Minimal model program for semi-stable threefolds in mixed characteristic

高松　哲平 *

概要

本稿では，城崎代数幾何学シンポジウム 2021 での著者の講演をもとに，東京大学での吉川翔氏との共同研究 [TY20] の結果を説明する．

1　Introduction

本稿では，東京大学の吉川翔氏と私との共同研究 ([TY20]) によって得られた，混標数三次元半安定還元多様体の極小モデル理論の結果について報告する．極小モデル理論の発端となったのは，Castelnuovo による以下の結果である．

定理 1.1 (Castelnuovo)**.** X を $\mathbb{C}$ 上の smooth 射影的曲面とする．この時，滑らか射影的曲面間の双有理射の列

$$X = X_0 \xrightarrow{\phi_0} X_1 \xrightarrow{\phi_1} \cdots \xrightarrow{\phi_{r-1}} X_r$$

であって，$\phi_i\,(0 \le i \le r-1)$ は (-1)-曲線の縮小写像であり，X_r は (-1)-曲線を含まない．

極小モデル理論とは Castelnuovo の結果の高次元一般化であり，与えられた多様体に対し，その双有理同値類の中で “最も単純な” 多様体を探すプログラムである．

以下により詳しく説明する．X を代数閉体 k 上の射影的多様体で，マイルドな特異点 (例えば滑らか) を持つものとする．この時，X について極小モデル理論が回るとは，代数多様体の双有理写像の列

$$X = X_0 \overset{\phi_0}{\dashrightarrow} X_1 \overset{\phi_1}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\phi_{r-1}}{\dashrightarrow} X_r,$$

で，divisorial contraction と flip との合成になってるようなものであって，X_r が “最も単純” すなわち，標準因子 K_{X_r} が nef であるか，森ファイブレーション $X_r \to Z$ が存在することを言う．実際には，双有理写像の列は，K-negative extremal ray contraction と呼ばれる，(-1)-曲線による縮小写像の一般化を用いて構成される．

* 東京大学数理科学研究科, teppei@ms.u-tokyo.ac.jp

ここで，flip の定義を復習する．

定義 1.2. $\psi_i : X_i \to Z_i$ を正規多様体の間の射影的双有理射とする．ψ が余次元 1 で同型とし，標準因子 K_{X_i} が $\mathbb{Q}$-Cartier で，$-K_{X_i}$ が ψ_i-ample であるとする．このような ψ_i を flipping contraction と呼ぶ (K-negative contraction が divisorial contraction でない場合，これらの条件が満たされる)．正規多様体の間の射影的双有理射 $\psi_i^+ : X_i^+ \to Z_i$ が ψ_i の flip であるとは，ψ_i^+ が余次元 1 で同型であり，$K_{X_i^+}$ が $\mathbb{Q}$-Cartier かつ ψ_i^+-ample であることを言う．双有理写像 $\phi_i := (\psi_i^+)^{-1} \circ \psi_i : X_i \dashrightarrow X_i^+$ のことも flip と呼ぶ．

flipping contraction に対して，flip は存在すれば一意であるが，その存在は非自明である．flip の存在と，

$$\bigoplus_m \psi_{i,*}\mathcal{O}_{X_i}(mK_{X_i})$$

の有限生成性が同値であることに注意する．

極小モデル理論について，以下の点に注意する．

注意 1.3.
- 極小モデル理論にはログ版が存在する．この場合，インプットとして (X, Δ) という，マイルドな特異点をもつ射影的多様体と有効 $\mathbb{Q}$-因子の組とが与えられ，標準因子 K_X のかわりに $K_X + \Delta$ を用いて，$(K_X + \Delta)$-negative extremal ray contraction を考える．
- 極小モデル理論には相対版が存在する．V を scheme とする．V 上の極小モデル理論においては，インプットとして V 上のマイルドな特異点を持つ射影的多様体が与えられ，相対標準因子 $K_{X/V}$ を用いて，$K_{X/V}$-negative extremal ray contraction を考える．特に V を $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ などの混標数の scheme とすることで，混標数の極小モデル理論を考えることができる．

