエルミート計量が存在する) と仮定する. このとき, 定理 2.2 内の (1), (2), (3) を満たす射 $\phi : X \to Y$ が存在する.
(b) 反標準因子 $-K_X$ が半豊富であると仮定する. このとき, X を有限エタール被覆 $X' \to X$ に置き換えることで, 上記の射 $\phi : X \to Y$ は直積の構造を持つ (即ち, 同型 $X \cong Y \times F$ が存在する).

定理 2.4(a) の仮定は微分幾何的な仮定であることに注意する. その証明は, ホロノミー群の分解および (ホロノミー群の)de Rham の定理に基づいており, X がコンパクト Käher 多様体の場合にも機能する [CDP15]. 一方で, ネフ反標準因子に対してはホロノミー群の理論は応用できず, 証明にはネフ性や順像層の正値性に対するより深い洞察が必要とされる. この事情は接束のネフ性・双正則断面曲率の非負性に対する構造定理と類似している. 定理 2.4(b) は [Amb05] の Hodge 理論に対する深い結果から従う. [EIM, Theorem 1.6] では, 局所定数射の定義に現れる $\rho : \pi_1(Y) \to \mathrm{Aut}(F)$ を幾何学的に調べるにより, 別証明が与えられている. ただし [Amb05] の結果は特異点のある多様体にも適応できる点でより強力である.

以下は局所定数な射影空間束 $\mathbb{P}(E) \to Y$ の具体例である. 以下の具体例は反標準因子のネフ性・半正値性・半豊富性の違いを考える際に助けとなる.

例 2.5. Y を楕円曲線とする. いずれの例も $c_1(E) = 0$ なる階数 2 のベクトル束 E の射影空間束 $\phi : X := \mathbb{P}(E) \to Y$ である. このとき, $-K_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(2)$ であり, $\hat{A}$ として $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ をとることができ, $\mathcal{W}_m = \phi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(m) = \mathrm{Sym}^m E$ であることに注意する.
(1) ($-K_X$ がネフだが半正値でない例). Y 上の分裂しない完全列

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to E \to \mathcal{O}_Y \to 0$$

に現れる階数 2 のベクトル束 E を考える. E は定義から数値的に平坦であるが, Hermite

平坦ではない．実際, Hermite 平坦だとすると完全列が分裂し, E の取り方に矛盾する．このとき, 射影空間束 $\phi : X := \mathbb{P}(E) \to Y$ を考える．反標準因子 $-K_X$ はネフだが半正値ではない．また, $\mathcal{W}_m = \mathrm{Sym}^m E$ は数値的に平坦だが Hermite 平坦ではない.

(2) ($-K_X$ が半正値だが半豊富ではない例). $\deg L = 0$ だが mL ($m \in \mathbb{Z}$) が自明にならない直線束 L に対して, $E := \mathcal{O}_Y \oplus L$ を考える．このとき, $-K_X$ は半正値だが半豊富ではない．また, $\mathcal{W}_m = \mathrm{Sym}^m E$ は Hermite 平坦だが, mL が切断を持たないのでエタール自明ではない.

(3) ($-K_X$ が半豊富の例). $m_0 L$ ($m_0 > 1$) は自明だが L 自身は自明ではない直線束 L に対して, $E := \mathcal{O}_Y \oplus L$ を考える．このとき, $-K_X$ は半豊富である．また, $\mathcal{W}_m = \mathrm{Sym}^m E$ はエタール自明だが, $\mathcal{W}_m$ 自身は自明ではない．実際, m_0-捩れ因子が定めるエタール被覆 $\pi : Z \to Y$ を考えると, $\pi^* L$ は自明なので, $\pi^* \mathrm{Sym}^m E$ も自明なベクトル束となる.

