A criterion for the existence of a plane model with two inner Galois points for algebraic curves

東根一樹

2021 年 12 月 30 日

概要

本稿では, 2021 年 10 月 26 日から 10 月 29 日に開催された研究集会「城崎代数幾何学シンポジウム 2021」において同タイトルで発表した内容と, 論文 [15] の内容を基にして, "内 Galois 点を 2 つもつ平面曲線の存在に関する判定法" とそれを用いた例の構成について述べる.

1 導入

k を標数 $p \geq 0$ の代数閉体とし, $C \subset \mathbb{P}^2$ を k 上定義された次数 $d = \deg(C) \geq 2$ の平面 (代数) 曲線とする. C の特異点集合を $\mathrm{Sing}(C)$, 関数体を $k(C)$ で表す. また, 相異なる 2 点 $P, Q \in \mathbb{P}^2$ に対して, P と Q を結ぶ $\mathbb{P}^2$ 内の直線を $\overline{PQ}$ で表す.

1 点 $P \in \mathbb{P}^2$ をとり, P からの射影 $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1; Q \mapsto \overline{PQ}$ を考える. π_P は支配的な有理写像であるから, 関数体の拡大 $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ をひきおこす. この状況で吉原久夫氏 (新潟大学) は次の定義を与えた.

定義 (吉原久夫, 1996, [3, 17, 20]). $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ が Galois 拡大であるとき, P を C の Galois 点という.

Galois 点について, あとで用いる用語と記号を定義する.

定義. P を Galois 点とする.

(1) $P \in C$ (resp. $P \notin C$) であるとき, P を内 Galois 点 (resp. 外 Galois 点) という.

(2) $P \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ (resp. $P \in \mathrm{Sing}(C)$) であるとき, P を smooth Galois 点 (resp. non-smooth Galois 点) という.

(3) $G_P := \mathrm{Gal}(k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1))$ を P における Galois 群という.

本稿では「2 つ以上の Galois 点をもつような (平面曲線) C」について考えていきたい (Galois 点に関する問題については [21] 参照). まず, 非特異な C に対しては, 吉原氏, 三浦敬氏 (宇部高専), 本間正明氏 (神奈川大学), 深澤知氏 (山形大学) によって C の完全な分類が与えられている ([4]). それに続いて「C が特異点をもつことも許したうえで, 2 つ以上の Galois 点をもつような C にはどんなものがあるか？そのような C を見つけるにはどうしたらよいか？」ということが問題となった. 2016 年, 深澤氏は代数曲線の自己同型群の観点から前述のような C が存在するための判定法を与えた.

判定法 (深澤知, 2018, [6]). X を非特異既約射影曲線, G_1, $G_2 \subset \mathrm{Aut}(X)$ を有限部分群, P_1, P_2 を X 上の相異なる 2 点とする. このとき, 以下の (I), (II) は同値である.

(I) 双有理埋めこみ $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(X)$ は相異なる smooth Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, かつ $G_{\varphi(P_i)} = G_i$ $(i = 1, 2)$ となるようなものが存在する.

(II) 以下の 3 条件が成立する.

(a) $X/G_1 \simeq \mathbb{P}^1$, $X/G_2 \simeq \mathbb{P}^1$,

(b) $G_1 \cap G_2 = \{1\}$,

(c) $P_1 + \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2) = P_1 + \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1)$ (as divisors).

ここで, 双有理埋め込み $X \to \mathbb{P}^2$ とは, 射であって像への双有理写像をひきおこすようなものである. $i = 1, 2$ に対して, X/G_i は, $k(X)$ の G_i による固定体 $k(X)^{G_i}$ を関数体にもつ k 上の非特異既約射影曲線を表す. また, $\mathrm{Aut}(X)$ は X の k 上の自己同型群を表す.

この判定法を用いることで, 2 つ以上の Galois 点をもつような C の新たな例がたくさん構成されている ([6, 7, 10, 12, 13]).

上記深澤氏の判定法は, 2 つ以上の smooth Galois 点をもつような全ての C に適用することが可能である. 一方, Galois 点の研究においては 2 つ以上の non-smooth Galois 点をもつような例も知られている. そのような例には (他に smooth Galois 点が 2 つあるような状況でなければ) 上記深澤氏の判定法を適用することはできない. その 1 例として, Artin-Schreier-Mumford (略して ASM) 曲線とよばれる例を観察してみよう ([8, Theorem 1 参照]).

例. $q := p^n \geq 3$ $(p = \mathrm{char}(k))$, $c \in k \setminus \{0\}$ とするとき,

$$\mathbb{P}^2 \supset C : (X^q + XZ^{q-1})(Y^q + YZ^{q-1}) - cZ^{2q} = 0$$

を ASM 曲線という．ここで, $(X:Y:Z)$ は $\mathbb{P}^2$ の斉次座標である．この ASM 曲線 C について

$$\mathrm{Sing}(C) = C \cap \{Z=0\} = \{P_1 := (1:0:0), P_2 := (0:1:0)\}$$

であり, P_1, P_2 いずれも重複度 q の特異点であるが, P_1, P_2 いずれも non-smooth Galois 点である．実際, P_1 からの射影は有理写像として $\pi_{P_1} = (y:1)$ のように計算できる．誘導される関数体の拡大 $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ は $k(x,y)/k(y)$ で, x の $k(y)$ 上の最小多項式は $T^q + T - \frac{c}{y^q+y} \in k(y)[T]$ である．ここで, アフィン開集合 $\{Z \neq 0\}$ 上の正則関数 $\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$ が定める $C \cap \{Z \neq 0\}$ 上の正則関数をそれぞれ x, y で表した．体拡大 $k(x,y)/k(y)$ は $\{(x,y) \mapsto (x+\alpha, y) \mid \alpha^q + \alpha = 0\}$ を Galois 群にもつ Galois 拡大であり, P_1 は non-smooth Galois 点である．P_2 が non-smooth Galois 点であることも同様である．

その他, 2 つ以上の non-smooth Galois 点を持つような例として, Ballico-Hefez 曲線 ([5] 参照), いくつかの自己双対曲線 ([14] 参照), Giulietti-Korchmáros 曲線のある平面モデル ([11] 参照), (q^3, q^2)-Frobenius nonclassical 曲線 ([1] 参照) が知られている．また, 高橋剛氏 (新潟大学) は, 平面 5 次曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ で 2 重点 P をもつようなものについて, P が Galois 点のときの C の定義方程式の形を決定している ([19] 参照)．しかし, 上記以外に non-smooth Galois 点の例が明示的に与えられているものや, non-smooth Galois 点を体系的に研究したものは, 著者の知る限り見当たらないように思う．