三次元多様体の極小モデル理論については，以下の結果が知られている．

定理 1.4.
1. k を標数 0 および標数 $p \geq 5$ の代数閉体とする．このとき，三次元 dlt singularity についてログ極小モデル理論が回る (例えば標数 5 については [HW19b] 参照)．(log canonical singularity についても結果が知られている．[Fuj11], [HNT20] 参照．)
2. ([HW19a]) R を代数閉体 k 上 essentially of finite type な離散付値環，X が R 上強半安定還元な射影的多様体とする．この時，X について極小モデル理論が回る．

ここで，強半安定還元の定義を復習しておく．

定義 1.5. R を離散付値環，X を R 上 flat of finite type な整分離的 scheme とする．以下の条件が満たされるとき，X は R 上強半安定 scheme であるという．

1. 一般ファイバー X_K は滑らか (K は R の商体).
2. 特殊ファイバー X_k は幾何学的被約 (k は R の剰余体).
3. 特殊ファイバーの既約成分 $X_{k,i}$ $(i \in I)$ は X の Cartier 因子.
4. scheme$X_{k,i_1,\ldots,i_r} = X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_r}$ は k 上滑らかで等次元 $\dim X - r$ を持つ．ここで $X_{i_1}, \ldots, X_{i_r}$ は特殊ファイバーの相異なる既約成分である.

注意 1.6.

- さらに X が R 上固有の時，X が強半安定還元をを持つことと，以下の主張は同値である：
  特殊ファイバー X_k の任意の閉点 x に対して，ある $x \in X$ の開近傍で，ある m について
  $$\operatorname{Spec} R[T_1, \ldots, T_m]/(T_1 \cdots T_m - \varpi)$$
  上滑らかなものが存在する．ここで，ϖ は R の素元である.
- Dedekind 環 R および R 上 flat of finite type な整分離的 scheme$X$ に対しても，R の任意の閉点 $\mathfrak{p}$ における局所化 $X_{\mathfrak{p}}$ が $R_{\mathfrak{p}}$ 上強半安定還元の時，X は R 上強半安定 scheme であると呼ぶ.

本稿の主結果は，Hacon–Witaszek の結果 注意 1.4.2. を混標数化することである.

2 混標数極小モデル理論および主定理の紹介

R を混標数の excellent Dedekind 環とし，V を $\operatorname{Spec} R$ とする．以下，V 上正規整射影 scheme に対する極小モデル理論について考える．以下の結果が知られている.

定理 2.1.

1. ([Tan18]) X が 2 次元で log canonical singularity の時，極小モデル理論が回る．(実際はより一般の設定で相対ログ極小モデル理論が回ることを証明している．)
2. ([Kaw94], [Kaw99]) R において $2, 3$ が可逆かつ X が R 上強半安定 3 次元の時，極小モデル理論が回る.

定理 2.1.2 の証明は，plt singularity が index 1 cover で保たれることを示し，特異点の分類を利用した不変量を用いることでなされている．この証明において，剰余標数の仮定は本質的であることに注意する．私たちの主結果では，この剰余標数の仮定を無くすことに成功した.

定理 2.2 ([TY20])**.** X が R 上強半安定 3 次元の時，極小モデル理論が回る.

注意 2.3.

1. 論文の中ではより一般に，R 上 flat 準射影的な相対次元 2 の多様体 X および境界 Δ に対して以下の事実を証明している.

- (X, Δ) が $\mathbb{Q}$-factorial dlt singularity で境界 Δ の切り下げが特殊ファイバー X_s を含み，X が準射影的正規多様体 Z 上射影的な場合の，(X, Δ) の Z 上の相対ログ極小モデル理論 ($\Delta = X_s$ とすることで定理 2.2 が復元できる).
- 同様の状況での，relative canonical ring の有限生成性.
- (X, Δ) が $\mathbb{Q}$-factorial dlt singularity で，正規 $\mathbb{Q}$-factorial な Z 上射影双有理的かつ，例外因子が境界 Δ の切り下げに含まれるような場合の，(X, Δ) の Z 上の相対ログ極小モデル理論.