さて, 上記の例では, $-K_X$ のネフ性・半正値性・半豊富性が E の数値的な平坦性・Hermite 平坦性・エタール自明性にそれぞれ対応していた．実は, これは偶然ではなく, 相対的な標準因子 $K_{X/Y}$ を使い, 対応を定式化することができる (詳細は [EIM] を参照). 実際には, 与えられた $\phi : X \to Y$ に対して, $-K_{X/Y}$ のネフ性・半正値性・半豊富性が $\mathcal{W}_m$ の数値的な平坦性・Hermite 平坦性・エタール自明性を導き, 逆も (適切な状況では) 成立する.

最後に上記の例に現れた平坦性についてまとめておく.

定義 2.6. X を非特異な射影多様体とし, E を X 上のベクトル束とする.

(1) 以下を満たすとき, E はエタール自明化可能 (étale trivializable) であるという: ある有限エタール被覆 $\tau : X' \to X$ が存在し, 引き戻し $\tau^* E$ が自明なベクトル束となる.

(2) 以下を満たすとき, E は Hermite 平坦 (Hermitian flat) であるという: E は曲率テンソルが平坦となる C^∞-級の計量を許す.

(3) 以下を満たすとき, E は数値的に平坦 (numerically flat) であるという: 部分束によるフィルトレーション

$$X \times \{0\} := F_0 \hookrightarrow F_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow F_{m-1} \hookrightarrow F_m := E$$

で各商 F_{i+1}/F_i が Hermite 平坦なるものが存在する.

(3) の条件は E がネフかつ $c_1(E) = 0 \in H^2(X, \mathbb{R})$ を満たすことと同値である．(3) の条件から $c_i(E) = 0 \in H^{2i}(X, \mathbb{R})$ が導かれることに注意しておく．(2) ならば (3) だが逆は成立しない (例 2.5 を参照)．また, (3) ならば E は局所系なので, E は表現 $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}(\operatorname{rank} E : \mathbb{C})$ から構成される [Sim92].

3　ネフ反標準因子を持つ KLT 対の構造定理について

この章では [MW] で確立された定理 2.2 の KLT 対への一般化を紹介する．KLT 対への一般化は双有理幾何的には極めて自然であり, 極小モデル理論 (Calabi-Yau 対) にも応用できる (系 3.3).

定理 3.1 (ネフ反標準因子を持つ KLT 対の構造定理, [MW])**.** (X, Δ) をネフ反標準因子 $-(K_X + \Delta)$ を持つ KLT 対とする．このとき, X の有限準エタール被覆を法にして, 以下を満たす射 $\phi: X \to Y$ が存在する:

(1) $\phi: X \to Y$ は因子 Δ も込めて局所定数射である．即ち, (F, Δ_F) を (X, Δ) のファイバー F への制限で得られる KLT 対とすると, 定義 2.1 に現れる同型が境界因子も込めて同型となる:

$$Y_{\mathrm{univ}} \times (F, \Delta_F)/\pi_1(Y) \cong (X, \Delta).$$

(2) ファイバー F は有理連結である．

(3) Y は KLT 特異点を持つ射影多様体で, その標準因子は数値的に自明である．

ここで有限準エタール被覆とは余次元が 2 以上の分岐点集合を持つ有限射である．エタール被覆は $\pi_1(X)$ の部分群と対応していたが, 有限準エタール被覆 (の圏) は $\pi_1(X_{\mathrm{reg}})$ の指数有限な部分群と対応する．ここで X_{reg} は X の非特異点集合を意味する．

定理 3.1 の証明の基本方針は, [Cao19, CH19] に基づくが, X が非特異な場合に対してですら新しいアイデアを含んでいる．例えば, 基本群の結果 [Pău97] を経ず, 単連結とは限らない多様体を直接的に扱う技術を与えている．面白いことに, [CH19] では基本群の結果を使い構造定理を得たが, 今回は逆に構造定理から X の基本群の情報が得られる．Beauville-Bogomolov-Yau 分解は, [GKP16, Dru18, GGK19, HP19, CP19, Cam21] により, KLT 特異点を持つ Calabi-Yau 型の多様体に一般化された．定理 3.1 の証明ではその理論が積極的に応用されている．例えば, [GKP16, HP19] 内の平坦な連接層・Galois

被覆に対する結果が有効に使われる.