このような事情から, 深澤氏の判定法を non-smooth Galois 点の場合を含んだすべての場合に適用可能な形に拡張することは, non-smooth Galois 点研究を進めるために有用であると考えられる．本稿ではこの深澤氏の判定法の拡張について述べる．また, Galois 点における群と軌道の情報を用いて, Galois 点における order sequence (後述) がわかることについても述べる．さらに, 拡張された判定法を用いることで, non-smooth Galois 点を 2 つもつ平面曲線の例を構成する．

2 準備

ここでは, 証明の準備となるいくつかの事実を確認する．X を非特異既約射影曲線, $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ を双有理埋め込みとする．すなわち, φ は射であって, 像との双有理写像をひきおこすようなものである．$\varphi(X)$ は直線ではないとする．はじめに, order sequence の概念を思い出そう ([16, Chapter 7] 参照)．直線 $L \subset \mathbb{P}^2$ に対して, $\varphi(X)$ と L の交わりがひきおこす X 上の (Weil) 因子を $\varphi^* L$ で表す．φ に対応する X 上の線形系は

$$\Lambda = \{\varphi^* L \mid L \text{ is a line contained in } \mathbb{P}^2\}$$

である．因子 φ^*L のサポートを $\mathrm{Supp}(\varphi^*L)$ で表す．X 上の点 P に対して, P における φ^*L の重複度を $\mathrm{ord}_P(\varphi^*L)$ で表す．いま

$$\alpha_P = \min\{\mathrm{ord}_P(\varphi^*L) \mid \varphi^*L \in \Lambda, P \in \mathrm{supp}(\varphi^*L)\}$$

とおくと, 直線 $\widetilde{L}$ であって, $\beta_P := \mathrm{ord}_P(\varphi^*\widetilde{L}) > \alpha_P$ をみたすものがただ 1 つ存在する．この直線 $\widetilde{L}$ を P における osculating line とよぶことにする．また, $(0, \alpha_P, \beta_P)$ を (Λ, P)-order sequence という．点 $\varphi(P)$ を通る直線 $\widetilde{L}$ が $\varphi(P)$ での接線であることを, $\widetilde{L}$ が $\varphi^{-1}(\varphi(P))$ に含まれるある点での osculating line であることとして定義する．直線 $\widetilde{L}$ が $\varphi(P)$ における接線であるための必要十分条件は, $m_{\varphi(P)} < I_{\varphi(P)}(\varphi(X), \widetilde{L})$ となることである．ここで, $I_{\varphi(P)}(\varphi(X), \widetilde{L})$ は $\varphi(X)$ と $\widetilde{L}$ の $\varphi(P)$ における交差重複度, $m_{\varphi(P)}$ は $\varphi(X)$ の $\varphi(P)$ における重複度を表す.

次に, $\varphi(P)$ からの射影 $\pi_{\varphi(P)}$ を考え, $\hat{\pi}_{\varphi(P)} := \pi_{\varphi(P)} \circ \varphi : X \to \mathbb{P}^1$ とおく．射影と分岐指数の関係を思い出そう．$\varphi^{-1}(\varphi(P)) = \{P_1, \ldots, P_n\}$ とし, $(0, \alpha_{P_i}, \beta_{P_i})$ を (Λ, P_i)-order sequence とする．$Q \in X$ における $\hat{\pi}_{\varphi(P)}$ の分岐指数を $e_Q(\hat{\pi}_{\varphi(P)})$ で表す．次の事実はよく知られている.

命題 2.1. $Q \in X \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ とするとき, 次が成り立つ.

(1) $e_Q(\hat{\pi}_{\varphi(P)}) = \mathrm{ord}_Q(\varphi^*\overline{\varphi(P)\varphi(Q)})$.
(2) $i = 1, \ldots, n$ に対して, $e_{P_i}(\hat{\pi}_{\varphi(P)}) = \beta_{P_i} - \alpha_{P_i}$.

最後に, Galois 被覆に関する次の事実を思い出そう ([18, III. 7.1, 7.2, 8.2] 参照).

命題 2.2. $\theta : X \to Y$ を非特異既約射影曲線間の全射な射とし, θ が誘導する関数体の拡大 $k(X)/\theta^*k(Y)$ が Galois 群 G をもつ Galois 拡大であるとする．このとき, 次が成立.

(1) $P, Q \in X$ で $\theta(P) = \theta(Q)$ ならば, $\sigma \in G$ が存在して, $\sigma(P) = Q$ となる.
(2) $P, Q \in X$ で $\theta(P) = \theta(Q)$ ならば, $e_P(\theta) = e_Q(\theta)$.
(3) 各点 $P \in X$ に対して, $|G(P)| = e_P(\theta)$.

ここで, $G(P)$ は P の G における固定部分群を表す.

3 主定理

X を k 上の非特異既約射影曲線とし, $k(X)$ を X の関数体とする．X の k 上の自己同型群を $\mathrm{Aut}(X)$ で表す．有限部分群 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ と $P \in X$ に対して, P の G における

固定部分群 (resp. G による P の軌道) を $G(P)$ (resp. $G \cdot P$) で表す. また, X の G による商曲線, すなわち, $k(X)$ の G による固定体 $k(X)^G$ に対応する非特異既約射影曲線を X/G で表す. ここで, 自然に $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Aut}_k(k(X))$ と考えていて, 以下もこのように同一視する. 次が導入の部分で述べた, 深澤氏の判定法 [6] を拡張したものである.

定理 3.1. G_1, G_2 を $\mathrm{Aut}(X)$ の有限部分群, P_1, P_2 を X 上の相異なる 2 点とする. このとき, 以下の (I), (II) は同値である.

(I) 双有理埋め込み $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(X)$ は相異なる内 Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, $i = 1, 2$ に対して $G_{\varphi(P_i)} = G_i$ で, かつ $L := \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではないようなものが存在する.

(II) 以下の 3 条件が成立する.

(a) $X/G_1 \cong \mathbb{P}^1, X/G_2 \cong \mathbb{P}^1$,

(b) $G_1 \cap G_2 = \{1\}$,

(c) 以下のうちの 1 つが成り立つ.

(c-i) $P_1 \notin G_1 \cdot P_2$, $P_2 \notin G_2 \cdot P_1$, $G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 \neq \emptyset$, かつ $|G_1(P_2)| = |G_2(P_1)|$.

