André–Oort 予想の最近の進展（企画サーベイ）

川口 周 *

このノートは 2021 年 10 月 25 日–10 月 29 日に行われた城崎代数幾何シンポジウム（オンライン）の企画サーベイ講演の報告で，講演スライドに基づいています．このような機会をくださった組織委員の田中公さん，古川勝久さん, 馬昭平さんに感謝します．以下の本文は,「である」調で書きます.

目次

* 同志社大学理工学部 kawaguch(())mail.doshisha.ac.jp
Partially supported by KAKENHI 18H01114 and 20H00111

1 はじめに

1.1 André–Oort 予想とは

André–Oort 予想 (1990 年頃の予想)**.** X を mixed 志村多様体，$V \subset X_{\mathbb{C}}$ を既約な部分代数多様体とする．このとき，V が special（4.1 節参照）な点を Zariski 稠密に含めば，V 自身が special（4.1 節参照）である．

André–Oort 予想は，André [An89] が X が pure 志村多様体で V が曲線のときに予想し，Oort [Oo94] が X が $\mathcal{A}_g$ のときに予想した．ここで，$\mathcal{A}_g$ は次元 g の主偏極アーベル多様体の粗モジュライ空間（すなわち，Siegel モジュラー多様体）を表す．

Edixhoven [Ed98] は，一般リーマン予想を仮定して（一般リーマン予想から導かれる effecctive な Cebotarev の密度定理を使って），X がモジュラー曲線の直積のときに André–Oort 予想を証明した．Klingler, Ullmo, Yafaev [KY14], [UY14a] は，一般リー

マン予想を仮定して，一般の mixed 志村多様体 X で André–Oort 予想を証明した．

一方，unconditional な結果として，André [An98] は X がモジュラー曲線の直積のときに André–Oort 予想を証明した．さらに，Pila [Pi11] は $X = \mathcal{A}_1{}^k \times \mathbb{G}_m^\ell$ の場合の unconditional な証明を与え，大きな注目を浴びた．Pila の証明は，いわゆる Pila–Zannier 戦略（Pila–Zannier strategy）に沿ったものだった．Tsimerman [Ts18] は，Pila–Zannier 戦略に沿って，$X = \mathcal{A}_g$ の場合の証明を与えた．

このサーベイ講演の前月（2021 年 9 月）には，Pila–Shankar–Tsimerman (appendix by Esnault–Groechenig) [PST21+] によって，一般の mixed 志村多様体 X での証明が発表された．（[PST21+] の内容には，私は触れることはできないが，p 進 Hodge 理論を用いて，$X = \mathcal{A}_g$ の場合に帰着しているようである．mixed 志村多様体の場合を pure 志村多様体の場合の評価に帰着させるのは，Gao [Ga16] による．）

1.2 このノートの内容と文献案内

Pila–Zannier 戦略は「代数多様体 V が special な点を Zariski 稠密に含めば，V 自身が special である」という主張の証明に有効なことが多い．

このノートの次節以降の内容は以下である．

2 節: special な点と special な代数多様体の，André–Oort 予想以外の例

3 節: Pila–Zannier 戦略を，$X = \mathcal{A}_1{}^2$ の場合の André–Oort 予想で紹介

4 節: $X = \mathcal{A}_g$ の場合の André–Oort 予想 (Tsimermen の定理)

5 節: 終わりに

このノートでは，André–Oort 予想と似た問題の紹介（2 節）と，André–Oort 予想に対する Pila–Zannier 戦略をなるべく簡単な場合に紹介すること（3 節）を目標にする．$X = \mathcal{A}_g$ の場合の André–Oort 予想 (Tsimermen の定理) については，4 節で簡単に説明する．

$X = \mathcal{A}_g$ の場合の André–Oort 予想 (Tsimermen の定理) や一般の場合の André–Oort 予想について詳しく解説したものに，Klingler–Ullmo–Yafaev [KUY18] によるサーベイがある．Pila–Zannier 戦略について，詳しく書かれたものに [JW15] がある．興味をもたれたら，[KUY18] や [JW15] を読まれたら良いのではと思う．（このノートの作成にも，[KUY18] と [JW15] を参考にした．）

1.3 Why me?

企画サーベイのテーマになぜ André–Oort 予想を選ばれて，その講演者になぜ私を選んで下さったか分からないが（光栄で，とてもありがたい），

- Pila–Zannier 戦略については，とても興味を持って，2014 年に学んだことがある．そのときは, 私は京大にいて, 4 回生 (当時) と一緒に, van-den Dries の o-minimal 構造の教科書 [vdD98], Pila–Wilkie の数え上げ定理の論文 [PW06], Pila–Zannier の論文 [PZ08] を 1 年かけて読んだ.
- 2018 年から 1 年半，同志社の在外研究で Oxford 大学に滞在した．その機会を利用して，Oxford 大学にいる Pila 先生に André–Oort 予想について質問して，少し教えてもらった.

しかし，私は，André–Oort 予想関連の研究はないことを断っておく.

2 special な点と special な代数多様体の，André–Oort 予想以外の例

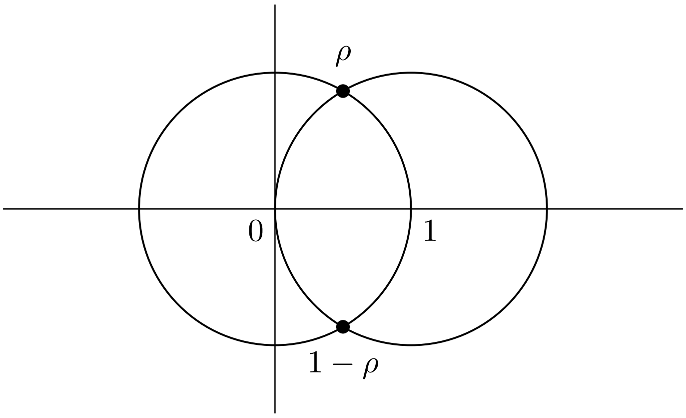
2.1 ウォーミングアップ

$\boldsymbol{\mu} := \{1$ のべき根 $\} \subset \mathbb{C}^\times$ とおく.

問 2.1 (toy question)**.** $(\mathbb{C}^\times)^2$ の曲線 $V(x+y=1)$ と $V(xy=1)$ を考え，それぞれの曲線上に 1 のべき根の対がどれだけのっているかを考えよう.

(1) $\#\{(x,y) \in \boldsymbol{\mu}^2 \mid x+y=1\}$?
(2) $\#\{(x,y) \in \boldsymbol{\mu}^2 \mid xy=1\}$?

解答: (1) $x \in \boldsymbol{\mu}$ かつ $x-1=-y \in \boldsymbol{\mu}$ である．$\rho = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく．特に，$|x|=1$ かつ $|x-1|=1$ となるので，複素平面で原点中心の半径 1 の円と 1 中心の半径 1 の円の共通部分を考えて，$x=\rho, 1-\rho$ となる．よって，$(x,y)=(\rho,1-\rho),(1-\rho,\rho)$ なので，$\#\{(x,y) \in \boldsymbol{\mu}^2 \mid x+y=1\} = 2 < \infty$ である.



(2) $\#\{(x,y)\in\boldsymbol{\mu}^2 \mid xy=1\} = \#\{(\epsilon,\epsilon^{-1}) \mid \epsilon\in\boldsymbol{\mu}\} = \infty$ である． □

問 2.2. $\Gamma := \langle 2,3\rangle \times \boldsymbol{\mu} = \{2^m 3^n \epsilon \mid m,n\in\mathbb{Z}, \epsilon\in\boldsymbol{\mu}\} \subset \mathbb{C}^\times$ とおく．$\#\{(x,y)\in\Gamma^2 \mid x+y=1\}$?*1

(1)(2) の違いは，どこから来るのだろうか．$(\mathbb{C}^\times)^2$ は乗法群で，$V(x+y=1)$ は部分群ではないが，$V(xy=1)$ は部分群である．

2.2 複素トーラスに対する Lang 予想（Laurent の定理 [La84]）

$(\mathbb{C}^\times)^k$ を複素トーラスとする．$(\mathbb{C}^\times)^k$ は $\mathbb{C}^\times$ の通常の乗法に関して群多様体である．$(\mathbb{C}^\times)^k$ の既約な代数的部分群を，部分トーラスという．

定義 2.3 (複素トーラスにおける special)**.** (1) 点 $P\in(\mathbb{C}^\times)^k$ が *special* であるとは，$P\in\boldsymbol{\mu}^k$ のときにいう．すなわち，$(\mathbb{C}^\times)^k$ の群の演算に関して，P の位数が有限であるときに，P は special な点であるという．

(2) 既約な部分代数多様体 $V\subset(\mathbb{C}^\times)^k$ が *special* であるとは，$(\mathbb{C}^\times)^k$ の部分トーラス T と $c\in\boldsymbol{\mu}^k$ が存在して，$V=cT$ と表されるときにいう．（$\dim V=0$ のときは，この定義は (1) と同じである．）

例 2.4. $k=2$ とする．$V(x+y=1)\subset(\mathbb{C}^\times)^2$ は special でない．一方，$V(xy=1)\subset(\mathbb{C}^\times)^2$ は special である．

複素トーラスに対する「代数多様体 V が special な点を Zariski 稠密に含めば，V 自

*1 講演では，「聞くのに疲れたらどうぞ」と言ったが，ここでは，「読むのに疲れたらどうぞ」．なお，一般論から，個数が有限であることは分かっている（例えば，[La84]）．答えは，5.5 節に．

身が special である」という主張は，Laurent の定理 [La84] である．（$\dim V = 1$ のときは，伊原，Serre，Lang [La65] による．）

定理 2.5 (複素トーラスに対する Lang 予想（Laurent の定理 [La84]）)**.** $V \subset (\mathbb{C}^\times)^k$ を既約な部分代数多様体とする．このとき，V が *special* な点を *Zariski* 稠密に含めば，V 自身が *special* である．

例えば，$k = 2$ とする．$V(x + y = 1) \subset (\mathbb{C}^\times)^2$ は special でないから，定理 2.5 の対偶によって，$(\mathbb{C}^\times)^2$ の曲線 $x + y = 1$ 上には special な点（= 1 のべき根の組）は有限個しかのっていないことが分かる．問 2.1 (1) でみたように，実際には 2 個で，確かに有限個である．一方，$V(xy = 1)$ は，問 2.1 (2) でみたように，special な点（= 1 のべき根の組）を Zariski 稠密に含み，$V(xy = 1)$ 自身は確かに special である．

2.3 アーベル多様体の Manin–Mumford 予想と Lang 予想（Raynaud の定理 [Ra83]）

アーベル多様体に対する「代数多様体 V が special な点を Zariski 稠密に含めば，V 自身が special である」という主張は，$\dim V = 1$ のときは Manin–Mumford 予想とよばれ，一般の次元のときは（アーベル多様体に対する）Lang 予想とよばれる．これは Raynaud [Ra83] によって証明された．

アーベル多様体に対する special の定義は，複素トーラスの場合と同様である．複素トーラスの群演算を，アーベル多様体の群演算に変えればよい．

定義 2.6 (アーベル多様体における special)**.** A を $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体とする．

(1) 点 $P \in A(\mathbb{C})$ が *special* であるとは，P が torsion 点のときにいう．すなわち，A の群の演算に関して，P の位数が有限であるときに，P は special な点であるという．

(2) 既約な部分代数多様体 $V \subset A$ が *special* であるとは，A の部分アーベル多様体 B と torsion 点 t が存在して，$V = t + B$ と表されるときにいう．（$\dim V = 0$ のときは，この定義は (1) と同じである．）

定理 2.7 (アーベル多様体に対する Manin–Mumford 予想，Lang 予想（Raynaud の定理 [Ra83]）)**.** A を $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体，$V \subset A$ を既約な部分代数多様体とする．このとき，V が *special* な点を *Zariski* 稠密に含めば，V 自身が *special* である．

2.4 まとめと補足

まとめ: André–Oort 予想, 複素トーラスに対する Lang 予想, アーベル多様体に対する Manin–Mumford 予想と Lang 予想はいずれも,「代数多様体 V が special な点を Zariski 稠密に含めば, V 自身が special である」という主張である.