定理 3.2 (KLT 多様体に対する Beauville-Bogomorov-Yau 分解)**.** Y を KLT 特異点を持つ射影多様体とし, その標準因子 K_Y が数値的に自明であるとする. このとき, ある有限準エタール被覆 $Y' \to Y$ が存在して, 被覆空間 Y' は直積に分解される:

$$Y' \cong A \times \prod_i B_i \times \prod_j C_j.$$

ここで A は Abel 多様体で, B_i は特異 Calabi-Yau 多様体, C_j は (既約な) 特異正則シンプレクティック多様体である (それぞれの定義は [HP19] を参照されたい).

数値的に自明な標準因子 $K_X + \Delta$ を持つ KLT 対 (X, Δ) は自然に定理 3.1 の仮定を満たすので, 有限準エタール被覆を法にして, (1), (2), (3) を満たす射 $\phi : X \to Y$ を持つ. [Amb05] よりこの射は (エタール被覆を法にして) 直積となり, 定理 3.2 により底空間 Y も (有限準エタール被覆を法にして) 直積に分解される. 以上の考察から以下を得る:

系 3.3 (Calabi-Yau 型の KLT 対の分解定理, [Amb05, MW], 定理 3.2)**.** (X, Δ) を数値的に自明な標準因子 $K_X + \Delta$ を持つ KLT 対とする. このとき, 有限準エタール被覆を法にして, 以下の同型が存在する:

$$(X, \Delta) \cong (F, \Delta_F) \times A \times \prod_i B_i \times \prod_j C_j$$

ここで (F, Δ_F) は有理連結な KLT 対, A は Abel 多様体で, B_i は特異 Calabi-Yau 多様体, C_j は (既約な) 特異正則シンプレクティック多様体である

Calabi-Yau 型の KLT 対は (対数的) 極小モデル理論に自然に現れる. 実際, 擬有効な標準因子 $(K_X + \Delta)$ を持つ (X, Δ) は極小モデル $(X_{\min}, \Delta_{\min})$ を持ち, その Iitaka 射 $X_{\min} \to Z$ の一般ファイバーは Calabi-Yau 型の KLT 対となる, と予想されている (アバンダンス予想). 定理 3.1 自体はアバンダンス予想から従う訳ではないが, 結果的に極小モデル理論に現れる Calabi-Yau 型の KLT 対をより基本的な構成要素に分解する.

定理 3.1 と基本群との関係について考察しよう. 以下の予想は, X が非特異で $\Delta = 0$ の場合には, [Pău97] の主結果に対応している. 面白いことに, 非特異の場合と同様に, 予想 3.4 から定理 3.1 を導くことができる. しかし, [Pău97] は Calabi-Yau の定理と Cheeger-Colding の理論に基づいており, この議論を直接的に KLT 対に一般化するのは難しく, 未だ解決には至っていない.

予想 3.4 ([Wan21, Conjecture 2])**.** (X, Δ) をネフ反標準因子 $-(K_X+\Delta)$ を持つ KLT 対とする．このとき, X の非特異点集合の基本群 $\pi_1(X_{\mathrm{reg}})$ は多項式増大的 (polynomial growth) であろう．

次に X の普遍被覆面 X_{univ} を考えよう．以下で X と Y は適宜準エタール被覆で置き換えるものと約束する．非特異な有理連結多様体は単連結であり, 基本群は KLT 特異点を持つ多様体に対して双有理不変量 [Tak03] なので, $\phi : X \to Y$ のファイバー F は単連結である．従って, 同型 $X_{\mathrm{univ}} \cong F \times Y_{\mathrm{univ}}$ が得られる．定理 3.2 より, Y は A, B_i, C_j の直積としてよい．また, Abel 多様体 A の普遍被覆面は複素ユークリッド空間なので, B_i と C_j の普遍被覆面が決定できれば, X_{univ} に対する分解定理が得られる．以下, 記号 Z で B_i または C_j を表す．X が非特異の場合には, Z も非特異であり, Z は自動的に単連結となる．X が KLT 特異点を持つ場合 (即ち, Z も KLT 特異点も持つ場合) にも, 同様に Z の基本群は小さいことが期待できる．Z の拡張された不正則数

$$\hat{q}(Z) := \sup\{q(Z') \,|\, Z' \to Z \text{ は準エタール被覆 }\}$$

が零であることに注意すると, 以下の形の予想が得られる:

予想 3.5 ([MW, Conjecture 1.5])**.** Z を KLT 特異点を持つ射影多様体とする．標準因子 K_Z は数値的に自明で, 拡張された不正則数 $\hat{q}(X)$ は零であると仮定する．このとき, Z の基本群 $\pi_1(Z)$ は有限群であろう．より強く, Z の非特異点集合 Z_{reg} の基本群 $\pi_1(Z_{\mathrm{reg}})$ も有限群であろう．

予想 3.4 から予想 3.5 が従うことに注意する．予想 3.5 は Calabi-Yau 型の多様体に対して定式化されており, 予想 3.4 よりは手のつく問題にみえる．Z が KLT 特異点を持つ Fano 多様体の場合には, $\pi_1(Z_{\mathrm{reg}})$ の有限性が証明されている [Bra21]．予想 3.4 は [Bra21] と予想 3.5 を補間する予想だとも解釈できる．

4　ファイバーの Fano 性

KLT 対 (X, Δ) が弱 Fano ならば X は有理連結である [HM07]．これは Fano 多様体の有理連結性の KLT 対への拡張である．ここで弱 Fano とは, 対 (X, Δ) が KLT 特異点を持ち, 反標準因子 $-(K_X+\Delta)$ がネフかつ巨大であることを意味する．この章では, この成果の一般化を問う Hacon-M$^{\mathrm{c}}$Kernan の問題を考える．

問題 4.1 (Hacon-M^{c}Kernan の問題, [HM07, Question 3.1])**.** 射影的な KLT 対 (X, Δ) の反標準因子 $-(K_X + \Delta)$ がネフであるとする．$\phi : X \dashrightarrow Y$ を X の有理連結射とする．このとき, 不等式

$$\kappa(-(K_X + \Delta)) \leq \dim F$$

は成立するか．ここで F は有理連結射 $\phi : X \dashrightarrow Y$ の一般ファイバーである．

問題 4.1 は "弱 Fano ならば有理連結" の一般化を問うている．実際に, $-(K_X + \Delta)$ が巨大のときは, 定義より $\kappa(-(K_X + \Delta)) = \dim X$ なので, $\dim F = \dim X$ が従い, X の有理連結性が従う．また, 定理 2.2 と定理 3.1 に現れる有理連結なファイバー F の (弱)Fano 性からの離れ具合を問うているとも解釈できる．Ejiri-Gongyo は小平次元に注目し Hacon-M^{c}Kernan の問題を肯定的に解決した．

定理 4.2 (Hacon-M^{c}Kernan の問題の解決, [EG19])**.** 問題 4.1 と同じ状況の下で,

$$\kappa(-(K_X + \Delta)) \leq \kappa(-(K_F + \Delta_F))$$

が成立する．ここで (F, Δ_F) は (X, Δ) のファイバー F への制限で得られる KLT 対である．特に, Hacon-M^{c}Kernan の問題は肯定的に解決される．

不等式の右辺はファイバー F 上の因子の小平次元であり, $\dim F$ を超えないので, Hacon-M^{c}Kernan の問題はこの不等式から直ちに従う．実際には, Ejiri-Gongyo は切断の一般ファイバー F への制限写像

$$H^0(X, -m(K_X + \Delta)) \to H^0(F, -m(K_F + \Delta_F)) \quad (m \in \mathbb{Z}_+)$$