(c-ii) $G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 = \emptyset$.

(c-iii) $P_1 \notin G_1 \cdot P_2$, $G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 \neq \emptyset$ かつ $|G_1(P_2)| > |G_2(P_1)|$.

さらに, 上の (I) のような φ に対して, 次が成り立つ.

(i) L が $\varphi(P_2)$ における接線ではなく, かつ $L \cap \varphi(X) \supsetneq \{\varphi(P_1), \varphi(P_2)\}$ であるための必要十分条件は, 条件 (c-i) が成り立つことである.

(ii) L が $\varphi(P_2)$ における接線ではなく, かつ $L \cap \varphi(X) = \{\varphi(P_1), \varphi(P_2)\}$ であるための必要十分条件は, 条件 (c-ii) が成り立つことである.

(iii) L が $\varphi(P_2)$ における接線であるための必要十分条件は, 条件 (c-iii) が成り立つことである.

定理 3.1(I) にあるような φ に対して, 次が成り立つ.

定理 3.2. φ を定理 3.1(I) にあるような双有理埋め込みとし, Λ を φ に対応する X 上の線形系, $(0, \alpha_P, \beta_P)$ を (Λ, P)-order sequence とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\varphi(P_1)$ における $\varphi(X)$ の重複度 $m_{\varphi(P_1)}$ は次の値に等しい.

$$|G_2(P_1)| \cdot |G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)|.$$

(2) 因子 $\sum_{P\in\varphi^{-1}(\varphi(P_1))}\alpha_P P$ は次に等しい.

$$\sum_{Q\in G_2\cdot P_1\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)}|G_2(P_1)|Q.$$

(3) $\varphi(P_2)$ における $\varphi(X)$ の重複度 $m_{\varphi(P_2)}$ は次の値に等しい.

$$|G_1(P_2)|\cdot|G_1\cdot P_2\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)|+(|G_1(P_2)|-|G_2(P_1|)\cdot|G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1|.$$

(4) 因子 $\sum_{P\in\varphi^{-1}(\varphi(P_2))}\alpha_P P$ は次に等しい.

$$\sum_{R\in G_1\cdot P_2\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)}|G_1(P_2)|R+\sum_{S\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1}(|G_1(P_2)|-|G_2(P_1)|)S.$$

(5) 定理 3.1 における (iii) の場合, 各点 $P\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1$ に対して, 等式 $\beta_P=|G_1(P_2)|$ が成り立つ.

(6) 因子 φ^*L は次に等しい.

$$\sum_{Q\in G_2\cdot P_1\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)}|G_2(P_1)|Q+\sum_{R\in G_1\cdot P_2}|G_1(P_2)|R.$$

定理 3.1, 3.2 を射影直線 $\mathbb{P}^1$ に適用し, 次のように例が構成できる.

定理 3.3. 次のような双有理埋め込み $\varphi:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^2$ が存在する.

(1) $p=3$, $\deg(\varphi(\mathbb{P}^1))=14$ であり, non-smooth Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)\in\varphi(\mathbb{P}^1)$ があり, $m_{\varphi(P_1)}=4$, $m_{\varphi(P_2)}=8$, $G_{\varphi(P_1)}\cong\mathbf{D}_5$, $G_{\varphi(P_2)}\cong\mathrm{AGL}(1,\mathbb{F}_3)$ で, $L=\overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ いずれにおいても接線ではない. $\mathrm{Supp}(\varphi^*L)$ に含まれる各点で second order は 2 である.

(2) $p\neq 2,5$, $\deg(\varphi(\mathbb{P}^1))=16$ であり, non-smooth Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)\in\varphi(\mathbb{P}^1)$ があり, $m_{\varphi(P_1)}=4$, $m_{\varphi(P_2)}=11$, $G_{\varphi(P_1)}\cong\mathbf{A}_4$, $G_{\varphi(P_2)}\cong\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ で, $L=\overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではなく, L は $\varphi(P_2)$ における接線である. 各 $Q\in G_{\varphi(P_1)}\cdot P_2\setminus\{P_2\}$ (resp. 各 $Q\in G_{\varphi(P_2)}\cdot P_1$) において, second order は 2 (resp. 1) に等しく, P_2 において, third order は 2 に等しい.

(3) $p\neq 2,5$, $\deg(\varphi(\mathbb{P}^1))=28$ であり, non-smooth Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)\in\varphi(\mathbb{P}^1)$ があり, $m_{\varphi(P_1)}=4$, $m_{\varphi(P_2)}=23$, $G_{\varphi(P_1)}\cong\mathbf{S}_4$, $G_{\varphi(P_2)}\cong\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ で, $L=\overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではなく, L は $\varphi(P_2)$ における接線である. 各 $Q\in G_{\varphi(P_1)}\cdot P_2\setminus\{P_2\}$ (resp. P_2, 各 $Q\in G_{\varphi(P_2)}\cdot P_1\setminus\{P_2\}$) において, second order は 4 (resp. 3, 1) に等しく, P_2 において, third order は 4 に等しい.

4　定理 3.1, 3.2 の証明

前と同様の記号を用いる．次の補題は定理 3.1 が 2 つの内 Galois 点をもつすべての状況を表現していることを示している．

補題 4.1. $P_1, P_2 \in X$, $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ を相異なる内 Galois 点とし，$L = \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ とおく．このとき，$m_{\varphi(P_1)} = I_{\varphi(P_1)}(\varphi(X), L)$ または $m_{\varphi(P_2)} = I_{\varphi(P_2)}(\varphi(X), L)$ が成り立つ．

証明. 各 i, j に対して，$(0, \alpha_{P_{ij}}, \beta_{P_{ij}})$ は (Λ, P_{ij})-order sequence を表すものとする．いま

$$\varphi^{-1}(\varphi(P_1)) = \{P_{11} = P_1, P_{12}, \ldots, P_{1n_1}\},$$
$$\varphi^{-1}(\varphi(P_2)) = \{P_{21} = P_2, P_{22}, \ldots, P_{2n_2}\}$$