詳細は [TY20, Theorem 1.2, Section 6] を参照せよ.

2. 同時期に，私たちとは独立に 3 次元混標数極小モデルについての論文 Bhatt–Ma–Patakfalvi–Schwede–Tucker–Waldron–Witaszek ([BMP+20]) が発表された．[BMP+20] では，我々と類似した手法を用いて，剰余標数が 5 より大きい場合の極小モデル理論をより一般の特異点に対して証明している．またその後 [HW20] において，log resolution の存在を仮定した上で混標数 4-fold の極小モデル理論が議論されていることにも注意する.

以下では，私たちの結果の応用を紹介する.

系 2.4. $\mathcal{O}_K$ を Henselian 離散付値環，K をその商体とし，p をその剰余標数とする.

1. ([Mat15], [LM18]) X を K 上の K3 曲面で潜在的半安定還元を持つとする．すなわち，ある有限次体拡大 L/K が存在し，底変換 X_L が整数環 $\mathcal{O}_L$ 上の射影的強半安定モデルを持つとする．このとき，以下は同値.
   - K のある有限次不分岐拡大 K'/K が存在し，整数環 $\mathcal{O}_{K'}$ 上の固有滑らかな algebraic space $\mathcal{X}$ で，一般ファイバー $\mathcal{X}_{K'}$ が底変換 $X_{K'}$ と同型なものが存在する (すなわち，$X_{K'}$ は良還元を持つ).
   - ある素数 $\ell \nmid p$ についてエタールコホモロジー群 $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ に惰性群 I_K が自明に作用する (すなわち，$H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は不分岐表現になる).
2. ([CL16]) X を K 上のアーベル曲面とする．ある有限次分離拡大 L/K があり，底変換 X_L が整数環 $\mathcal{O}_L$ 上の射影的な combinatorial model をもつ．combinatorial model については [CL16] 参照．特にこのモデルは minimal strictly semi-stable な Néron model のコンパクト化になっている.

3 証明のスケッチ

この節では，定理 2.2 の証明の概略を紹介する．最初に，log resolution の存在 ([CP19], [CJS09]) が証明されていることに注意しておく．極小モデル理論は，大きく分けて以下の

三つの定理から成り立っている．

1. 錐定理および縮小定理
2. flip の存在定理
3. flip の停止定理

このうち 1. は K-negative extremal ray contraction の存在を保証する定理であり, [Kaw94] と同様の手法で証明される．また 3. は [KM98, Theorem 6.17] にある方法で証明される．したがって本稿では，2. の証明のスケッチを紹介する．

以下簡単のため，R は完備離散付値環の場合を考え，K を商体，k を剰余体とする．$V := \operatorname{Spec} R$ とおく．以下，V-多様体と呼べば，整 scheme で V 上 separated of finite type なものとする．また，V-多様体 X の V 上の relative dualizing sheaf を ω_V で表す．

$\psi : X \to Z$ を極小モデル理論にあらわれる flipping contraction とする．この時，以下のどちらかが成立する．

1. 特殊ファイバー X_k のある既約成分が ψ-anti ample である．
2. 特殊ファイバー X_k の任意の既約成分が ψ-numerically trivial である．

2. のケースは，[Fuj07] の議論により 1. のケースに帰着させることができる．そこで，1. のケースを考える．X_k が linearly trivial なことに注意すると，既約成分 $S, A \subset X_s$ で，S が ψ-anti ample (resp. A が ψ-ample) なものが取れる．したがって，ケース 1. での flip の存在は，以下の主張にまとめられる．