が単射になることを示し, 前半の不等式を得た．小平次元の代わりに数値的小平次元を考えたらどうなるであろうか．以下の定理はこの問題に対する解答を与える．

定理 4.3 (Hacon-M^{c}Kernan の問題の一般化, [CCM19])**.** 問題 4.1 と同じ状況の下で, 等式

$$\nu(-(K_X + \Delta)) = \nu(-(K_F + \Delta_F))$$

が成立する．特に, 以下の不等式が成立する:

$$\nu(-(K_X + \Delta)) \leq \dim F.$$

定理 4.2 と定理 4.3 を比較しよう．小平次元に対しては不等式しか得られない (等式に対する反例は例 2.5 を参照)．一方で, 数値的小平次元に対しては等式が成立する．また, 一般に $\nu \geq \kappa$ が成立するため, 定理 4.3 の後半の不等式は Hacon-M$^{\mathrm{c}}$Kernan の問題よりも真にシャープな評価を与える．定理 4.2 と異なり, 豊富な直線束 A をテンソルした場合には制限写像

$$H^0(X, -m(K_X + \Delta) + A) \to H^0(F, -m(K_F + \Delta_F) + A|_F)$$

は, 少なくとも $m^{\kappa(-(K_X+\Delta))}$ 次元の Kernel が出現し, 単射にはならないことにも注意しておく．

証明の概略について説明する．[EG19, CCM19] はいずれも適切な順像層の正値性の理論を用いる．簡単のため, X が非特異で $\Delta = 0$ の場合を考え, X の有理連結射 $\phi : X \to Y$ は正則であると仮定する．まず, 垂直方向 (ファイバー方向) に豊富で水平方向に平坦な直線束 $\hat{A}$ を構成する．次に, 順像層

$$\mathcal{V}_m := \phi_* \mathcal{O}_X(-mK_{X/Y} + \hat{A}) \quad (m \in \mathbb{Z}_+)$$

を考え, $\mathcal{V}_m$ が数値的平坦になることを証明する．最後に, Y 上の豊富な直線束 A_Y に対して, 層 $\mathcal{V}_m \otimes \mathcal{O}_Y(A_Y)$ の大域切断の次元を 2 通りの方法で計算する．射影公式を使うと, $H^0(Y, \mathcal{V}_m \otimes \mathcal{O}_Y(A_Y)) \cong H^0(X, -mK_{X/Y} + \hat{A} + \phi^* A_Y)$ がわかる．$\hat{A} + \phi^* A_Y$ は X 上で豊富なので, この空間の次元の増大度は $m^{\nu(-K_X)}$ 程度である．一方で, 数値的平坦性より

$$h^0(Y, \mathcal{V}_m \otimes \mathcal{O}_Y(A_Y)) \leq \operatorname{rank} \mathcal{V}_m$$

を得る．$\mathcal{V}_m$ の階数は一般のファイバー F 上の切断の空間の次元なので, その増大度は $m^{\nu(-K_F)}$ 程度である．以上の議論から不等式 $\leq$ を得る．逆の不等式は, 切断の拡張定理 [CDM17, Mat15, Mat18, Mat21b] を応用し, F 上の切断を X 上に拡張することで得られる．

謝辞

城崎代数幾何学シンポジウム 2021 での講演の機会を与えて下さった世話人の方々: 田中公先生, 古川勝久先生, 馬昭平先生に感謝いたします．本研究は JSPS から国際共同研究強化 (A) ♯19KK0342 および基盤研究 (B) ♯21H00976 の助成を受けたものです．

参考文献

[Amb05] F. Ambro, *The moduli b-divisor of an lc-trivial fibration*, Compos. Math. **141** (2005), no. 2, 385–403.

[Bea83] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 755–782 (1984).

[Ber09] B. Berndtsson, *Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 2, 531–560.

[BP08] B. Berndtsson, M. Păun, *Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical divisors*, Duke Math. J. **145** (2008), no. 2, 341–378.

[BCHM10] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. M^{c}Kernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 405–468.

[BDPP13] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Păun, T. Peternell, *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension*, J. Algebraic Geom. **22** (2013), no. 2, 201–248.