とおく．$m_{\varphi(P_1)} < I_{\varphi(P_1)}(\varphi(X), L)$ かつ $m_{\varphi(P_2)} < I_{\varphi(P_2)}(\varphi(X), L)$ であるとして矛盾を導く．命題 2.2 より，$\varphi^{-1}(\varphi(P_2))$ (resp. $\varphi^{-1}(\varphi(P_1))$) に含まれる各点において，$\hat{\pi}_{\varphi(P_1)}$ (resp. $\hat{\pi}_{\varphi(P_2)}$) の分岐指数は $|G_{\varphi(P_1)}(P_2)|$ (resp. $|G_{\varphi(P_2)}(P_1)|$) と一致する．命題 2.1 (1) と命題 2.2 より，各 j に対して $|G_{\varphi(P_1)}(P_2)|$ は $\mathrm{ord}_{P_{2j}}(\varphi^* L)$ に等しい．同様に，各 i に対して，$|G_{\varphi(P_2)}(P_1)|$ は $\mathrm{ord}_{P_{1i}}(\varphi^* L)$ に等しい．L は $\varphi(P_1)$ (resp. $\varphi(P_2)$) における接線であるから，ある i_0 (resp. j_0) があり，

$$\beta_{P_{1i_0}} = \mathrm{ord}_{P_{1i_0}}(\varphi^* L) \text{ (resp. } \beta_{P_{2j_0}} = \mathrm{ord}_{P_{2j_0}}(\varphi^* L))$$

となる．命題 2.1 (2) と命題 2.2 より，

$$|G_{\varphi(P_1)}(P_2)| = \beta_{P_{1i_0}} - \alpha_{P_{1i_0}} \text{ (resp. } |G_{\varphi(P_2)}(P_1)| = \beta_{P_{2j_0}} - \alpha_{P_{2j_0}})$$

が成り立つ．したがって，以下のように矛盾を得る．

$$\begin{aligned}|G_{\varphi(P_2)}(P_1)| &< |G_{\varphi(P_2)}(P_1)| + \alpha_{P_{2j_0}} = \beta_{P_{2j_0}} = \mathrm{ord}_{P_{2j_0}}(\varphi^* L) = |G_{\varphi(P_1)}(P_2)| \\ &< |G_{\varphi(P_1)}(P_2)| + \alpha_{P_{1i_0}} = \beta_{P_{1i_0}} = \mathrm{ord}_{P_{1i_0}}(\varphi^* L) = |G_{\varphi(P_2)}(P_1)|.\end{aligned}$$

□

はじめに，定理 3.1 を示す．

定理 3.1 の証明. (II) ⇒ (I) を示す．定理 3.1 の条件 (a), (b), (c) が成り立つとする．条件 (a) により，$f, g \in k(X)$ であって，f, g はそれぞれ $k(X)^{G_1}$, $k(X)^{G_2}$ の k 上の生成元であり，

$$(f)_\infty = \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2), \ (g)_\infty = \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1)$$

となるようなものをとる．ここで, $(f)_\infty$ (resp. $(g)_\infty$) は f (resp. g) の極因子である．この f, g を用いて, 射 $\varphi = (f : g : 1) : X \to \mathbb{P}^2$ を考える．はじめに, $\varphi(P_1) = (0 : 1 : 0)$ を示す．$n_g := \mathrm{ord}_{P_1}((g)_\infty)$ とおく．n_g は $|G_2(P_1)|$ に等しい．t_{P_1} を P_1 における局所パラメータとする．条件 (c) により, $P_1 \notin G_1 \cdot P_2 = \mathrm{supp}((f)_\infty)$ であるから,

$$\mathrm{ord}_{P_1}(t_{P_1}^{n_g} f) = n_g + \mathrm{ord}_{P_1}(f) \geq n_g > 0$$

が成り立つ．よって, $\varphi(P_1) = (0 : 1 : 0)$ となる．次に $\varphi(P_2) = (1 : 0 : 0)$ を示す．$n_f = \mathrm{ord}_{P_2}((f)_\infty)$ とおく．n_f は $|G_1(P_2)|$ に等しい．t_{P_2} を P_2 における局所パラメータとする．$P_2 \notin G_2 \cdot P_1 = \mathrm{supp}((g)_\infty)$ であるとき,

$$\mathrm{ord}_{P_2}(t_{P_2}^{n_f} g) = n_f + \mathrm{ord}_{P_2}(g) \geq n_f > 0$$

である．$P_2 \in G_2 \cdot P_1$ であるとき, 条件 (c-iii) が成り立つ．ゆえに,

$$\mathrm{ord}_{P_2}(t_{P_2}^{n_f} g) = n_f + \mathrm{ord}_{P_2}(g) = |G_1(P_2)| - |G_2(P_1)| > 0$$

となる．したがって, $\varphi(P_2) = (1 : 0 : 0)$ が成り立つ．[6, Proposition 1] における証明と同様に, 条件 (b) より, φ が双有理埋め込みであることが従う．射 $(f : 1)$ (resp. $(g : 1)$) はそれぞれ点 $\varphi(P_1) = (0 : 1 : 0)$ (resp. $\varphi(P_2) = (1 : 0 : 0)$) からの射影と一致する．ゆえに, $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ は相異なる内 Galois 点であり, $G_{\varphi(P_i)} = G_i$ である．$L = \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ が $\varphi(P_1)$ における接線ではないことを示そう．L が $\varphi(P_1)$ における接線であるとして矛盾を導く．このとき, $Q \in \varphi^{-1}(\varphi(P_1))$ で, $Q \in G_1 \cdot P_2$ であるようなものが存在する．Λ を φ に対応する X 上の線形系とし, $(0, \alpha_Q, \beta_Q)$ を (Λ, Q)-order sequence とする．L は Q における osculating line であるから, 命題 2.1 (1), 命題 2.2 より,

$$|G_2(P_1)| = \mathrm{ord}_Q(\varphi^* L) = \beta_Q$$

である．一方で, 命題 2.1 (2), 命題 2.2 より,

$$|G_1(P_2)| = \beta_Q - \alpha_Q$$

が成り立つ．よって, $G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 \neq \emptyset$ かつ $|G_1(P_2)| < |G_2(P_1)|$ が成り立つ．しかしこれは, 条件 (c) に反する．したがって, L は $\varphi(P_1)$ における接線ではない．

次に (I) ⇒ (II) を示す．双有理埋め込み $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(X)$ は相異なる内 Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, $i = 1, 2$ に対して $G_{\varphi(P_i)} = G_i$ で, かつ $L = \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではないようなものが存在するとする．はじめに,

$$k(X)^{G_i} = (\hat{\pi}_{\varphi(P_i)})^*(k(\mathbb{P}^1)) \cong k(\mathbb{P}^1)$$

が $i=1,2$ について成り立つことより, 条件 (a) が成り立つ. [6, Theorem 1] の証明と同様に, 条件 (b) が成り立つ. L は $\varphi(P_1)$ における接線ではないから, $P_1 \notin G_1 \cdot P_2$ が成り立つ. 条件 (c) を以下の (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) に分けて示す.