命題 3.1. [TY20, Corollary 3.33] $(X, S + A + B)$ を V 上相対次元 2 の dlt pair(準射影的 V-多様体と有効 $\mathbb{Q}$-Weil 因子の組で dlt 特異点を持つもの) とし，$f\colon X \to Z$ を，相対 Picard rank 1 の $(K_{X/V} + S + A + B)$-flipping contraction とする．S と A が局所既約 Weil 因子で，$-S$ および A が ample $\mathbb{Q}$-Cartier であると仮定する．このとき，f の flip が存在する．

Shokurov の議論 (例えば [Cor07, Lemma 2.3.6]) により，命題 3.1 は,

$$R_S(K_{X/V} + S + A + B) := \operatorname{Im}(R(K_{X/V} + S + A + B) \to R(K_{S/V} + A_S + B_S))$$

の有限生成性に帰着される．ここで，R は canonical ring を表す．例えば,

$$R(K_{X/V} + S + A + B) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(\mathcal{O}_X(m(K_{X/V} + S + A + B)))$$

である．また，A_S は A の制限，B_S は B の different([Kol13, Definition 4.2] 参照) である．S は 2 次元であったので，$R(K_{S/V} + A_S + B_S))$ は有限生成になる ([Tan18])．したがって，制限射

$$R(K_{X/V} + S + A + B) \to R(K_{S/V} + A_S + B_S)$$

が divisible enough degree で全射となっていることを見れば十分である．この問題はいわば section の lifting の問題とみなすことができる．

より簡単なモデルケースとして，以下の問題を考える．

問題 3.2. X を正規 Cohen–Macaulay V-多様体，Z を affine V-多様体，$\psi\colon X \to Z$ を V 上の射影的射とする．$S \subset X$ を正規 Cartier 素因子, L を $\mathbb{Q}$-Cartier Weil 因子とする．$A := L - (K_X + S)$ が Z 上 ample であることを仮定する．この時，制限射 $H^0(\mathcal{O}_X(L)) \to H^0(\mathcal{O}_S)(L|_S)$ は全射か？

簡単のため，まずは V が混標数でない場合に問題 3.2 を考える．

標数 0 の場合

完全列

$$0 \to \mathcal{O}_X(L-S) \to \mathcal{O}_X(L) \to \mathcal{O}_S(L|_S) \to 0$$

により，$H^1(\mathcal{O}_X(L-S)) = 0$ が言えれば十分なことがわかる．一方，$H^1(\mathcal{O}_X(L-S)) = H^1(\omega_X(A))$ なため，X が例えば klt singularity の時はこのコホモロジーは消滅する (小平消滅定理).

標数 p の場合

以下は Hacon–Witaszek([HW19a]) の方法である．$H^1(\mathcal{O}_X(L-S))$ は一般には消滅しないため，代わりに Frobenius 写像による vanishing を用いる．具体的には，Serre 消滅定理

$$H^1(\omega_X(p^eA)) = H^1(\omega_X(F^{e*}(A))) = 0 \tag{1}$$

が $e >> 0$ において成立することを用いる．ここで，可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F^e_*\omega_X(p^eA) & \longrightarrow & F^e_*\omega_X(p^eA+S) & \longrightarrow & F^e_*\omega_S(p^eA_S) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \omega_X(A) & \longrightarrow & \omega_X(A+S) & \longrightarrow & \omega_S(A_S) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

を考える．横の列は完全列であり，縦の射はトレース写像 $F^e_*\omega_X \to \omega_X$ から誘導されるものである．コホモロジーを取ることで,

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(\omega_X(p^eA+S)) & \longrightarrow & H^0(\omega_S(p^eA_S)) & \longrightarrow & H^1(\omega_X(p^eA)) = 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (*)} & & \downarrow \\
H^0(\omega_X(A+S)) & \longrightarrow & H^0(\omega_S(A_S)) & \longrightarrow & H^1(\omega_X(A))
\end{array}$$

を得る．横の列は完全列である．したがって，図式を追跡することで，問題 3.2 は $(*)$ の全射性に帰着される．一方，この全射性は，S が大域的 F-正則であれば成立する．実際，Hacon–Witaszek は，flipping contraction の境界に対して大域的 F-正則を確かめ，問題 3.2 の議論を行うことによって，flip の存在を証明している．