[Bra21] L. Braun, *The local fundamental group of a Kawamata log terminal singularity is finite*, Invent. Math. **226**, (2021), 845–896.

[Cam92] F. Campana, *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 5, 539–545.

[Cam21] F. Campana, *The Bogomolov-Beauville-Yau Decomposition for Klt Projective Varieties with Trivial First Chern Class -Without Tears-*, Bull. Soc. Math. France **149** (2021), no. 1, 1–13.

[CCM19] F. Campana, J. Cao, S. Matsumura, *Projective klt pairs with nef anticanonical divisor*, Algebr. Geom. **8** (2021), no.4, 430–464.

[CP19] F. Campana, M. Păun, *Foliations with positive slopes and birational stability of orbifold cotangent bundles*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **129** (2019), 1–49.

[CP91] F. Campana, T. Peternell, *Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective*, Math. Ann. **289** (1991), no. 1, 169–187.

[Cao19] J. Cao, *Albanese maps of projective manifolds with nef anticanonical bundles*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **52** (2019), no. 5, 1137–1154.

[CDM17] J. Cao, J.-P. Demailly, S. Matsumura, *A general extension theorem for cohomology classes on non reduced analytic subspaces*, Sci. China Math. **60** (2017), no. 6, 949–962.

[CDP15] F. Campana, J.-P. Demailly, T. Peternell, *Rationally connected manifolds and semipositivity of the Ricci curvature*, Recent advances in algebraic geometry, 71–91, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **417**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2015.

[CH19] J. Cao, A. Höring, *A decomposition theorem for projective manifolds with nef anticanonical divisor*, J. Algebraic Geom. **28** (2019), no. 3, 567–597.

[DPS93] J.-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider, *Kähler manifolds with numerically effective Ricci class*, Compositio Math. **89** (1993), no. 2, 217–240.

[DPS94] J.-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider, *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, J. Algebraic Geom., **3**, (1994), no.2, 295–345.

[Dru18] S. Druel, *A decomposition theorem for singular spaces with trivial canonical class of dimension at most five*, Invent. Math. **211** (2018), no. 1, 245–296.

[EG19] S. Ejiri, Y. Gongyo, *Nef anti-canonical divisors and rationally connected fibrations*, Compos. Math. **155** (2019), no. 7, 1444–1456.

[EIM] S. Ejiri, M. Iwai, S. Matsumura, *On asymptotic base loci of relative anti-canonical divisors of algebraic fiber spaces*, preprint, arXiv:2005.04566v1.

[GHS03] T. Graber, J. Harris, J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.

[GGK19] D. Greb, H. Guenancia, S. Kebekus, *Klt varieties with trivial canonical class: holonomy, differential forms, and fundamental groups*, Geom. Topol. **23** (2019), no. 4, 2051–2124.

[GKP16] D. Greb, S. Kebekus, T. Peternell, *Étale fundamental groups of Kawamata log terminal spaces, flat sheaves, and quotients of abelian varieties*, Duke Math. J. **165** (2016), no. 10, 1965–2004.

[HM07] C. D. Hacon, J. M^{c}Kernan, *On Shokurov's rational connectedness conjecture*, Duke Math. J. **138** (2007), no. 1, 119–136.

[HPS18] C. Hacon, M. Popa, C. Schnell, *Algebraic fiber spaces over abelian varieties: around a recent theorem by Cao and Păun*, Local and global methods in algebraic geometry, 143–195, Contemp. Math., **712**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.

[HW20] G. Heier, B. Wong, *On projective Kähler manifolds of partially positive curvature and rational connectedness*, Doc. Math. **25** (2020), 219–238.

[Hör07] A. Höring, *Uniruled varieties with split tangent bundle*, Math. Z. **256** (2007), no. 3, 465–479.

[HLS] A. Höring, J. Liu, F. Shao, *Examples of Fano manifolds with non-pseudoeffective tangent bundle*, preprint, arXiv:2003.09476v1.