(Ⅰ) L は $\varphi(P_2)$ における接線ではなく, かつ

$$L \cap \varphi(X) \supsetneq \{\varphi(P_1), \varphi(P_2)\}$$

であるとする. このとき, 条件 (c-ⅰ) が成り立つことを示す. L は $\varphi(P_2)$ における接線ではなく, $(L \cap \varphi(X)) \setminus \{\varphi(P_1), \varphi(P_2)\} \neq \emptyset$ であるから, $P_2 \notin G_2 \cdot P_1$, $G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 \neq \emptyset$ を得る. ここで, 点

$$Q \in \varphi^{-1}((L \cap \varphi(X)) \setminus \{\varphi(P_1), \varphi(P_2)\})$$

をとる. 命題 2.1 (1), 命題 2.2 より, 等式

$$|G_1(P_2)| = \mathrm{ord}_Q(\varphi^* L) = |G_2(P_1)|$$

を得る. ゆえに, 条件 (c-ⅰ) が成り立つ.

(Ⅱ) L は $\varphi(P_2)$ における接線ではなく, かつ

$$L \cap \varphi(X) = \{\varphi(P_1), \varphi(P_2)\}$$

であるとする. このとき, $G_1 \cdot P_2 = \varphi^{-1}(\varphi(P_2))$, $G_2 \cdot P_1 = \varphi^{-1}(\varphi(P_1))$ であり,

$$G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 = \emptyset$$

が成り立つ. ゆえに, 条件 (c-ⅱ) が成り立つ.

(Ⅲ) L は $\varphi(P_2)$ における接線であるとする. 条件 (c-ⅲ) を示す. L は $\varphi(P_2)$ における接線であるから, $Q \in \varphi^{-1}(\varphi(P_2))$ であって, $Q \in G_2 \cdot P_1$ であるようなものが存在する. $G_1 \cdot P_2 \supset \varphi^{-1}(\varphi(P_2))$ であるから, $G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 \neq \emptyset$ である. Λ を φ に対応する X 上の線形系とし, $(0, \alpha_Q, \beta_Q)$ を (Λ, Q)-order sequence とする. L は Q における osculating line であるから, 命題 2.1 (1), 命題 2.2 より,

$$|G_1(P_2)| = \mathrm{ord}_Q(\varphi^* L) = \beta_Q$$

が成り立つ. 一方, 命題 2.1 (2), 命題 2.2 より, 等式

$$|G_2(P_1)| = \beta_Q - \alpha_Q$$

が成り立ち, $|G_1(P_2)| > |G_2(P_1)|$ を得る. したがって, 条件 (c-ⅲ) が成り立つ.

最後に, 定理 3.1 の条件 (i), (ii), (iii) を示す. φ を定理 3.1 にあるような双有理埋め込みとする. このとき, 条件 (c-i), (c-ii), (c-iii) のいずれかが成り立つ. これらの条件は互いに排反であるから, (i), (ii), (iii) において, 左側の条件から右側側の条件が導けることを示せば十分だが, これは既に上の証明の中で完了している. □

続いて, 定理 3.2 を示す.

定理 3.2 の証明. φ を定理 3.1 にあるような双有理埋め込みとし, Λ を φ に対応する X 上の線形系とする. いま

$$\varphi^{-1}(\varphi(P_1)) = \{P_{11} = P_1, P_{12}, \ldots, P_{1n_1}\},$$
$$\varphi^{-1}(\varphi(P_2)) = \{P_{21} = P_2, P_{22}, \ldots, P_{2n_2}\}$$

とおき, 各 i, j に対して, $(0, \alpha_{P_{ij}}, \beta_{P_{ij}})$ を (Λ, P_{ij})-order sequence とする.

はじめに, 定理 3.2 (1), (2) を示そう. 射 $\hat{\pi}_{\varphi(P_1)}$ に対応する X 上の線形系は

$$\left\{ E - \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}} P_{1i} \;\middle|\; E \in \Lambda, E \geq \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}} P_{1i} \right\}$$

であり, $\hat{\pi}_{\varphi(P_1)}$ は Galois 被覆より, 次の因子の等式が成り立つ.

$$\varphi^* L - \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}} P_{1i} = (\hat{\pi}_{\varphi(P_1)})^*([L]) = \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2).$$

ここで, $[L]$ は直線 L に対応する点 $[L] \in \mathbb{P}^1$ の因子を表す. 命題 2.1 (1), 命題 2.2 より, 等式 $|G_2(P_1)| = \mathrm{ord}_{P_{1i}}(\varphi^* L)$ がすべての i について成り立つ. L は $\varphi(P_1)$ における接線ではないので, 等式 $\alpha_{P_{1i}} = |G_2(P_1)|$ がすべての i で成り立つ. 容易にわかるように, 等式

$$(\varphi^{-1}(\varphi(P_1))) \cup (G_1 \cdot P_2) = \mathrm{supp}(\varphi^* L) = (G_2 \cdot P_1) \cup (G_1 \cdot P_2)$$

が成り立つ. $\varphi^{-1}(\varphi(P_1))$ と $G_1 \cdot P_2$ の交わりは空だから,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\varphi(P_1)) &= ((\varphi^{-1}(\varphi(P_1))) \cup (G_1 \cdot P_2)) \setminus (G_1 \cdot P_2) \\ &= G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1) \end{aligned}$$

を得る. ゆえに, 等式

$$\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}} P_{1i} = \sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q$$

が成り立ち, 定理 3.2 (2) を得る. また,

$$m_{\varphi(P_1)} = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}}$$

であるから, 定理 3.2 (1) を得る.

次に, 定理 3.2 (6) を示そう. 上の計算より, 等式

$$\varphi^* L = \sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q + \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2)$$

が成り立つ. ここで,

$$\sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2) = \sum_{R \in G_1 \cdot P_2} |G_1(P_2)| R$$

であるから, 定理 3.2 (6) を得る.