以下に，4 つほど補足したい.

(補足 1) special な点の条件を，弱められる場合もある．アーベル多様体のときを考えよう．A を $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体とする.

- A の torsion 点全体の集合 $A(\mathbb{C})_{\mathrm{tors}}$ は，$A(\mathbb{C})$ の部分群で，$A(\mathbb{C})_{\mathrm{tors}} \otimes \mathbb{Q} = 0$ である．そこで，$A(\mathbb{C})_{\mathrm{tors}}$ のかわりに，$A(\mathbb{C})$ の**部分群** Γ で，$\Gamma \otimes \mathbb{Q}$ が有限階数であるものを考える．このとき，既約な部分代数多様体 $V \subset A$ に対して，$V \cap \Gamma$ が V で Zariski 稠密ならば，V は special（つまり，定義 2.6 の $t + B$ の形）になる（McQuillan [Mc95]）.
- A は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上に定義されていると仮定する．このとき，A の torsion 点は Néron–Tate 高さが 0 の点である．そこで，torsion 点のかわりに，Néron–Tate 高さが小さい点を考える．大雑把にいって，***Bogomolov* 予想**とは，既約な部分代数多様体 $V \subset A$ が Néron–Tate 高さが小さい点を Zariski 稠密に含めば，V は special（つまり，定義 2.6 の $t + B$ の形）になるという主張である．Bogomolov 予想は Ullmo [Ul98]（$\dim V = 1$ のとき）と Zhang [Zh98]（$\dim V$ が一般のとき）によって，証明された.

(補足 2) アーベル多様体の Manin–Mumford 予想，Lang 予想の周辺では，最近も大きな進展がある.

- (補足 1) の後半で述べた Bogomolov 予想で，定義体 $\overline{\mathbb{Q}}$ を関数体に変えたものを**幾何学的 *Bogomolov* 予想**という．幾何学的 Bogomolov 予想は，Gubler [Gu07]（totally degenerate な reduction をもつ場合）, Cinkir [Ci11]（標数 0 で，$\dim V = 1$），山木 [Ya17], [Ya18]（任意標数．good reduction の場合への帰着と，$\dim V = 1$ と $\operatorname{codim} V = 1$ のとき），Gao–Habegger [GH19]，Cantat–Gao–Habegger–Xie [CGHX21]（標数 0 のときで，o-minimal 構造と Betti 写像を使う）と大きく進展し，今年の 8 月に，Xie–Yuan [XY21+] は任意標数で幾何学的 Bogomolov 予想の証明を発表した.

- Faltings の定理（Mordell 予想）は，代数体 K 上に定義された種数 $g \geq 2$ の曲線 C に対して，$\#C(K)$ が有限であるという定理である．*uniform* **な** *Modell* **予想**（$\#C(K)$ を g と $[K\colon \mathbb{Q}]$ と C の Jacobi 多様体 J に対する $\mathrm{rk}\, J(K)$ のみによる定数でおさえる）について，DeMarco–Krieger–Ye [DKY20]（$g = 2$ のとき，数論力学系を使う），Dimitrov-Gao-Habegger [DGH21]（一般の g で，証明の一部に o-minimal 構造と Betti 写像を使う），Kühne [Ku21+], Yuan [Yu21+] などと大きな進展があった．

これらの話題は，5.2 節でも少し触れる．

(補足 3) Manin–Mumford 予想と André–Oort 予想の両方の一般化に *Zilber–Pink* **予想**とよばれる予想がある．Zilber–Pink 予想の解説として [Ul17] がある．

(補足 4) 「代数多様体 V が special な点を Zariski 稠密に含めば，V 自身が special である」という主張は，何が special であるかさえ定義すれば，正しいか正しくないか（あるいは，難しいか易しいか）は別として，常に考えることができる．

- X を $\mathbb{C}$ 上に定義された代数多様体とする．例えば，X の既約な部分代数多様体 V が special であるというのを，V が $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義されることで，定めてみよう．このとき，V が $\overline{\mathbb{Q}}$ 点（今の定義では，special な点）を Zariski 稠密に含めば，V は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義される（今の定義では，special な部分多様体）という主張は正しいが，$V = \overline{V \cap X(\overline{\mathbb{Q}})}^{\mathrm{Zar}}$ なので当たり前である．したがって，special をこのように定義しても面白くない．
- Baker–DeMarco [BD13, Conj. 1.10] は**力学系** *André–Oort* **予想**をたてた．ここでは，入れ物 X として，次数 d の $\mathbb{P}^1$ の自己射のモジュライ $\mathrm{M}_d := \{f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \mid \deg f = d\}/(\text{conjugation})$ をとる．そして，$f \in \mathrm{M}_d$ が special であることを，f は post-critically finite であることで定義する． 力学系 André–Oort 予想は，M_d の曲線が special な点を無限に含むとき，その曲線はどんなものかを問うている．

3 Pila–Zannier 戦略を，${\mathcal{A}_1}^2$ の André–Oort 予想（André の定理）で紹介

3.1 $X = {\mathcal{A}_1}^2$ の André–Oort 予想（André の定理）

$X = {\mathcal{A}_1}^2$ の場合の André–Oort 予想（André の定理）を Pila–Zannier の戦略で証明したい．まず，André の定理を述べる前に，楕円曲線などについて，記号などをまとめておく．詳しくは，例えば [Si94, Chap. II] を参照してほしい．

$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$ を複素上半平面とする．$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) := \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \mid ad - bc > 0\right\}$ とおく．$g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ と $\tau \in \mathbb{H}$ に対して，$g \cdot \tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ と定めることで，$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{H}$ に作用する．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ なので，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ も $\mathbb{H}$ に作用する．

$\tau \in \mathbb{H}$ に対応する楕円曲線を $E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ とおく．$\mathcal{A}_1(\mathbb{C}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ を商空間とする．$\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ に対して，$\tau' = g \cdot \tau$（$\exists g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$）であることと，楕円曲線 $E_{\tau'}$ と E_τ が同型であることが同値である．よって，$\mathcal{A}_1(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線の同型類の粗モジュライである．

楕円モジュラー関数 $j \colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ は，

$$j(\tau) = 1728 \frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27 g_3(\tau)^2} = e^{-2\pi i\tau} + 744 + 196884\, e^{2\pi i\tau} + \cdots$$

で定められる正則写像である．ただし，ここで，$g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m + n\tau)^{-4}$，$g_3(\tau) = 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m + n\tau)^{-6}$ である．j 関数は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 不変で，解析同型 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ を導く．

$x \in \mathcal{A}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ に対して，$j(\tau) = x$ となる $\tau \in \mathbb{H}$ を一つとり，楕円曲線 $E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ を考える．x が CM 点であるとは，E_τ が *CM*（**虚数乗法**）をもつ，すなわち，$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{End}(E_\tau) \otimes \mathbb{Q} = \dim \mathbb{Q}(\tau) = 2$ であるときにいう．虚数乗法論より，このとき，$x = j(\tau)$ は代数的数である（さらに強く，$j(\tau)$ は代数的整数である）．

$g \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ に対して，適当にスカラー倍をして g の各成分が整数でそれらの最大公約数が 1 であるようにする．このときの行列の行列式を $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とおく．このとき，$\Phi_N \in \mathbb{Z}[X, Y]$（レベル N のモジュラー多項式とよばれる）が存在して，

$$\Phi_N(j(\tau), j(g \cdot \tau)) = 0 \quad (\tau \in \mathbb{H})$$

が成り立つ．なお，$\Phi_1(X,Y)=X-Y$ だが，$\Phi_2(X,Y)$ は

$$\begin{aligned}\Phi_2(X,Y)=&-X^2Y^2+X^3+Y^3+2^4\cdot 3\cdot 31\cdot XY(X+Y)+3^4\cdot 5^3\cdot 4027\cdot XY\\&-2^4\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot(X^2+Y^2)+2^8\cdot 3^7\cdot 5^6\cdot(X+Y)-2^{12}\cdot 3^9\cdot 5^9\end{aligned}$$

（例えば，[Si94, Example 6.3.2] 参照）とかなり複雑である．Φ_N が定める $\mathbb{C}^2$ 内の代数曲線を T_N とおく．

$\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^2=\mathbb{C}^2$ の点 (x_1,x_2) が CM 点であるとは，$x_1,x_2\in\mathcal{A}_1(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ がともに CM 点であるときにいう．以上の準備のもとに，$X={\mathcal{A}_1}^2$ の場合の André–Oort 予想（André の定理）を述べる．

定理 3.1 ($X={\mathcal{A}_1}^2$ の場合の André–Oort 予想，André [An98])**.** *$V\subset\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^2=\mathbb{C}^2$ を既約代数曲線とする．V は CM 点を無数に含むと仮定する．このとき，V は，ある $x_1\in\mathbb{C}$ が存在して $V=\{x_1\}\times\mathbb{C}$，または，ある $x_2\in\mathbb{C}$ が存在して $V=\mathbb{C}\times\{x_2\}$，または，ある $N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $V=T_N$ の形である．*

注意 3.2. 定理 3.1 では，$\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^2=\mathbb{C}^2$ の点が special であることを，CM 点であることで定義している．また，$\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^2=\mathbb{C}^2$ の既約曲線 V が special であることを，V が直積型か T_N の形であることで定義している．曲線が special であることの定義は，やや唐突に見えるかもしれないが，4.1 節で，この定義が自然であることに触れる．

André は定理 3.1 を Puiseux 級数を使って証明した．以下では，Pila–Zannier の戦略の紹介を目標に，定理 3.1 を Pila–Zannier の戦略（[Pi11] の $k=2$ の場合）によって証明する．