混標数の場合

標数 p の場合の証明を混標数化するためには，以下の二つの問題を解決する必要が生じる．

(a) Serre 消滅定理 (1) の混標数類似を証明する．

(b) 大域的 F-正則の混標数類似を定義し，flipping contraction の境界に対してその性質を確かめる．

(a) には，近年 Bhatt–Lurie, Bhatt により証明された，「up to alteration での小平消滅定理」を用いることができる．

定理 3.3 ([Bha20])**.** X を V 上の正規 flat Cohen–Macaulay V-多様体，Z を affine flat V-多様体，$\psi\colon X \to Z$ を V 上の射影的全射とする．D を semiample ψ-big 因子とする．このとき，ある alteration $\pi\colon Y \to X$ であって，トレース写像

$$H^i(\omega_Y(\psi^* D)) \to H^i(\omega_X(D))$$

が任意の $i > 0$ に対して零写像となる．

一方 (b) について，私たちは，下記の定義を与えた．

定義 3.4 ([TY20, Definition 3.9])**.** X を正規準射影的 V-多様体，Δ を有効 $\mathbb{Q}$-Weil 因子で $K_X + \Delta$ が $\mathbb{Q}$-Cartier になるものとする．$S := \lfloor \Delta \rfloor$ とおく．

- (X, Δ) が **大域的 T-正則**とは，任意の正規 scheme Y からの alteration $f\colon Y \to X$ に対して，トレース写像 $H^0(\omega_Y(\lceil -f^*(K_X + \Delta) \rceil)) \to H^0(\mathcal{O}_X)$ が全射になることをいう．
- (X, Δ) が **純大域的 T-正則**とは，任意の正規 scheme Y からの alteration $f\colon Y \to X$ および任意の素因子 $S_Y \subset Y$ で $f|_{S_Y} : S_Y \to S$ が alteration になるものに対して，トレース写像 $H^0(\omega_Y(S_Y + \lceil -f^*(K_X + \Delta) \rceil)) \to H^0(\mathcal{O}_X)$ が全射になることをいう．

注意 3.5. [BMP$^+$20] では，大域的 T-正則と深く関係した概念である大域的 $+$-正則が定義され，inversion of adjunction が証明されている．

この定義を用いて，標数 p の議論の類似をたどることで，以下の主張を得る．

命題 3.6 ([TY20, Theorem 3.29])**.** $(X, S + A + B)$ を V 上の (任意次元の)dlt pair(準射影的 V-多様体と有効 $\mathbb{Q}$-Weil 因子の組で dlt 特異点を持つもの) とし，$f\colon X \to Z$ を，相対 Picard rank 1 の $K_{X/V} + S + A + B$-flipping contraction とする．S と A が Weil 因子

で，$-S$ および A が ample $\mathbb{Q}$-Cartier であると仮定する．さらに，$(S^N, (1-\epsilon)A_S + B_S)$ が任意の $0 < \epsilon < 1$ に対して，$f(\mathrm{Exc}(f))$ の各点に局所化した時に大域的 T-正則であると仮定する．さらに，$R(K_{S^{N/V}} + A_S + B_S)$ が有限生成であると仮定する．ここで，B_S は different，A_S は制限とする．この時，f の flip が存在する．

命題 3.1 を証明するためには，S が 2 次元の状況で，具体的に大域的 T-正則を確かめなければならない．最後に，その証明において本質的な役割を果たす，inversion of adjunction を紹介する．

命題 3.7 (Adjunction, Inversion of adjunction)**.** (X, Δ) を V 上の log pair とする (すなわち，定義 3.4 の仮定を満たすとする)．さらに，X は affine V-多様体 Z 上射影的とする．$S := \lfloor \Delta \rfloor$, $B := \Delta - S$ とする．さらに，$X \to Z$ が連結ファイバーを持ち，Z が局所環のスペクトラムであり，S が被約かつ B と共通成分を持たず，$-(K_{X/V} + \Delta)$ は semi-ample かつ big とする．この時,

$$(S^N, B_{S^N}) \text{ は大域的 T-正則 } \Leftrightarrow (X, \Delta) \text{ は純大域的 T-正則 }.$$

が成立する．ここで，S^N は S の正規化 B_{S^N} は B の different である．

謝辞. 城崎代数幾何学シンポジウム 2021 の世話人の方々に感謝申し上げます.