最後に, 定理 3.2 (3), (4), (5) を示そう. 等式

$$\sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1) = \sum_{S \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1} |G_2(P_1)| S + \sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q$$

が成り立つから, 以下の因子の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\sum_{R \in G_1 \cdot P_2 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_1(P_2)| R \\
&\quad + \sum_{S \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1} (|G_1(P_2)| - |G_2(P_1)|) S + \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1) \\
&= \left(\sum_{R \in G_1 \cdot P_2 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_1(P_2)| R + \sum_{S \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1} |G_1(P_2)| S \right) \\
&\quad + \sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q \\
&= \sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q + \sum_{R \in G_1 \cdot P_2} |G_1(P_2)| R \\
&= \varphi^* L.
\end{aligned}$$

ここで, 最後の等式は定理 3.2 (6) より従う. ゆえに, 因子の等式

$$\begin{aligned}
\varphi^* L - \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1) &= \sum_{R \in G_1 \cdot P_2 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_1(P_2)| R \\
&\quad + \sum_{S \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1} (|G_1(P_2)| - |G_2(P_1)|) S
\end{aligned}$$

が成り立つ．一方で, 射 $\hat{\pi}_{\varphi(P_2)}$ に対応する X 上の線形系は

$$\left\{ E - \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{P_{2j}} P_{2j} \;\middle|\; E \in \Lambda, E \geq \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{P_{2j}} P_{2j} \right\}$$

であり, $\hat{\pi}_{\varphi(P_2)}$ は Galois 被覆であるから, 以下の因子の等式が成り立つ.

$$\varphi^* L - \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{P_{2j}} P_{2j} = (\hat{\pi}_{\varphi(P_2)})^*([L]) = \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1).$$

ゆえに, 因子の等式

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{P_{2j}} P_{2j} &= \varphi^* L - \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1) \\ &= \sum_{R \in G_1 \cdot P_2 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_1(P_2)| R \\ &\quad + \sum_{S \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1} (|G_1(P_2)| - |G_2(P_1)|) S \end{aligned}$$

が成り立ち, 定理 3.2 (4) を得る．ここで,

$$m_{\varphi(P_2)} = \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{P_{2j}}$$

より, 定理 3.2 (3) を得る．定理 3.1 の条件 (c-iii) が成り立つとする．このとき,

$$0 < |G_1(P_2)| - |G_2(P_1)| < |G_1(P_2)|$$

が成り立つ．定理 3.2 (6) より, 等式 $|G_1(P_2)| = \mathrm{ord}_P(\varphi^* L)$ が各点 $P \in G_1 \cdot P_2$ について成り立つ．定理 3.2 (4) より, 各 $P \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1$ において, second (Λ, P)-order は $|G_1(P_2)| - |G_2(P_1)|$ と一致する．ゆえに, 各点 $P \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1$ において, third (Λ, P)-order は $|G_1(P_2)|$ と一致する．よって, 定理 3.2 (5) が成り立つ. □

5　定理 3.3 の証明

定理 3.1 と 3.2 を射影直線 $\mathbb{P}^1$ に適用することを考える．この場合, 定理 3.1 の条件 (a) は Lüroth の定理よりいつも成り立つ．以下, $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ を射影変換群 $\mathrm{PGL}(2, k)$ と同一視する．また, $Q_\infty := (1:0)$, $a \in k$ に対して, $Q_a := (a:1) \in \mathbb{P}^1$ とおく.

定理 3.3 の証明. $p \neq 2, 5$ とし, $i \in k$ を多項式 $T^2+1 \in k[T]$ の根, ξ を 1 の原始 5 乗根とする.

(1) $p=3$, $P_1 = Q_0$, $P_2 = Q_\xi$ とする. 次の 2 つの集合を考える.

$$G_1 = \left\langle \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \ G_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

G_1 について

$$G_1 = \left\langle \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \cong \mathbf{D}_5$$

であることが知られている. ここで, $\mathbf{D}_5$ は 2 面体群を表す ([2, Theorem C] 参照). また,

$$G_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle \cong \mathrm{AGL}(1, \mathbb{F}_3)$$

が容易にわかる. ここで, $\mathrm{AGL}(1, \mathbb{F}_3)$ は $\mathbb{F}_3$ 上の一般アフィン群を表す. 直接計算により, 次がわかる.

$$G_1 \cap G_2 = \{1\},$$

$$G_1 \cdot P_2 = \{Q_1, Q_\xi, Q_{\xi^2}, Q_{\xi^3}, Q_{\xi^4}\},$$

$$G_2 \cdot P_1 = \{Q_{-1}, Q_0, Q_1\},$$

$$G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 = \{Q_1\},$$

$$G_1(P_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \xi^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$G_2(P_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

したがって, 定理 3.1 の条件 (b) と (c-i) が成り立つ. よって, 双有理埋め込み $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(\mathbb{P}^1)$ は相異なる内 Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, $G_{\varphi(P_1)} \cong \mathbf{D}_5$, $G_{\varphi(P_2)} \cong \mathrm{AGL}(1, \mathbb{F}_3)$ で, $L = \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではなく, L は $\varphi(P_2)$ における接線ではないようなものが存在する. 定理 3.2 (1), (3), (6) より, $m_{\varphi(P_1)} = 4$, $m_{\varphi(P_2)} = 8$, $\deg(\varphi(\mathbb{P}^1)) = 14$ である. 定理 3.2 (6) より, $\mathrm{Supp}(\varphi^* L)$ に含まれる各点において, second order は 2 に等しい.

(2) $P_1 = Q_\xi$, $P_2 = Q_1$ とする. G_1, G_2 として

$$G_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \right\rangle, \ G_2 = \left\langle \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

を考える．$G_2 \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ である．また,

$$G_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \right\rangle \cong \mathbf{A}_4$$

である．ここで, $\mathbf{A}_4$ は交代群である ([2, Theorem C] 参照). 5 と 12 は互いに素であるから, 定理 3.1 の条件 (b) が成り立つ．直接計算により, 次が成り立つことがわかる．

$$G_1 \cdot P_2 = \{Q_{-i}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_i, Q_\infty\},$$

$$G_2 \cdot P_1 = \{Q_1, Q_\xi, Q_{\xi^2}, Q_{\xi^3}, Q_{\xi^4}\},$$

$$G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 = \{Q_1 = P_2\},$$

$$G_1(P_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$G_2(P_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

したがって, 定理 3.1 の条件 (c-iii) が成り立つ．よって, 双有理埋め込み $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(\mathbb{P}^1)$ は相異なる内 Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, $G_{\varphi(P_1)} \cong \mathbf{A}_4$, $G_{\varphi(P_2)} \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ で, $L = \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではなく, L は $\varphi(P_2)$ における接線であるようなものが存在する． 定理 3.2 (1), (3), (6) より, $m_{\varphi(P_1)} = 4$, $m_{\varphi(P_2)} = 11$, $\deg(\varphi(\mathbb{P}^1)) = 16$ である．定理 3.2 (2), (4), (5) により, 各 $Q \in G_1 \cdot P_2 \setminus \{P_2\}$ (resp. 各 $Q \in G_2 \cdot P_1$) において, second order は 2 (resp. 1) に等しく, P_2 において, third order は 2 に等しい.