3.2 Pila–Zannier 戦略とは

Pila–Zannier 戦略（Pila–Zannier strategy）は，代数多様体の代数点分布の研究（Diophantus 幾何の研究）における比較的新しいアプローチ（Pila–Zannier の 2008 年の論文 [PZ08] から始まる）で，超越的ではあるが扱いやすい構造（o-minimal 構造，tame geometry）を用いる．1.2 節でも述べたが，この戦略は，「代数多様体 V が special な点を Zariski 稠密に含めば，V 自身が special である」という主張の証明に有効なことが多い．

Pila–Zannier [PZ08] は，この戦略によって，Manin–Mumford 予想（Raynaud の定理）（定理 2.7）の別証明を与えた．この戦略で，Laurent の定理（定理 2.5）の別証明も与

えることができる（[Pi11]）．さらに，この戦略は，このノートの主題である André–Oort 予想にも有効である．

Pila–Zannier 戦略は，大きく 3 つの要素からなる．

(PZ1) bi-algebraic geometry と o-minimal 構造，有理点の数え上げ定理（Pila–Wilkie）
(PZ2) 関数の超越性定理（“Ax–Lindemann”）
(PZ3) special な点の Galois 軌道の個数の下からの評価

以下では，(PZ1), (PZ2), (PZ3) について説明して，定理 3.1 の証明を述べたい．

3.3 (PZ1) bi-algebraic geometry と o-minimal 構造，有理点の数え上げ定理（Pila–Wilkie）

3.3.1 o-minimal 構造とは（ざっくりと）

o-minimal 構造について，ざっくりと説明する．詳しくは，例えば，[vdD98] を参照してほしい．o-minimal は order minimal（順序極小）を略した書き方である．

constructible 集合族

まずは，複素代数幾何でよく出てくる constructible 集合族がどのようなものだったか復習しよう．詳しくは，例えば，[Ma80, Chap. 2, §6] を参照してほしい．

k を非負整数とする．$\mathbb{C}^k$ の代数的集合（すなわち，Zariski 閉集合）のブール結合（$\cup, \cap$ と補集合をとる操作を有限回繰り返してできる集合）を $\mathbb{C}^k$ の *constructible* **集合**といった．$\mathcal{C}_k = \{Z \mid Z$ は $\mathbb{C}^k$ の constructible 集合 $\}$ とおけば，$\mathcal{C}_k$ は次の条件で特徴づけられる．

(1) $\mathbb{C}^k$ の任意の代数的集合（すなわち，Zariski 閉集合）は，$\mathcal{C}_k$ に属する．
(2) $Z \in \mathcal{C}_k$ ならば，$(\mathbb{C}^k \setminus Z) \in \mathcal{C}_k$．
(3) $Z, Z' \in \mathcal{C}_k$ ならば，$Z \cup Z' \in \mathcal{C}_k$ であり，$Z \cap Z' \in \mathcal{C}_k$ である．
(4) $\mathcal{C}_k$ は (1)(2)(3) の性質をもつ部分集合族の中で最小のものである．

$\mathcal{C} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{C}_k$ とおく．$\mathcal{C}$ は k も動かしたときの constructible 集合全体からなる集合族である．このとき，$\mathcal{C}$ は直積をとる操作で閉じている．すなわち，k, ℓ を非負整数とするとき，

$$Z \in \mathcal{C}_k \text{ かつ } Z' \in \mathcal{C}_\ell \text{ ならば，} Z \times Z' \in \mathcal{C}_{k+\ell}$$

である．さらに，次の Chevalley の定理より，$\mathcal{C}$ は射影で閉じている．

定理 3.3 (Chevalley)**.** k, ℓ を非負整数とし，$\mathrm{pr}^{k+\ell}_k \colon \mathbb{C}^{k+\ell} \to \mathbb{C}^k$ を，最初の k 個の成分への射影とする．このとき，任意の $Z \in \mathcal{C}_{k+\ell}$ に対して，$\mathrm{pr}^{k+\ell}_k(Z) \in \mathcal{C}_k$ である．

semi-algebraic 集合族

実代数幾何における, $\mathbb{R}^k$ の semi-algebraic 集合は, $\mathbb{C}^k$ の constructible 集合と同様に構成できる．（ただし，algebraic（代数的）集合 $\{a \mid P(a) = 0\}$ ではなくて，$\{a \mid P(a) > 0\}$ から始める．このため，semi-algebraic（半代数的）とよばれる．）

k を非負整数とする．$\mathbb{R}^k$ の部分集合 A が**基本** ***semi-algebraic*** **集合**であるとは，多項式 $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_k]$ が存在して，$A = \{a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid P(a_1, \ldots, a_k) > 0\}$ となるときにいう．

$\mathbb{R}^k$ の基本 semi-algebraic 集合のブール結合（$\cup, \cap$ と補集合をとる操作を有限回繰り返してできる集合）を $\mathbb{R}^k$ の *semi-algebraic* **集合**という．$\mathcal{A}_k = \{A \mid$ A は $\mathbb{R}^k$ の semi-algebraic 集合 $\}$ とおけば，$\mathcal{A}_k$ は次の条件で特徴づけられる．

(1) $\mathbb{R}^k$ の任意の基本 semi-algebraic 集合は，$\mathcal{A}_k$ に属する．
(2) $A \in \mathcal{A}_k$ ならば，$(\mathbb{R}^k \setminus A) \in \mathcal{A}_k$．
(3) $A, A' \in \mathcal{A}_k$ ならば，$A \cup A' \in \mathcal{A}_k$ であり，$A \cap A' \in \mathcal{A}_k$ である．
(4) $\mathcal{A}_k$ は (1)(2)(3) の性質をもつ部分集合族の中で最小のものである．

$\mathcal{A} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{A}_k$ とおく．$\mathcal{A}$ は k も動かしたときの semi-algebraic 集合全体からなる集合族である．このとき，$\mathcal{A}$ は直積をとる操作で閉じている．すなわち，k, ℓ を非負整数とするとき，

$$A \in \mathcal{A}_k \text{ かつ } A' \in \mathcal{A}_\ell \text{ ならば，} A \times A' \in \mathcal{A}_{k+\ell}$$

さらに，次のように，$\mathcal{A}$ は射影で閉じている（$\mathbb{C}^k$ の Chevalley の定理の類似）．

定理 3.4 (Tarski–Seidenberg，例えば [vdD98, Chapter 2] 参照)**.** k, ℓ を非負整数とし，$\mathrm{pr}^{k+\ell}_k \colon \mathbb{R}^{k+\ell} \to \mathbb{R}^k$ を，最初の k 個の成分への射影とする．このとき，任意の $A \in \mathcal{A}_{k+\ell}$ に対して，$\mathrm{pr}^{k+\ell}_k(A) \in \mathcal{A}_k$ である．

$\mathcal{A}_1$ はどのような集合族かみてみよう．$P[X]$ を一変数多項式とすると，$\{a \in \mathbb{R} \mid P(a) > 0\}$ は $\mathbb{R}$ の開区間の有限個の和（union）になっている（空集合の場合も含める）．一方で，閉区間 $[a, b]$ は，$\{a\} \cup (a, b) \cup \{b\}$ とみれば，2 点 $a, b \in \mathbb{R}$ と開区間 (a, b) の和になっている．従って，次が成り立つことが分かる．

補題 3.5. $A \in \mathcal{A}_1$ であることと，A が $\mathbb{R}$ の有限個の開区間と有限個の点の和（*union*）であることは同値である．

$\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ **の定義可能集合族**

Pila–Zannier 戦略では, semi-algebraic 集合族 $\mathcal{A}$ を含む集合族で, 扱いやすい（“tame” な）集合族が必要になる．そのような集合族に，$\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ の定義可能集合族がある．以下では，これについて説明する．

まず，**制限解析関数**（*restricted analytic function*）を定義する．おおざっぱにいうと，制限解析関数は実解析関数の定義域をコンパクト集合に制限した関数のことである．正確な定義は以下である．

定義 3.6. $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ が制限解析関数であるとは，$\mathbb{R}^k$ のコンパクト集合 K と K を含む開集合上で定義された実解析関数 g が存在して，

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \in K \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin K \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるときにいう．

大雑把に述べると，$\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ **の定義可能集合**族 $\mathcal{S} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{S}_k$ とは，実係数多項式と（大域的な）exp 関数とすべての制限解析関数を組み合わせて作られる関数 φ から定まる集合 $\{a \mid \varphi(a) > 0\}$ を含み，ブール結合（$\cup, \cap$ と補集合をとる操作を有限回繰り返してできる集合）と直積をとる操作と射影をとる操作で閉じている最小の集合族のことである．

より正確には，1 階言語 $L = (+, \times, <, \exp, \{f_i\}_{i \in I})$（ただし，$\{f_i\}$ は任意の $k \geq 0$ と $\mathbb{R}^k$ 上の任意の制限解析関数に対応する関数記号）の自然な L 構造

$$\langle \mathbb{R}; +, \times, <, \exp, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$$

を考え，$\phi(x_1, \ldots, x_k)$ を論理式（有限個の変数と，論理結合子と，$\forall$ と $\exists$ と，$+, \times, \exp$ と有限個の f_i と有限個の実数 $a \in \mathbb{R}$（パラメータ）を組み合わせてできる式）とするときに，

$$\{(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid \phi(a_1, \ldots, a_k) \text{ は } \mathbb{R} \text{ で真 }\}$$

で定義される集合が，$\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ の定義可能集合である．

$\mathcal{S}_1$ がどのような集合族かを考えてみよう．定義から，$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{S}_1$ である．$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が 1 変数の制限解析関数とすると，f は $\mathbb{R}$ のあるコンパクト集合の外では恒等的に 0 なの

で，$\{a \in \mathbb{R} \mid f(a) > 0\}$ は有限個の開区間と有限個の点の和（union）である．よって，$\{a \in \mathbb{R} \mid f(a) > 0\} \in \mathcal{A}_1$ である．しかし，$\mathcal{S}_1$ には $\mathcal{S}_k$（$k \geq 2$）からの射影も入るので，$\mathcal{S}_1$ がどのような集合族かは難しい．実は，$\mathcal{S}_1 = \mathcal{A}_1$ であることを van den Dries–Miller は証明した．

定理 3.7 (van den Dries–Miller [vdDM85])**.** $\mathcal{S}_1 = \mathcal{A}_1$ である．すなわち，$S \in \mathcal{S}_1$ であることと，S が $\mathbb{R}$ の有限個の開区間と有限個の点の和（*union*）であることは同値である．

一般に，semi-algebraic 集合族 $\mathcal{A}$ を含む集合族 $\mathcal{D} = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{D}_k$ で，ブール結合（$\cup, \cap$ と補集合をとる操作を有限回繰り返してできる集合）と直積をとる操作と射影をとる操作で閉じていて，さらに，$\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}_1$ であるものを，（semi-algebraic 集合族を拡大した）*o-minimal* **構造**という．補題 3.5 と定理 3.7 より，semi-algebraic 集合族 $\mathcal{A}$ と $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ の定義可能集合族 $\mathcal{S}$ は o-minimal 構造である．