参考文献

[Bha20] B. Bhatt, *Cohen-macaulayness of absolute integral closures*, preprint (2020), arXiv:2008.08070.

[BMP$^+$20] B. Bhatt, L. Ma, Z. Patakfalvi, K. Schwede, K. Tucker, J. Waldron, and J. Witaszek, *Globally +-regular varieties and the minimal model program for threefolds in mixed characteristic*, preprint (2020), arXiv:2012.15801.

[CJS09] V. Cossart, U. Jannsen, and S. Saito, *Canonical embedded and non-embedded resolution of singularities for excellent two-dimensional schemes*, preprint (2009), arXiv:0905.2191.

[CL16] B. Chiarellotto and C. Lazda, *Combinatorial degenerations of surfaces and Calabi-Yau threefolds*, Algebra Number Theory **10** (2016), no. 10, 2235–2266. MR 3582018

[Cor07] A. Corti, *3-fold flips after Shokurov*, Flips for 3-folds and 4-folds, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., vol. 35, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007, pp. 18–48. MR 2359340

[CP19] V. Cossart and O. Piltant, *Resolution of singularities of arithmetical threefolds*, J. Algebra **529** (2019), 268–535. MR 3942183

[Fuj07] O. Fujino, *Special termination and reduction to pl flips*, Flips for 3-folds and 4-folds, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., vol. 35, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007, pp. 63–75. MR 2359342

[Fuj11] ———, *Fundamental theorems for the log minimal model program*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **47** (2011), no. 3, 727–789. MR 2832805

[HNT20] K. Hashizume, Y. Nakamura, and H. Tanaka, *Minimal model program for log canonical threefolds in positive characteristic*, Math. Res. Lett. **27** (2020), no. 4, 1003–1054. MR 4216577

[HW19a] C. Hacon and J. Witaszek, *On the relative minimal model program for threefolds in low characteristics*, preprint, arXiv:1909.12872 (2019).

[HW19b] C. Hacon and J. Witaszek, *The Minimal Model Program for threefolds in characteristic five*, preprint (2019), arXiv:1911.12895.

[HW20] ———, *On the relative Minimal Model Program for fourfolds in positive and mixed characteristic*, preprint (2020), arXiv:2009.02631.

[Kaw94] Y. Kawamata, *Semistable minimal models of threefolds in positive or mixed characteristic*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 3, 463–491. MR 1269717

[Kaw99] ———, *Index 1 covers of log terminal surface singularities*, J. Algebraic Geom. **8** (1999), no. 3, 519–527. MR 1689354

[KM98] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original. MR 1658959

[Kol13] J. Kollár, *Singularities of the minimal model program*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 200, Cambridge University Press, Cambridge, 2013, With a collaboration of Sándor Kovács. MR 3057950

[LM18] C. Liedtke and Y. Matsumoto, *Good reduction of K3 surfaces*, Compos. Math. **154** (2018), no. 1, 1–35.

[Mat15] Y. Matsumoto, *Good reduction criterion for K3 surfaces*, Math. Z. **279** (2015), no. 1-2, 241–266. MR 3299851

[Tan18] H. Tanaka, *Minimal model program for excellent surfaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **68** (2018), no. 1, 345–376. MR 3795482

[TY20] T. Takamatsu and S. Yoshikawa, *Minimal model program for semi-stable threefolds in mixed characteristic*, preprint (2020), arXiv:2012.07324.