(3) $P_1 = Q_\xi$, $P_2 = Q_1$ とする．次の 2 つの群を考える．

$$G_1 = \left\langle \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right\rangle,$$

$$G_2 = \left\langle \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$G_2 \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ である．また,

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \right\rangle \triangleleft G_1 \cong \mathbf{S}_4$$

が成り立つ．ここで, $\mathbf{S}_4$ は対称群を表す ([2, Theorem C] 参照). 5, 24 は互いに素であるから, 定理 3.1 の条件 (b) が成り立つ．直接計算により, 次が成り立つことがわかる．

$$G_1 \cdot P_2 = \{Q_{-i}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_i, Q_\infty\},$$

$$G_2 \cdot P_1 = \{Q_1, Q_\xi, Q_{\xi^2}, Q_{\xi^3}, Q_{\xi^4}\},$$

$$G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 = \{Q_1 = P_2\},$$

$$G_1(P_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$G_2(P_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

したがって, 定理 3.1 の条件 (c-iii) が成り立つ. よって, 双有理埋め込み $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(\mathbb{P}^1)$ は相異なる 2 つの内 Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, $G_{\varphi(P_1)} \cong \mathbf{S}_4$, $G_{\varphi(P_2)} \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ で, $L = \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではなく, L は $\varphi(P_2)$ における接線であるようなものが存在する. 定理 3.2 (1), (3), (6) より, $m_{\varphi(P_1)} = 4$, $m_{\varphi(P_2)} = 23$, $\deg(\varphi(\mathbb{P}^1)) = 28$ である. 定理 3.2 (2), (4), (5) より, 各 $Q \in G_1 \cdot P_2 \setminus \{P_2\}$ (resp. P_2, 各 $Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus \{P_2\}$) において, second order は 4 (resp. 3, 1) に等しく, P_2 において, third order は 4 に等しい. □

6 付録

深澤氏は論文 [9] において, smooth Galois 点と外 Galois 点をそれぞれ少なくとも 1 つずつもつような平面曲線が存在するための判定法を与えた. また, 同論文で深澤氏は, smooth Galois 点, 外 Galois 点それぞれに付随する 2 つの群が半直積を生成するような平面曲線の分類も与えている. ここでは, 深澤氏の [9] の判定法の, non-smooth Galois 点の場合を含んだすべての場合への拡張について述べる.

はじめに, 1 つ補題を示す.

補題 6.1. *$C \subset \mathbb{P}^2$ を次数 $d = \deg(C) \geq 2$ の平面曲線, P を C の内 Galois 点, Q を C の外 Galois 点とし, $L := \overline{PQ}$ とおく. このとき, L が P での接線であるための必要十分条件は, $L \cap C = \{P\}$ となることである.*

証明. $r : X \to C$ を normalization とし, r と $C \subset \mathbb{P}^2$ を合成した射を $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ とする. φ に対応する X 上の線形系を Λ, $\varphi^{-1}(P) = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ とし, $(0, \alpha_i, \beta_i)$ を (Λ, P_i)-order sequence とする. はじめに, $L \cap C = \{P\}$ であるとする. このとき, L が P における接線となることを示す. いま, Q が外 Galois 点であるから, 因子の等式

$$\varphi^* L = \sum_{i=1}^{n} |G_Q(P_1)| P_i$$

が成り立つ．一方, P が内 Galois 点より, ある点 $R \in X$ が存在して, 因子の等式

$$\varphi^* L - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i = \sum_{\sigma \in G_P} \sigma(R)$$

が成り立つ．ここで, 1 つ目の因子の等式より, $\mathrm{Supp}(\varphi^* L) = \varphi^{-1}(P)$ である．したがって, $\{\sigma(R) \mid \sigma \in G_P\} \subset \varphi^{-1}(P)$ となる．ゆえに, L は集合 $\{\sigma(R) \mid \sigma \in G_P\}$ に含まれる各点での osculating line である．よって, L は P における接線である．

次に逆を背理法で示す．L が P における接線で, $L \cap C \supsetneq \{P\}$ であるとして矛盾を導く．L は P における接線であるから, L は $\varphi^{-1}(P)$ に含まれるある点での osculating line である．L は P_1 における osculating line であるとして一般性を失わない．いま, $R \in (L \cap C) \setminus \{P\}$ をとり, $R_0 \in \varphi^{-1}(R)$ を任意に 1 つとり固定しておく．P は内 Galois 点で, L は P_1 における osculating line であるから, 因子の等式

$$\varphi^* L - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i = \sum_{\sigma \in G_P} \sigma(P_1)$$

が成り立つ．一方で, Q は外 Galois 点であるから, 因子の等式

$$\varphi^* L = \sum_{i=1}^{n} |G_Q(P_1)| P_i + \sum_{S \in \mathrm{Supp}(\varphi^* L) \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}} |G_Q(P_1)| S$$

が成り立つ．$R_0 \notin \{P_1, \ldots, P_n\}$ であるから, $|G_P(P_1)| = \mathrm{ord}_{R_0}(\varphi^* L) = |G_Q(P_1)|$ である．しかし, P_1 について, $|G_Q(P_1)| = \mathrm{ord}_{P_1}(\varphi^* L) = \alpha_1 + |G_P(P_1)| > |G_P(P_1)|$ で矛盾が生じる．したがって, L が P における接線であるとき, $L \cap C = \{P\}$ である． □

論文 [9] における深澤氏の判定法は次のように拡張できる．

定理 6.2. X を非特異射影曲線, $G_1, G_2 \subset \mathrm{Aut}(X)$ を有限部分群, $P \in X$ とする．このとき, 以下の (I), (II) は同値である．

(I) 双有理埋めこみ $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ であって, 像曲線 $\varphi(X)$ は次数 $|G_2|$, $\varphi(X)$ は内 Galois 点 $\varphi(P)$, 外 Galois 点 Q をもち, かつ $G_{\varphi(P)} = G_1$, $G_Q = G_2$ となるようなものが存在する．

(II) 以下の 3 条件が成立する．
- (a) $X/G_1 \simeq \mathbb{P}^1$, $X/G_2 \simeq \mathbb{P}^1$,
- (b) $G_1 \cap G_2 = \{1\}$,
- (c) ある $\eta \in G_2$ が存在して, $G_1 \cdot \eta(P) \subset G_2 \cdot P$ であり, 以下のうち 1 つが成立.