注意 3.8. （大域的な）sin 関数については，$\{a \in \mathbb{R} \mid \sin(a) > 0\}$ は可算無限個の開区間の和になる．よって，多項式に（大域的な）sin 関数を付け加えて o-minimal 構造を作ることはできない．しかし，sin 関数をコンパクト集合に制限すれば，定理 3.7 で示されたように o-minimal 構造を作ることができる．

o-minimal 構造 $\mathcal{D} = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{D}_k$ は扱いやすい（“tame” な）性質をもつ．例えば，$D \in \mathcal{D}$ とするとき，D をセル分解することができ，D の次元や Euler 数を定義することができる（例えば，[vdD98, Chapter 2] 参照）．以下で，semi-algebraic な曲線という言葉が出てくるが，これは semi-algebraic 集合で次元が 1 という意味である．

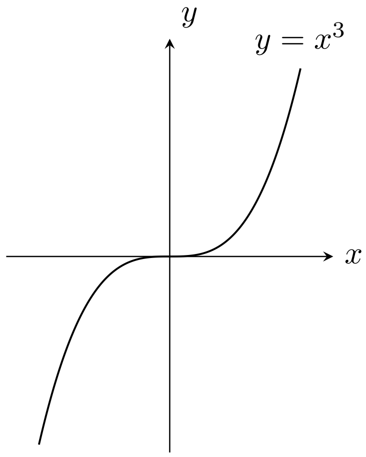
3.3.2 有理点の数え上げ定理 (Pila–Wilkie)

有理数 r に対して，$r = p/q$（既約分数表示）と書いて，その**高さ**（*height*）$H(r)$ を，$H(r) = \max\{|p|, |q|\}$ で定める．有理数の組 $r = (r_1, \ldots, r_k) \in \mathbb{Q}^k$ については，その高さを $H(r) = \max_i\{H(r_i)\}$ で定める．このノートでは説明しないが，$\overline{\mathbb{Q}}^k$ の元についても，その高さが定義できる．

例 3.9. $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}$ を考える．A は semi-algebraic な曲線である．A 上には有理点が無数にのっているが，これらを高さに関して漸近的に評価してみよう．すなわち，n を正の整数として，$n \to \infty$ のときに，

$$\#\{r \in A \cap \mathbb{Q}^2 \mid H(r) \leq n\}$$

を評価する．



$r \in A \cap \mathbb{Q}^2$ なので，$r = (p/q, p^3/q^3)$（p, q は整数で互いに素，$q > 0$）とおける．このとき，$H(r) \leq n$ は，$|p|^3 \leq n$ かつ $q^3 \leq n$ と同値である．A 上に有理点がたくさんののっていることを示したい（下からの評価を考えたい）．そこで，大雑把に $r \in A \cap \mathbb{Z}^2$ のときだけを考える（つまり，$p/q \in \mathbb{Z}$ のときだけを考える）と，$q = 1$ で $|p|^3 \leq n$ であればよいから，このような p は $2\lfloor n^{\frac{1}{3}} \rfloor + 1$ 個ある．これから，A に依存するが n には依存しない正の定数 C が存在して，任意の正の整数 n に対して，

$$\#\{r \in A \cap \mathbb{Q}^2 \mid H(r) \leq n\} > Cn^{\frac{1}{3}}$$

が成り立つことが分かる[*2]．曲線 $y = x^3$ の代わりに曲線 $y = x^m$（m は正の整数）を考えると，上で $Cn^{\frac{1}{3}}$ の代わりに $Cn^{\frac{1}{m}}$ に変えた評価が成り立つ．

例 3.9 は，semi-algebraic な曲線上には一般にはたくさんの有理点がのりえることをいっている．また，（有界な範囲で定義された）超越的な曲線でも，一般には，有理点が無数にのっていることがある（例えば [Pi04, Example 7.5] 参照）．しかし，次で説明する Pila–Wilkie の数え上げ定理は，有理点を高さに関して漸近的に評価するとき，超越的な（semi-algebraic な曲線を含まない）集合上には有理点は少ししかのっていない（任意の正の整数 m に対して，オーダーが $n^{\frac{1}{m}}$ より小さい）ことを示している．

定理 3.10 (Pila–Wilkie [PW06])**.** *$S \subset \mathbb{R}^k$ を $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ の（より一般に，semi-algebraic 集合族を拡大した任意の o-minimal 構造の）定義可能集合とする．S は semi-algebraic な曲線を含まないと仮定する．$\epsilon > 0$ を任意の正数とする．このとき，任意の正の整数 n*

[*2] もう少し丁寧に評価するとオーダーが $n^{\frac{2}{3}}$ であること，すなわち，正の定数 C_1, C_2 が存在して，$C_1 n^{\frac{2}{3}} \geq \#\{r \in A \cap \mathbb{Q}^2 \mid H(r) \leq n\} \geq C_2 n^{\frac{2}{3}}$ であることが分かる．

に対して，

$$\#\{r \in S \cap \mathbb{Q}^k \mid H(r) \le n\} \le C(S,\epsilon)\, n^{\epsilon}$$

が成り立つ．ただし，$C(S,\epsilon)$ は ϵ と S には依存するかもしれないが，n には依存しない正の定数である．

注意 3.11. もっと一般に，有理数でなく代数的数についても，任意の正数 $\epsilon > 0$ と正の整数 d に対して，$\#\{r \in S \cap \overline{\mathbb{Q}}^k \mid [\mathbb{Q}(r)\colon \mathbb{Q}] \le d,\ H(r) \le n\} \le C(S,\epsilon,d)\, n^{\epsilon}$ が成り立つ（[Pi09]）．

Pila–Wilkie は，定義可能写像の C^r-smooth parametrizations をすることで，定理 3.10 を証明している．1.3 節に書いたように，私は 2014 年に 4 回生と一緒に [PW06] を読んでいて，議論は技術的だが比較的初等的といってもよいと思った．なお，Binyamini–Novikov [BN17] は S が subanalytic 集合のときに，C^r-smooth parametrizations を使わない Pila–Wilkie の定理の証明を与えている．

3.3.3 bi-algebraic geometry

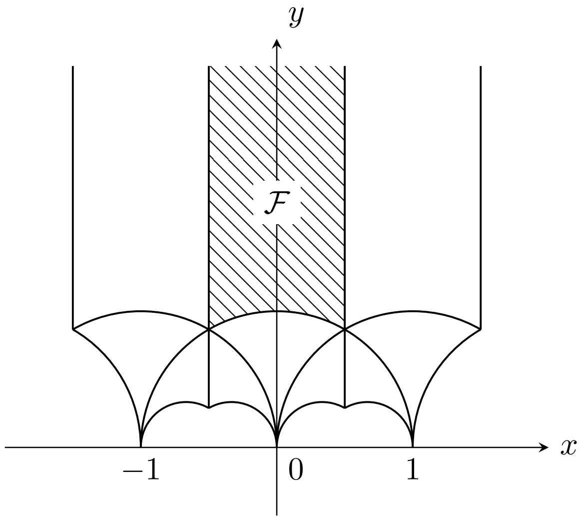
一意化写像 $j\colon \mathbb{H} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \cong \mathbb{C}$ を考える．j の定義域 $\mathbb{H}$ は代数多様体 $\mathbb{C}$ の解析的な開集合である．また，j の行き先 $\mathbb{C}$ も代数多様体である．しかし，写像 j そのものは超越的である．

このように，定義域と行き先は代数多様体（の解析的な開集合）だが，写像そのものは超越的である設定を，Klingler–Ullmo–Yafaev [KUY16] は *bi-algebraic geometry* とよんでいる．したがって，一意化写像 $j\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ は，bi-algebraic geometry の射程にある．

ここでは，一意化写像 $j\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ が $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ で扱えること，正確には，ある基本領域に j を制限した写像のグラフが $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ の定義可能集合であることをみよう．

$$\mathcal{F} := \left\{ \tau \in \mathbb{H} \;\middle|\; -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}(\tau) < \frac{1}{2},\ |\tau| \ge 1,\ |\tau| = 1 \text{ のときは } \mathrm{Re}(\tau) \le 0 \right\} \tag{3.1}$$

を $\mathbb{H}$ の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用に関する基本領域とする．



$\tau = x + iy$ が $\mathcal{F}$ の元のとき，$y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから $j|_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ は

$$\mathcal{F} \overset{\tau \mapsto e^{2\pi i \tau}}{\longrightarrow} \Delta^*(\exp(-\sqrt{3}\pi)) \overset{q^{-1}+744+196884q+\cdots}{\longrightarrow} \mathbb{C}$$

と分解する．ここで，$\Delta^*(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r\}$ であり，$q = e^{2\pi i \tau}$ である．さて，$\exp(2\pi i \tau) = \exp(-2\pi y)(\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)$ である．y は有界ではないが y が現れるのは（大域的な）exp 関数であり，一方，cos 関数と sin 関数の定義域は $-1/2 \leq x < 1/2$ $(-1/2 \leq x \leq 1/2$ で $x \neq 1/2)$ である．よって，$\mathcal{F} \to \Delta^*(\exp(-\sqrt{3}\pi))$ は，$\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ で定義可能 (つまり，グラフが $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ の定義可能集合) である．また，$q^{-1}+744+196884q+\cdots$ は $q = 0$ で極なので，$\Delta^*(\exp(-\sqrt{3}\pi)) \to \mathbb{C}$ は，$\Delta(\exp(-\sqrt{3}\pi)) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に伸びる (ただし，$\Delta(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq |z| < r\}$)．よって，$j|_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ は，$\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ で定義可能（つまり，グラフが $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ の定義可能集合）であることが分かった．

André の定理（定理 3.1）の Pila–Zannier 戦略による証明では，一意化写像 $\pi := (j, j) \colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(\tau_1, \tau_2) \mapsto (j(\tau_1), j(\tau_2))$ を考える．上に述べたことより，π を $\mathcal{F}^2$ に制限した写像は $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ で定義可能である．

3.4 (PZ2) 関数の超越性定理（“Ax–Lindemann”）

3.4.1 モジュラー Ax–Lindemann の定理

$\pi := (j, j) \colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(\tau_1, \tau_2) \mapsto (j(\tau_1), j(\tau_2))$ を一意化写像とする．

W を $\mathbb{H}^2$ の既約代数曲線 (つまり，$\mathbb{C}^2$ の既約代数曲線 $\tilde{W}$ が存在して，$W = \tilde{W} \cap \mathbb{H}^2$) とする．ここでは，やや唐突であるが，$W$ が weakly special であることを以下で定義する（同値な定義を，4.3 節で説明する)．

定義 3.12 (weakly special な曲線). W が *weakly special* な曲線であるとは，ある $\tau_1 \in \mathbb{H}$ が存在して $W = \{\tau_1\} \times \mathbb{H}$，またはある $\tau_2 \in \mathbb{H}$ が存在して $W = \mathbb{H} \times \{\tau_2\}$，またはある $g \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ が存在して $W = \{(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{H}^2 \mid \tau_2 = g \cdot \tau_1\}$ の形のときにいう．

一意化写像 π は超越的な写像なので，V が $\mathbb{C}^2$ の代数曲線のとき，$\pi^{-1}(V)$ は $\mathbb{H}^2$ の "超越的" な集合になると思われる．特に，$\mathbb{H}^2$ の代数的な集合で $\pi^{-1}(V)$ に含まれるものは，かなり特殊なものに限ることが期待される．Pila による次の定理は，この期待が正しいことを示している．Pila [Pi11] は一般の $\mathbb{C}^k$ に対する定理だが，ここでは，$\mathbb{C}^2$ の場合の主張を書いている．

定理 3.13 (Pila [Pi11, Theorem 6.7], モジュラー "Ax–Lindemann"). V は $\mathbb{C}^2$ の既約代数曲線とする．$W \subset \pi^{-1}(V)$ を既約な部分代数多様体で包含関係に関して極大なものとする．（つまり，W は $\mathbb{H}^2$ の既約な部分代数多様体で，$\pi^{-1}(V)$ に含まれ，$W \subset W' \subset \pi^{-1}(V)$ で，W' も $\mathbb{H}^2$ の既約な部分代数多様体ならば，$W = W'$ とする．）このとき，$\dim W = 1$ であれば，W は *weakly special* な曲線である．

3.4.2 定理 3.13 は，なぜ "Ax–Lindemann(–Weierstrass)" とよばれるのか?