[HP19] A. Höring, T. Peternell, *Algebraic integrability of foliations with numerically trivial canonical bundle*, Invent. Math. **216** (2019), no. 2, 395–419.

[HIM21] G. Hosono, M. Iwai, S. Matsumura, *On projective manifolds with pseudo-effective tangent bundle*, to appear in J. Inst. Math. Jussieu, arXiv:1908.06421v1.

[HSW81] A. Howard, B. Smyth, H. Wu, *On compact Kähler manifolds of nonnegative bisectional curvature I and II*, Acta Math. **147** (1981), no. 1-2, 51–70.

[Hw06] J.-M. Hwang, *Rigidity of rational homogeneous spaces*, International Congress of Mathematicians. Vol. II, 613–626, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[KoMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori, *Rationally connected varieties*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 3, 429–448.

[Mat13] S. Matsumura, *Asymptotic cohomology vanishing and a converse to the Andreotti-Grauert theorem on surfaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013), no. 6, 2199–2221.

[Mat15] S. Matsumura, *Injectivity theorems with multiplier ideal sheaves and their applications*, Complex analysis and geometry, 241–255, Springer Proc. Math. Stat., **144**, Springer, Tokyo, 2015.

[Mat18] S. Matsumura, *An injectivity theorem with multiplier ideal sheaves of singular metrics with transcendental singularities*, J. Algebraic Geom. **27** (2018), no. 2, 305–337.

[Mat20] S. Matsumura, *On the image of maximal rationally connected fibrations of projective manifolds with semi-positive holomorphic sectional curvature*, Pure and

Applied Mathematics Quarterly, **16**, No. 5 (2020), pp. 1443–1463.

[Mat21a] S. Matsumura, *On projective manifolds with semi-positive holomorphic sectional curvature*, to appear in Amer. J. Math., arXiv:1811.04182v1.

[Mat21b] S. Matsumura, *Open problems on structure of positively curved projective varieties*, to appear in Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.

[Mat21c] S. Matsumura, *Injectivity theorems with multiplier ideal sheaves for higher direct images under Kähler morphisms*, to appear in Algebr. Geom., arXiv:1607.05554v2.

[MW] S. Matsumura, J. Wang, *Structure theorem for projective klt pairs with nef anti-canonical divisor*, preprint, arXiv:2105.14308v2.

[Mok88] N. Mok, *The uniformization theorem for compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature*, J. Differential Geom. **27** (1988), no. 2, 179–214.

[Mor79] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 593–606.

[Ou] W. Ou, *Foliations whose first class is nef*, preprint, arXiv:2105.10309v1.

[Pău97] M. Păun, *Sur le groupe fondamental des variétés kählériennes compactes à classe de Ricci numériquement effective*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), no. 11, 1249–1254.

[PT18] M. Păun, S. Takayama, *Positivity of twisted relative pluricanonical divisors and their direct images*, J. Algebraic Geom. **27** (2018), 211–272.

[Sim92] C.-T. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **75** (1992), 5–95.

[Tak03] S. Takayama, *Local simple connectedness of resolutions of log-terminal singularities*, Internat. J. Math. **14** (2003), no. 8, 825–836.

[SY80] Y.-T. Siu, S.-T. Yau, *Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature*, Invent. Math. **59** (1980), no. 2, 189–204.

[Yan18] X. Yang, *RC-positivity, rational connectedness and Yau's conjecture*, Camb. J. Math. **6** (2018), 183–212.

[Wan21] J. Wang, *Structure of projective varieties with nef anticanonical divisor: the case of log terminal singularities*, to appear in Math. Ann., arXiv:2005.05782v2.

[Wu] X. Wu, *Note on compact Kähler manifold with strongly pseudo-effective tangent bundle*, preprint, arXiv:2110.02931v2.

[Zha96] Q. Zhang, *On projective manifolds with nef anticanonical bundles*, J. Reine Angew. Math. **478** (1996), 57–60.

[Zha05] Q. Zhang, *On projective varieties with nef anticanonical divisors*, Math. Ann. **332** (2005), no. 3, 697–703.