定理 3.13 が，モジュラー Ax–Lindemann の定理とよばれる理由を説明したい．

Lindemann は 1882 年に，円周率 π が超越数であることを示した．Lindemann はその一般化として，次の主張を述べ，Weierstrass が証明を与えた．

定理 3.14 (Lindemann / Lindemann–Weierstrass (1882, 1885)). $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \overline{\mathbb{Q}}$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立なら，$e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_k}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的独立である．

例えば，1 は代数的数（すなわち，$\overline{\mathbb{Q}}$ の元）なので，定理 3.14 を使うと，自然対数の底 e が超越数であることが分かる．また，$e^{\pi i} = -1$ は代数的数であるから，定理 3.14 の対偶を用いると，πi は超越数であること，すなわち円周率 π が超越数であることが分かる．

Ax [Ax71] は，Lindemann の定理の関数体版を与えた．（ここでは定理 3.13 と似た形を挙げるが，定理 3.14 に似た形に言い換えることもできる．）

定理 3.15 (Ax [Ax71]). $\pi\colon \mathbb{C}^k \to (\mathbb{C}^k)^\times$ を $(z_1, \ldots, z_k) \mapsto (e^{z_1}, \ldots, e^{z_k})$ とする．$V \subset (\mathbb{C}^k)^\times$ は既約な部分代数多様体とする．$W \subset \pi^{-1}(V)$ を既約な部分代数多様体で包含関係に関して極大なものとする．$\mathrm{codim} W = \ell$ とおく．このとき，W は次で定義さ

れる．

$$\sum_{i=1}^{k} q_{ij} z_i = c_j, \quad j = 1, \dots, \ell \quad (\exists q_{ij} \in \mathbb{Q},\ \exists c_j \in \mathbb{C})$$

モジュラー Ax–Lindemann の定理（定理 3.13）は，Lindemann(–Weierstrass) の定理（定理 3.14）と Ax の定理（定理 3.15）の，楕円モジュラー関数版と見なすことができる．

3.5 (PZ3) special な点の Galois 軌道の個数の下からの評価

$x \in \mathcal{A}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ は CM 点とする．$\mathcal{F} \subset \mathbb{H}$ は (3.1) で定義された基本領域とし，$j(\tau) = x$ を満たす（唯一の）$\tau \in \mathcal{F}$ をとる．x は楕円曲線 $E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$（の同型類）に対応する点である．

x が CM 点であるから, $[\mathbb{Q}(\tau) : \mathbb{Q}] = 2$ である．よって, τ は 2 次方程式 $aX^2 + bX + c = 0$ （$a, b, c \in \mathbb{Z}$ は $a > 0$ で，最大公約数が 1）の解になる．$\tau \in \mathcal{F}$ であることから，$|b| \le a \le c$ が成り立つ．このとき，$d_\tau := b^2 - 4ac \in \mathbb{Z}_{<0}$ を自己準同形環 $\mathrm{End}(E_\tau) = \mathbb{Z}[\tau]$ の**判別式**（*discriminant*）という．

補題 3.16. τ の高さは，$H(\tau) \le \frac{4}{3} |d_\tau|$ を満たす．

$\tau = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-d_\tau}}{2a}$ より，同一視 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ で，$H(\tau) = \max\left\{H\left(\frac{b}{2a}\right), H\left(\frac{\sqrt{-d_\tau}}{2a}\right)\right\}$ である．このとき，補題 3.16 は，$a, b, c \in \mathbb{Z}$ が $|b| \le a \le c$ を満たすことを用いて，簡単な計算で示すことができる．代数的数の高さの定義を説明していないので（有理数の高さについては，3.3.2 節の冒頭を参照してほしい），詳細は省く．

3.1 節でも述べたが，$x = j(\tau) \in \mathbb{C}$（$\tau \in \mathcal{F}$）が CM 点のとき，$x$ は代数的整数である．x の $\mathbb{Q}$ 上で共役な点全体の集合 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cdot x$（すなわち，$x$ の Galois 軌道）の個数を下から評価しよう．虚数乗法論より，$\#\left(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cdot j(\tau)\right) = [\mathbb{Q}(j(\tau)) : \mathbb{Q}]$ は，$\mathbb{Q}(\sqrt{-d_\tau})$ の類数 $h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d_\tau})}$ に等しい．さらに，Siegel により次が成り立つ．

定理 3.17 (Siegel, [Go85], [Le87, Proposition (1.8)] 参照)**.** 任意の $\epsilon > 0$ に対して，τ によらない正の定数 $c = c(\epsilon)$ が存在して，$h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d_\tau})} \ge c \cdot |d_\tau|^{1/2-\epsilon}$ が成り立つ．

以上をまとめると，

$$\#\left(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cdot j(\tau)\right) = [\mathbb{Q}(j(\tau)) : \mathbb{Q}] = h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d_\tau})} \ge c \cdot |d_\tau|^{1/2-\epsilon}$$

を得る．後で，$\mathbb{Q}$ を代数体 K に変えたものを使うので，上の評価から $[K(j(\tau)) : K] \ge \frac{c}{[K:\mathbb{Q}]} \cdot |d_\tau|^{1/2-\epsilon}$ が成り立つことに注意しておく．

3.6 André の定理の証明

定理 3.1 を Pila–Zannier 戦略によって証明しよう（[Pi11] の $k=2$ の場合に基づく）．$V \subset \mathcal{A}_1(\mathbb{C})^2 = \mathbb{C}^2$ は定理 3.1 のものとする．すなわち，V は既約代数曲線で，V は CM 点を無数に含むと仮定する．

まず，CM 点 $(j(\tau_1), j(\tau_2))$ は $\overline{\mathbb{Q}}^2$ の元であり，V は CM 点を Zariski 稠密に含んでいるので，V は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義されている（2.4 節の (補足 4) の最初も参照）．そこで，代数体 K を，V が K 上で定義されているようにとる．

$j\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ を楕円モジュラー関数とし，$\pi = (j,j)\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{C}^2$ を一意化写像とする．$\mathcal{F} \subset \mathbb{H}$ を (3.1) で定義された基本領域とする．

主張. $\pi^{-1}(V)$ は semi-algebraic な曲線を含む.

主張の証明: (PZ1) により，$\pi^{-1}(V) \cap \mathcal{F}^2$ は $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ の定義可能集合である．$(x,x') \in V$ を CM 点とする．x, x' に対応する CM 楕円曲線をそれぞれ $E_\tau, E_{\tau'}$ とし，$\mathrm{End}(E_\tau), \mathrm{End}(E_{\tau'})$ の判別式をそれぞれ $d_\tau, d_{\tau'}$ とする．$d = \max\{|d_\tau|, |d_{\tau'}|\}$ とおく．補題 3.16 より，$H((\tau,\tau')) \leq (4/3)d$ である．さらに，(x,x') の K 上のガロア共役の点 (y,y') は，(PZ3) の Siegel の結果より（x または x' の共役を考えて），$\frac{c}{[K:\mathbb{Q}]} \cdot d^{1/2-\epsilon}$ 個以上ある．高さは Galois 共役な点で変わらないので，(y,y') に対応する $\mathbb{H}^2$ の点の高さも，$(4/3)d$ 以下である．ゆえに，

$$\begin{aligned}\#\{(\tau,\tau') \in (\pi^{-1}(V) \cap \mathcal{F}^2) \cap \overline{\mathbb{Q}}^2 \mid [\mathbb{Q}(\tau,\tau'):\mathbb{Q}] \leq 4, H((\tau,\tau')) \leq (4/3)d\} \\ \geq \frac{c}{[K:\mathbb{Q}]} \cdot d^{1/2-\epsilon}\end{aligned}$$

を得る．(PZ1) の Pila–Wilkie の定理（定理 3.10 と注意 3.11）から，$\pi^{-1}(V) \cap \mathcal{F}^2$，従って，$\pi^{-1}(V)$ は semi-algebraic な曲線を含むことが分かる．よって，主張が証明された． □

一般に，$\mathbb{C}^n$ の複素解析集合 Z が，連結で既約[*3]な semi-algebraic 集合 X を含めば，Z は代数多様体 X' で $X' \supset X$ であるものを含む（例えば，[PT13, Lemma 4.4.1] 参照）．よって，$\pi^{-1}(V)$ は代数曲線 W を含む．

[*3] semi-algebraic 集合 $X \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ が既約であるとは，$\mathbb{R}^{2n}$ の代数的集合から定まる Zariski 位相の誘導位相を X に入れるとき，X_1, X_2 が閉集合で $X = X_1 \cup X_2$ ならば，$X = X_1$ または $X = X_2$ が成り立つときにいう．

(PZ2) のモジュラー Ax–Lindemann の定理（定理 3.13）より，W は weakly special，すなわち，(i) $\{\tau_1\} \times \mathbb{H}$（$\exists \tau_1 \in \mathbb{H}$），または，(ii) $\mathbb{H} \times \{\tau_2\}$（$\exists \tau_2 \in \mathbb{H}$），または，(iii) $\{(\tau, g \cdot \tau) \mid \tau \in \mathbb{H}\}$（$\exists g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$）の形のいずれかである．(i) のときは，$c_1 = j(\tau_1)$ とおけば，$\pi(W) = \{c_1\} \times \mathbb{C}$ になる．$\pi(W) \subset V$ で，V は既約曲線より $V = \{c_1\} \times \mathbb{C}$ である．(ii) のときは，$V = \mathbb{C} \times \{c_2\}$ になる．(iii) のときは，$N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を定理 3.1 の主張の直前のようにとれば，$\pi(W) = T_N$ になる．$\pi(W) \subset V$ で，V は既約曲線より $V = T_N$ である．以上により，定理 3.1 が Pila–Zannier 戦略に沿って証明できた． □

4 Siegel モジュラー多様体 $\mathcal{A}_g$ に対する André–Oort 予想（Tsimerman の定理）

$\mathcal{A}_g$ を次元 g の主偏極アーベル多様体の粗モジュライ空間（すなわち，Siegel モジュラー多様体）とする．Tsimerman [Ts18] は，$\mathcal{A}_g$ に対する André–Oort 予想を証明した．

定理 4.1 (Tsimerman [Ts18])**.** *$V \subset \mathcal{A}_{g\mathbb{C}}$ を既約な部分代数多様体とする．このとき，V が special な点を Zariski 稠密に含めば，V 自身が special である．*

以下で，まず special について説明してから，定理 4.1 の証明の概略を，Pila–Zannier 戦略 (PZ1), (PZ2), (PZ3) に沿って説明したい．Tsimerman [Ts18] 以前に，

(PZ1) bi-algebraic geometry: 一意化写像の基本領域への制限写像が $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ で定義可能（Peterzil–Starchenko [PS13]），

(PZ2) $\mathcal{A}_g$ に対する Ax–Lindemann (Pila–Tsimerman [PT14])

についてはすでに出来ていた．したがって，$\mathcal{A}_g$ に対する André–Oort 予想を証明するために残っていた部分は

(PZ3) $\mathcal{A}_g$ に対する special な点の Galois 軌道の個数の下からの評価

であった．Tsimerman [Ts18] は，Masser–Wüstholz の isogeny 定理（[MW95]）と平均 Colmez 予想（[AGHM18], [YZ18]）を用いて (PZ3) を示し，$\mathcal{A}_g$ に対する André–Oort 予想を解決した．

4.1 special について

$\mathbb{H}_g := \{\tau \in M_g(\mathbb{C}) \mid \tau = {}^t\tau,\ \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$ を次数 g の Siegel 上半空間とする．$\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z}) := \left\{M \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}) \mid M\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1_g \\ -1_g & 0 \end{smallmatrix}\right){}^tM = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1_g \\ -1_g & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ を symplectic 群とする．$M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z})$ と $\tau \in \mathbb{H}_g$ に対して，$M \cdot \tau := (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}$ と定めることで，$\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{H}_g$ に作用する．

このとき，$\mathcal{A}_g(\mathbb{C}) = \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}_g$ は，$\mathbb{C}$ 上の g 次元の主偏極アーベル多様体の粗モジュライとなる．また，$\mathcal{A}_g$ は $\mathbb{Q}$ 上で定義された準射影多様体になる．

$x \in \mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ とし，A_x を x に対応する主偏極アーベル多様体（の同型類）とする．このとき，x が CM 点であるとは，A_x が *CM*（**虚数乗法**）をもつときにいう．ただし，ここで， アーベル多様体 A が CM をもつとは，$\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ の可換な部分環で $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての次元が $2\dim A$ であるものが存在するときにいう．

志村多様体の定義は述べないが，志村多様体 $S = \mathrm{Sh}_K(G, X)$ は Shimura datum (G, X) と （G は連結な reductive algebraic group で，X はいくつかの条件を満たす準同形写像 $h\colon \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{R}}$ の $G(\mathbb{R})$ 共役類）と compact open set $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ から定まる．このとき，(G, X) の sub-Shimura datum (H, X_H) と $g \in G(\mathbb{A}_f)$ から定まる $S_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ の部分多様体を，*special* 部分多様体という．

以下では，$\mathcal{A}_g$ の *special* 部分多様体は，この志村多様体の *special* 部分多様体を意味する．次元が 0 のときは，**$\mathcal{A}_g$ の *special* な点は，*CM* 点に他ならない．**（${\mathcal{A}_1}^2$ に対する André の定理（定理 3.1）の special な曲線も，この定義に合っている．）

4.2 (PZ1) $\mathcal{A}_g$ に対する bi-algebraic geometry

Pila–Wilkie の有理点の数え上げ定理（定理 3.10）は semi-algebraic 集合族を拡大した o-minimal 構造で成り立ち，3.3.1 節で説明したように $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ は o-minimal 構造である．

よって，$\mathcal{A}_g$ について，Pila–Wilkie の有理点の数え上げ定理を使うには，一意化写像 $\pi\colon \mathbb{H}_g \to \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}_g \cong \mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ をある基本領域に制限した写像が $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ で定義可能であればよい．

ところで，$\mathbb{H}_g$ の $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ の作用に関する基本領域として，Siegel 基本領域 $\mathcal{F}_{\mathrm{Siegel}} \subset \mathbb{H}_g$ とよばれるものがある（例えば，[Fr83, Kapitel I, §2] 参照）．Siegel 基本領域は，$\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}$ のときの $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用に関する基本領域 $\mathcal{F}$（(3.1) 参照）の一般化になっている．

Peterzil–Starchenko [PS13] は，π を $\mathcal{F}_{\mathrm{Siegel}}$ に制限した写像が $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ で定義可能であることを示した.

定理 4.2 (Peterzil–Starchenko [PS13])**.** $\pi\colon \mathbb{H}_g \to \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}_g \cong \mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ を一意化写像とする．このとき，*Siegel* 基本領域 $\mathcal{F}_{\mathrm{Siegel}}$ は $\mathbb{H}_g$ の *semi-algebraic* な部分集合であり，$\pi|_{\mathcal{F}_{\mathrm{Siegel}}}\colon \mathcal{F}_{\mathrm{Siegel}} \to \mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ は $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ で定義可能（グラフが定義可能集合）である.

注意 4.3. Klingler–Ullmo–Yafaev [KUY16] は，上の定理にあたるものを，すべての pure 志村多様体に対して証明した．さらに，Gao [Ga17] は，この結果を mixed 志村多様体の場合に一般化した.

4.3 (PZ2) $\mathcal{A}_g$ に対する "Ax–Lindemann"

W を $\mathbb{H}_g$ の既約な部分代数多様体とする．W が *weakly special* であることの（同値な）定義には，totally geodesic を使ったものもあるが（Moonen [Mo88] 参照），ここでは，[UY11] による特徴付けで説明する.

$\pi\colon \mathbb{H}_g \to \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}_g \cong \mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ を一意化写像とする.

定義 4.4 (weakly special)**.** 既約な部分代数多様体 $W \subset \mathbb{H}_g$ が *weakly special* であるとは，$\pi(W)$ が $\mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ で代数的なときにいう.

定理 4.5 ($\mathcal{A}_g$ に対する Ax–Lindemann, Pila–Tsimerman [PT14])**.** $V \subset \mathcal{A}_{g\mathbb{C}}$ を既約な部分代数多様体とする．このとき，$W \subset \pi^{-1}(V)$ を既約な部分代数多様体で包含関係に関して極大なものとする．このとき，W は *weakly special* である.

注意 4.6. Ullmo–Yafaev [UY14b], Klingler–Ullmo–Yafaev [KUY16] は，任意の mixed 志村多様体の一意化写像に関して，Ax–Lindemann を証明した．これらの定理と定理 3.13，定理 4.5 の証明には，いずれも Pila–Wilkie の数え上げ定理（定理 3.10）が用いられている．Mok [Mo19] は複素単位球 $\mathbb{B}^k$ と任意の torsion free lattice（算術的とは限らない） Γ による商空間への一意化写像 $\mathbb{B}^k \to \mathbb{B}^k/\Gamma$ に対して，複素幾何の手法で，Ax–Lindemann の証明を与えた．複素幾何の手法による，他の対称空間に対する Ax–Lindemann は今後の課題のようである.

4.4 (PZ3) $\mathcal{A}_g$ に対する special な点の Galois 軌道の個数の下からの評価

$x \in \mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ が special (= CM) な点のとき，A_x で対応するアーベル多様体を表し，$R_x = Z(\mathrm{End}(A_x))$ で自己準同形環 $\mathrm{End}(A_x)$ の中心を表す．$\mathrm{Disc}(R_x)$ で R_x の判別式を表す．

Tsimerman は $\mathcal{A}_1$ のときの Siegel の評価（定理 3.17）と同様の評価が，$\mathcal{A}_g$ についても成り立つことを証明した．

定理 4.7 (Tsimerman [Ts18])**.** $g \geq 1$ とする．このとき，正の定数 $\delta = \delta(g)$ と $c = c(g)$ が存在して，任意の *special (= CM)* な点 $x \in \mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ に対して，

$$\#\left(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cdot x\right) \geq c \cdot |\mathrm{Disc}(R_x)|^{\delta} \tag{4.1}$$

が成り立つ．

$\mathcal{A}_g$ の場合の Pila–Zannier 戦略による André–Oort 予想へのアプローチでは，この special な点の Galois 軌道の個数の下からの評価が最後に残った要素だった．Tsimerman は，定理 4.7 が

(1) Masser–Wüstholz の isogeny 定理（[MW95]），
(2) $g \geq 1$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，正の定数 $c_2 = c_2(g, \epsilon)$ が存在して，任意の special (= CM) な点 $x \in \mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ に対して，

$$h_{\mathrm{Fal}}(A_x) \leq c_2\, |\mathrm{Disc}(R_x)|^{\epsilon} \tag{4.2}$$

が成り立つ．

ことから導けることを示した．ただし，(2) で $h_{\mathrm{Fal}}(A_x)$ は A_x の Faltings 高さを表す．ここで，(1) は次の定理である．

定理 4.8 (Masser–Wüstholz [MW95])**.** A, B は代数体 K 上のアーベル多様体で，$\overline{\mathbb{Q}}$ 上で *isogeny* とする．このとき，$\overline{\mathbb{Q}}$ 上の *isogeny* $A \to B$ で，その次数 N が，

$$N \leq c_1 \max\{h_{\mathrm{Fal}}(A), [K : \mathbb{Q}]\}^{\beta} \tag{4.3}$$

となるものが存在する．ただし，ここで，c_1, β は g のみによる正の定数である．

(2) については，$x \in \mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ が CM 点のときの Faltings 高さ $h_{\mathrm{Fal}}(A_x)$ の値については Colmez 予想があり，Andreatta–Goren–Howard–Madapusi-Pera [AGHM18] と Yuan–

Zhang [YZ18] は，平均 Colmez 予想を独立に証明した．Tsimerman は平均 Colmez 予想から (2) を導いた．

ここでは，平均 Colmez 予想がどのような主張かを述べたい．E を $[E\colon \mathbb{Q}] = 2g$ の CM 体（すなわち，総実体の総虚 2 次拡大体）とする．総実体を F と書く．$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(E, \mathbb{C}) = \Phi \amalg \overline{\Phi}$ をみたす Φ をとり，CM 型 (E, Φ) を考える．A を CM 型 (E, Φ) のアーベル多様体とする．A の Faltings 高さは，(E, Φ) のみによるので，以下では $h_{\mathrm{Fal}}(A)$ を $h_{\mathrm{Fal}}(E, \Phi)$ で表す．

d_E, d_F をそれぞれ E, F の判別式とする．$\chi\colon \mathbb{A}_F^\times \to \{\pm 1\}$ を E/F に付随する 2 次指標とし，$L(s, \chi)$ を χ に付随する L 関数とする．

平均 Colmez 予想は，E を固定して，Φ が 2^g 通りをすべて動くときに，Faltings 高さ $h_{\mathrm{Fal}}(E, \Phi)$ の平均の値に関するものである．

定理 4.9 (平均 Colmez 予想 [AGHM18], [YZ18])**.** 上の設定で，次の等式が成り立つ．

$$\frac{1}{2^g} \sum_{\Phi} h_{\mathrm{Fal}}(E, \Phi) = -\frac{1}{2} \frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)} - \frac{1}{4} \log \frac{|d_E|}{|d_F|} - \frac{g}{2} \log(2\pi).$$

注意 4.10. Binyamini–Schmidt–Yafaev [BSY21+] は，平均 Colmez 予想は使うが，Masser–Wüstholz の isogeny 定理は使わない，定理 4.7 の別証明を与えた．

5 終わりに

最後に，この講演を Zoom でしたときに，質疑応答などで出てきた話題についてまとめたい．

5.1 o-minimal 構造の別の応用

o-minimal 構造の Diophantus 幾何以外への応用はあるかという質問を馬昭平さんがされて，Hodge 理論の周期写像への応用が知られていると尾高悠志さんが答えられた．この o-minimal 構造の Hodge 理論の周期写像への応用の論文は，[BT19], [BKT20] である（私はよく知らない）．

5.2 o-minimal 構造を使う／使わない証明

2.4 節の (補足 2) で述べたが，o-minimal 構造の Diophantus 幾何への応用として，André–Oort 予想の他に，幾何学的 Bogomolov 予想や，uniform な Mordell 予想への応用がある．

Gao–Habegger [GH19] と Cantat–Gao–Habegger–Xie [CGHX21] による標数 0 の関数体上の幾何学的 Bogomolov 予想では，o-minimal 構造（Pila–Wilkie の数え上げ定理）と Betti 写像[*4]が使われている．しかし，Xie–Yuan [XY21+] による任意標数の幾何学的 Bogomolov 予想の証明は，代数幾何によるもので[*5]，o-minimal 構造は使われていない．

Dimitrov–Gao–Habegger [DGH21] の uniform な Mordell–Lang 予想と uniform な Manin–Mumford 予想の証明では，Betti 写像と Gao の結果 [Ga20] が使われていて，[Ga20] では o-minimal 構造（Pila–Wilkie の数え上げ定理）が使われている．しかし，Yuan [Yu21+] は Arakelov 幾何を使っていて，o-minimal 構造は使っていない．

したがって，幾何学的 Bogomolov 予想や，uniform な Mordell 予想については，o-minimal 構造を使わない証明がある（という理解で正しいと思う）．André–Oort 予想についても，o-minimal 構造を使わない（unconditional な）証明ができるのだろうか???

5.3 Weierstrass $\wp$ 関数の定義可能性

講演のときに座長をしてくださった寺杣友秀先生が，そのときに，Weierstrass $\wp$ 関数の定義可能性を調べた論文があると言われた．その論文は [PS04] である．

5.4 平均 Colmez 予想について

伊藤哲史さんは以下のことを教えてくださった．（教えてくださった伊藤さんに深く感謝申し上げる．ただし，以下で変なことを書いていた場合は，責任はもちろん私にある．）伊藤哲史さんと越川皓永さんが平均 Colmez 予想の論文 [AGHM18], [YZ18] を読んで，

[*4] Betti 写像は，$\mathbb{C}$ 上に定義された相対次元が g の abelian scheme $\mathcal{A} \to S$ と切断 ξ に対して定まる実解析的な多重値写像 $S(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^{2g}$ である．S が 1 点のときは，$\mathcal{A}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2g}/\Lambda$ において，$\pi\colon \mathbb{R}^{2g} \to \mathbb{R}^{2g}/\Lambda$ を自然な射影とするとき，1 点の像を $\pi^{-1}(\xi) \subset \mathbb{R}^{2g}$ とするものが Betti 写像である．このとき，ξ が torsion 点であることと，Betti 写像の像 $\pi^{-1}(\xi)$ が $\mathbb{Q}^{2g}$ であることが同値になる．

[*5] 山木 [Ya17], [Ya18] の結果と代数幾何的な手法によって，関数体の Manin–Mumford（と Lang 予想）に帰着させている．正標数の Manin–Mumford （と Lang 予想）は，Hrushovski [Hr01] によってモデル理論を用いて示されたが，Pink–Roessler [PR04] は代数幾何的な証明を与えた．

結論はよいが，書き方によくないところがあるとのことである．

[AGHM18] については，Section 4.3 の結果は（そのままでは）$p=2$ のときには使えないが，必要になるのは supersingular なアーベル多様体に対してで，supersingular であることを仮定して読めば良いとのことである．

[YZ18] については，Theorem 2.7 の証明が分岐指数 e が $p-1$ 以上の場合のときに問題があるが，arXiv:1507.06903 の version 3 (18 Nov 2021) で erratum が追加され，これで問題ないとのことである．

5.5　問 2.2 の答え

講演のときに問 2.2 を出したときには，私は答えを知らなかったのだが，尾高悠志さんが，講演の休憩時間のときに，次の方針でできると教えてくださった．（手頃な Quiz だったかもしれない．ただし，以下の解答で間違えていた場合は，責任はもちろん私にある．）まず，次の補題を準備する．

補題 5.1. a,b を正の整数，ϵ,μ を 1 のべき根とする．このとき，$2^a\epsilon+3^b\mu=1$ となるのは，$(a,b,\epsilon,\mu)=(2,1,1,-1)$，$(a,b,\epsilon,\mu)=(1,1,-1,1)$，$(a,b,\epsilon,\mu)=(3,2,-1,1)$ のときのみである．

証明:　$2^a\epsilon+3^b\mu=1$ とし, $3^b>2^a$ と仮定する．このとき, $1=|2^a\epsilon+3^b\mu|\geq 3^b-2^a\geq 1$ なので，$3^b-2^a=1$ になる．$a=1$ のときは $b=1$ である．$a\geq 2$ のときは，mod 4 で考えると b は偶数なので，$b=2c$（$c\in\mathbb{Z}$）とおく．$(3^c-1)(3^c+1)=2^a$ より，3^c-1 と 3^c+1 はともに 2 べきになるので，$c=1$ である．よって，$(a,b)=(3,2)$ になる．$2^a>3^b$ のときは，同様に議論すると，$2^a-3^b=1$ である．mod 8 で考えると，$a\leq 2$ が分かる．これから，$(a,b)=(2,1)$ となる．　□

さて，問 2.2 の状況で，$x=2^k3^\ell\epsilon$, $y=2^m3^n\mu$（$k,\ell,m,n\in\mathbb{Z}$, ϵ,μ は 1 のべき根）とし，$x+y=1$ とする．ϵ,μ を含む代数体 K をとり，$\mathbb{Q}$ の 2 進ノルム $|\cdot|_2$ を拡張した K のノルムを考えると，$k<0$ のときは $k=m$ であり，$k\geq 0$ のときは $m\geq 0$ で k と m のどちらかは 0 になる．同様に，$\ell<0$ のときは $\ell=n$ であり，$\ell\geq 0$ のときは $n\geq 0$ で ℓ と n のどちらかは 0 になる．

場合 1:　$k=m<0$ かつ $\ell=n<0$ のとき．$\epsilon+\mu=2^{|k|}3^{|\ell|}$ になる．左辺は 6 以上なので，これは成り立たない．

場合 2:　$k=m<0$ かつ $\ell\geq 0$ のとき．対称性より，$\ell=0$ としてよい．こ

のとき，$\epsilon + 3^n\mu = 2^{|k|}$ になる．ここで，$n \geq 0$ である．$n = 0$ のときは $|k| = 1$ で，$\epsilon = 1, \mu = 1$ が適して, $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ である．$n > 0$ のときは補題 5.1 より, $(n, |k|, \epsilon, \mu) = (1,1,-1,1), (1,2,1,1), (2,3,-1,1)$ が適する．このとき，$(x,y) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $(-\frac{1}{8}, \frac{9}{8})$ である．対称性より $(x,y) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{9}{8}, -\frac{1}{8})$ もある．

場合 3:　$k \geq 0$ かつ $\ell = n < 0$ のとき．対称性より，$k = 0$ としてよい．このとき，$\epsilon + 2^m\mu = 3^{|\ell|}$ になる．ここで, $m \geq 0$ である．$m = 0$ のときは, 左辺が 3 以上なので適さない．$m > 0$ のときは，補題 5.1 より，$(m, |\ell|, \epsilon, \mu) = (1,1,1,1), (2,1,-1,1), (3,2,1,1)$ が適する．このとき，$(x,y) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$, $(\frac{1}{9}, \frac{8}{9})$ である．対称性より，$(x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}), (\frac{8}{9}, \frac{1}{9})$ もある．

場合 4:　$k \geq 0$ かつ $\ell \geq 0$ のとき．対称性より $2^k 3^\ell \epsilon + \mu = 1$ または $2^k\epsilon + 3^n\mu = 1$ を解けばよい．$\rho = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく．前者のときは，$\ell = 0$ である．さらに，$k = 0$ のときは, $(x,y) = (\rho, 1-\rho), (1-\rho, \rho)$ になる．$k > 0$ のときは，$k = 1$ で $(x,y) = (2,-1)$ が適する．対称性より，$(x,y) = (-1,2)$ もある．後者のときは，$n = 0$ のときは，前者の場合に帰着する．$n \geq 1$ のときは，$k \geq 1$ で，補題 5.1 より，$(x,y) = (-2,3), (4,-3), (-8,9)$ となる．対称性より，$(x,y) = (3,-2), (-3,4), (9,-8)$ もある．

以上をまとめて，$\#\{(x,y) \in (\langle 2,3\rangle \times \boldsymbol{\mu})^2 \mid x+y=1\} = (1+6)+6+(2+2+6) = 23$ である．

参考文献

[An89] André, Yves, G-functions and geometry. Aspects of Mathematics, E13. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989. xii+229 pp.

[An98] André, Yves, *Finitude des couples d'invariants modulaires singuliers sur une courbe algébrique plane non modulaire*, J. Reine Angew. Math. 505 (1998), 203–208.

[AGHM18] Andreatta, Fabrizio; Goren, Eyal Z.; Howard, Benjamin; Madapusi Pera, Keerthi, *Faltings heights of abelian varieties with complex multiplication*, Ann. of Math. (2) 187 (2018), no. 2, 391–531.

[Ax71] Ax, James, *On Schanuel's conjectures*, Ann. of Math. (2) 93 (1971), 252–268.

[BD13] Baker, Matthew; De Marco, Laura, *Special curves and postcritically finite polynomials*, Forum Math. Pi 1 (2013), e3, 35 pp.

[BT19] Bakker, Benjamin; Tsimerman, Jacob, *The Ax–Schanuel conjecture for variations of Hodge structures*, Invent. Math. 217 (2019), no. 1, 77–94.

[BKT20] Bakker, B.; Klingler, B.; Tsimerman, J., *Tame topology of arithmetic quotients and algebraicity of Hodge loci*, J. Amer. Math. Soc. 33 (2020), no. 4, 917–939.

[BN17] Binyamini, Gal; Novikov, Dmitry, *The Pila-Wilkie theorem for subanalytic families: a complex analytic approach*, Compos. Math. 153 (2017), no. 10, 2171–2194.

[BSY21+] Binyamini, Gal; Schmidt, Harry; Yafaev, Andrei, *Lower bounds for Galois orbits of special points on Shimura varieties: a point-counting approach*, preprint 2021, arXiv:2104.05842.

[CGHX21] Cantat, Serge; Gao, Ziyang; Habegger, Philipp; Xie, Junyi, *The geometric Bogomolov conjecture*, Duke Math. J. 170 (2021), no. 2, 247–277.

[Ci11] Cinkir, Zubeyir, *Zhang's conjecture and the effective Bogomolov conjecture over function fields*, Invent. Math. 183 (2011), no. 3, 517–562.

[Co98] Colmez, Pierre, *Sur la hauteur de Faltings des variétés abéliennes à multiplication complexe*, Compositio Math. 111 (1998), no. 3, 359–368.

[DKY20] DeMarco, Laura; Krieger, Holly; Ye, Hexi, *Uniform Manin–Mumford for a family of genus 2 curves*, Ann. of Math. (2) 191 (2020), no. 3, 949–1001.

[DGH21] Dimitrov, Vesselin; Gao, Ziyang; Habegger, Philipp, *Uniformity in Mordell-Lang for curves*, Ann. of Math. (2) 194 (2021), no. 1, 237–298.

[vdD98] van den Dries, Lou, Tame topology and o-minimal structures. London Mathematical Society Lecture Note Series, 248. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. x+180 pp.

[vdDM85] van den Dries, Lou; Miller, Chris, *On the real exponential field with restricted analytic functions*, Israel J. Math. 85 (1994), no. 1-3, 19–56.

[Ed98] Edixhoven, Bas, *Special points on the product of two modular curves*, Compositio Math. 114 (1998), no. 3, 315–328.

[Fr83] Freitag, E, Siegelsche Modulfunktionen. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 254. Springer-Verlag, Berlin, 1983. x+341 pp.

[Ga16] Gao, Ziyang, *About the mixed André–Oort conjecture: reduction to a lower bound for the pure case*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 354 (2016), no. 7, 659–663.

[Ga17] Gao, Ziyang, *Towards the Andre-Oort conjecture for mixed Shimura varieties: the Ax–Lindemann theorem and lower bounds for Galois orbits of special points*, J. Reine Angew. Math. 732 (2017), 85–146.

[Ga20] Gao, Ziyang, *Mixed Ax–Schanuel for the universal abelian varieties and some applications*, Compos. Math. 156 (2020), no. 11, 2263–2297.

[GH19] Gao, Ziyang; Habegger, Philipp, *Heights in families of abelian varieties and the geometric Bogomolov conjecture*, Ann. of Math. (2) 189 (2019), no. 2, 527–604.

[Go85] D. Goldfeld, *Gauss's class number problem for imaginary quadratic fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 13 (1985), 23–37.

[Gu07] Gubler, Walter, *The Bogomolov conjecture for totally degenerate abelian varieties*, Invent. Math. 169 (2007), no. 2, 377–400.

[Hr01] Hrushovski, Ehud, *The Manin-Mumford conjecture and the model theory of* *difference fields*, Ann. Pure Appl. Logic 112 (2001), no. 1, 43–115.

[JW15] O-minimality and diophantine geometry. Lecture notes from the LMS-EPSRC course held at the University of Manchester, Manchester, July 2013. Edited by G. O. Jones and A. J. Wilkie. London Mathematical Society Lecture Note Series, 421. Cambridge University Press, Cambridge, 2015. xii+221 pp.

[KUY16] Klingler, B.; Ullmo, E.; Yafaev, A., *The hyperbolic Ax–Lindemann–Weierstrass conjecture*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 123 (2016), 333–360.

[KUY18] Klingler, B.; Ullmo, E.; Yafaev, A., Bi-algebraic geometry and the André-Oort conjecture. *Algebraic geometry: Salt Lake City 2015*, 319–359, Proc. Sympos. Pure Math., 97.2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.

[KY14] Klingler, Bruno; Yafaev, Andrei, *The André–Oort conjecture*, Ann. of Math. (2) 180 (2014), no. 3, 867–925.

[Ku21+] Kühne, L., *Equidistribution in families of Abelian varieties and uniformity*, preprint 2021. arXiv 2101.10272.

[La65] Lang, Serge, *Division points on curves*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 70 (1965), 229–234.

[La84] Laurent, Michel, *Équations diophantiennes exponentielles*, Invent. Math. 78 (1984), no. 2, 299–327.

[Le87] H. W. Lenstra, Jr., *Factoring integers with elliptic curves*, Ann. of Math. 126 (1987), 649–673.

[MW95] Masser, D. W.; Wüstholz, G., *Factorization estimates for abelian varieties*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 81 (1995), 5–24.

[Ma80] Matsumura, Hideyuki, Commutative algebra. Second edition. Mathematics Lecture Note Series, 56. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980. xv+313 pp.

[Mc95] McQuillan, Michael, *Division points on semi-abelian varieties*, Invent. Math. 120 (1995), no. 1, 143–159.

[Mo19] Mok, Ngaiming, *Zariski closures of images of algebraic subsets under the uniformization map on finite-volume quotients of the complex unit ball*, Compos. Math. 155 (2019), no. 11, 2129–2149.

[Mo88] Moonen, Ben, *Linearity properties of Shimura varieties. I.*, J. Algebraic Geom. 7 (1998), no. 3, 539–567.

[Oo94] Oort, Frans, Canonical liftings and dense sets of CM-points. *Arithmetic geometry (Cortona, 1994)*, 228–234, Sympos. Math., XXXVII, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[PS04] Peterzil, Ya'acov; Starchenko, Sergei, *Uniform definability of the Weierstrass $\wp$ functions and generalized tori of dimension one*, Selecta Math. (N.S.) 10 (2004), no. 4, 525–550.

[PS13] Peterzil, Y.; Starchenko S., *Definability of restricted theta functions and families of abelian varieties*, Duke Math. J. 162, (2013), 731–765.

[Pi04] Pila, Jonathan, *Integer points on the dilation of a subanalytic surface*, Q. J. Math. 55 (2004), 207–223.

[Pi09] Pila, Jonathan, *On the algebraic points of a definable set*, Selecta Math. (N.S.) 15 (2009), no. 1, 151–170.

[Pi11] Pila, Jonathan, *O-minimality and the André-Oort conjecture for* $\mathbb{C}^n$, Ann. of Math. (2) 173 (2011), no. 3, 1779–1840.

[PST21+] Pila, Jonathan; Shankar, Ananth N.; Tsimerman, Jacob, *Canonical Heights on Shimura Varieties and the André–Oort Conjecture*, with an appendix by Hélène Esnault and Michael Groechenig, preprint 2021, arXiv:2109.08788.

[PT13] Pila, Jonathan; Tsimerman, Jacob, *The André–Oort conjecture for the moduli space of abelian surfaces*, Compos. Math. 149 (2013), no. 2, 204–216.

[PT14] Pila, Jonathan; Tsimerman, Jacob, *Ax–Lindemann for* $\mathcal{A}_g$, Ann. of Math. (2) 179 (2014), no. 2, 659–681.

[PW06] Pila, J.; Wilkie, A. J., *The rational points of a definable set*, Duke Math. J. 133 (2006), no. 3, 591–616.

[PZ08] Pila, Jonathan; Zannier, Umberto, *Rational points in periodic analytic sets and the Manin–Mumford conjecture*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. 19 (2008), no. 2, 149–162.

[PR04] Pink, Richard; Roessler, Damian, *On* ψ*-invariant subvarieties of semiabelian varieties and the Manin-Mumford conjecture*, J. Algebraic Geom. 13 (2004), no. 4, 771–798.

[Ra83] Raynaud, M., Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion, *Arithmetic and geometry*, Vol. I, 327–352, Progr. Math., 35, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[Si94] Silverman, Joseph H., Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves. Graduate Texts in Mathematics, 151. Springer-Verlag, New York, 1994. xiv+525 pp.

[Ts18] Tsimerman, Jacob, *The André–Oort conjecture for* $\mathcal{A}_g$, Ann. of Math. (2) 187 (2018), no. 2, 379–390.

[Ul98] Ullmo, Emmanuel, *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*, Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 1, 167–179.

[Ul17] Ullmo, Emmanuel, Structures spéciales et problème de Zilber-Pink, *Around the Zilber-Pink conjecture/Autour de la conjecture de Zilber-Pink*, 1–30, Panor. Synthèses, 52, Soc. Math. France, Paris, 2017.

[UY11] Ullmo, Emmanuel; Yafaev, Andrei, *A characterization of special subvarieties*, Mathematika 57 (2011), no. 2, 263–273.

[UY14a] Ullmo, Emmanuel; Yafaev, Andrei, *Galois orbits and equidistribution of special subvarieties: towards the André–Oort conjecture*, Ann. of Math. (2) 180 (2014), no. 3, 823–865.

[UY14b] Ullmo, Emmanuel; Yafaev, Andrei, *Hyperbolic Ax–Lindemann theorem in the cocompact case*, Duke Math. J. 163 (2014), no. 2, 433–463.

[XY21+] Xie, Junyi; Yuan, Xinyi, *Geometric Bogomolov conjecture in arbitrary characteristics*, preprint 2021, arXiv:2108.09722.

[Ya17] Yamaki, Kazuhiko, *Non-density of small points on divisors on abelian varieties and the Bogomolov conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), no. 4, 1133–1163.

[Ya18] Yamaki, Kazuhiko, *Trace of abelian varieties over function fields and the geometric Bogomolov conjecture* J. Reine Angew. Math. 741 (2018), 133–159.

[Yu21+] Yuan, Xinyi, *Arithmetic bigness and a uniform Bogomolov-type result*, preprint 2021, arXiv:2108.05625.

[YZ18] Yuan, Xinyi; Zhang, Shou-Wu, *On the averaged Colmez conjecture*, Ann. of Math. (2) 187 (2018), no. 2, 533–638.

[Zh98] Zhang, Shou-Wu, *Equidistribution of small points on abelian varieties*, Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 1, 159–165.