(c-i) $P \notin G_1 \cdot \eta(P)$, $|G_1(\eta(P))| = |G_2(P)|$.

(c-ii) $|G_1(\eta(P))| < |G_2(P)|$.

証明. はじめに (II) $\Rightarrow$ (I) を示す．定理 6.2 の条件 (a), (b) そして (c) が成り立つとする．まず条件 (a) により, $f, g \in k(X)$ であって, f, g はそれぞれ $k(X)^{G_1}, k(X)^{G_2}$ の k 上の生成元であり,

$$(f)_\infty = \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(\eta(P)),\ (g)_\infty = \sum_{\tau \in G_2} \tau(P)$$

となるようなものをとる．この f, g を用いて, 射 $\varphi = (f, g, 1) : X \to \mathbb{P}^2$ を考える．はじめに, $\varphi(P) = (0 : 1 : 0)$ を示す．t_P を P における局所パラメータとし, $n_g := \mathrm{ord}_P((g)_\infty)$ とおく．ここで, $n_g = |G_2(P)|$ である．$P \notin G_1 \cdot \eta(P)$ であるとき,

$$\mathrm{ord}_P(t_P^{n_g} f) = n_g + \mathrm{ord}_P(f) \geq n_g > 0$$

である．$P \in G_1 \cdot \eta(P)$ であるとき, 条件 (c-ii) が成り立つ．このとき,

$$\mathrm{ord}_P(t_P^{n_g} f) = n_g + \mathrm{ord}_P(f) = |G_2(P)| - |G_1(\eta(P))| > 0$$

である．したがって, $\varphi(P) = (0 : 1 : 0)$ となる．定理 3.1 の証明と同様, 条件 (b) から φ が双有理埋め込みであることが従う．続いて, $\deg(\varphi(X)) = |G_2|$ を示す．因子

$$\mathrm{Bs}(\pi_{\varphi(P)}) := \sum_{R \in G_2 \cdot P \setminus (G_1 \cdot \eta(P))} |G_2(P)| R + \sum_{S \in G_1 \cdot \eta(P)} (|G_2(P)| - |G_1(\eta(P))|) S$$

を考える．ここで, 次の因子の等式が成り立つことが容易にわかる．

$$D := \mathrm{Bs}(\pi_{\varphi(P)}) + \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(\eta(P)) = \sum_{\tau \in G_2} \tau(P).$$

部分ベクトル空間 $\langle f, g, 1 \rangle \subset \mathcal{L}(D)$ に対応する線形系は, $\mathrm{Supp}(D) \cap \mathrm{Supp}((g) + D) = \emptyset$ より base-point-free である．ゆえに, $\deg(\varphi(X)) = \deg(D) = |G_2|$ となる．最後に, $\varphi(P)$ が内 Galois 点であり $G_{\varphi(P)} = G_1$ となること, $Q := (1 : 0 : 0)$ が外 Galois 点であり $G_Q = G_2$ となることを示す．$\varphi(P) = (0 : 1 : 0)$ からの射影が誘導する関数体の拡大は $k(X)/k(X)^{G_1}$ であるから, 前半の主張がわかる．$Q = (1 : 0 : 0)$ からの射影が誘導する関数体の拡大は $k(X)/k(X)^{G_2}$ であるから, Q が Galois 点で $G_Q = G_2$ であることがわかる．$\deg(\varphi(X)) = |G_2|$ であるから, Q は外 Galois 点である．

次に (I) $\Rightarrow$ (II) を示す．φ を定理 6.2 にあるような双有理埋め込みとする．条件 (a), 条件 (b) が成り立つことは, 定理 3.1 と同様なので省略する．条件 (c) を示す．$\varphi^{-1}(\varphi(P)) = \{P_1 := P, P_2, \ldots, P_n\}$, φ に対応する X 上の線形系を Λ, $(0, \alpha_i, \beta_i)$ を

(Λ, P_i)-order sequence とする．まず, $L := \overline{\varphi(P)Q}$ が $\varphi(P)$ における接線ではないときを考える．補題 6.1 より, $L \cap \varphi(X)$ は $\varphi(P)$ 以外の点 R を含む．$R_0 \in \varphi^{-1}(R)$ を任意に 1 つとり固定する．いま, Q は外 Galois 点であるから, ある $\eta \in G_2$ が存在して, $\eta(P) = R_0$ をみたす．もし, $P \in G_1 \cdot \eta(P)$ なら, L は P における osculating line であり, L は $\varphi(P)$ における接線となる．ゆえに, $P \notin G_1 \cdot \eta(P)$ である．また, Q は外 Galois 点より $|G_2(P)| = |G_2(R_0)| = \mathrm{ord}_{R_0}(\varphi^* L)$ である．また, $R_0 \notin \varphi^{-1}(\varphi(P))$ より, $\mathrm{ord}_{R_0}(\varphi^* L) = |G_1(R_0)| = |G_1(\eta(P))|$ が成り立つ．よって, $|G_1(\eta(P)) = |G_2(P)|$ である．最後に, 容易にわかるように, $G_2 \cdot P = \mathrm{Supp}(\varphi^* L) \supset G_1 \cdot \eta(P)$ である．

L が $\varphi(P)$ における接線である場合を考える．集合

$$W := \{P_i \in \varphi^{-1}(\varphi(P)) \mid \mathrm{ord}_{P_i}(\varphi^* L) = \beta_i\}$$

を考える．L が接線より, $W \neq \emptyset$ である．$\varphi(P)$ は内 Galois 点であるから, $P_i \in W$ が存在して, $W = G_1 \cdot P_i$ と表せる．一方, Q は外 Galois 点であるから, ある $\eta \in G_2$ が存在して, $\eta(P) = P_i$ となる．容易にわかるように, $G_2 \cdot P = \mathrm{Supp}(\varphi^* L) \supset W = G_1 \cdot \eta(P)$ である．Q が外 Galois 点より, $|G_2(P)| = |G_2(P_i)| = \mathrm{ord}_{P_i}(\varphi^* L) = \beta_i$ である．一方, $\varphi(P_i)$ が内 Galois 点より, $|G_1(P_i)| = \beta_i - \alpha_i$ である．したがって, $|G_2(P)| = \beta_i > \beta_i - \alpha_i = |G_1(\eta(P))|$ が成り立つ． □

謝辞

この度は貴重な講演の機会を与えていただきまして, 誠にありがとうございました．お世話人の方々をはじめ, 関係者の皆様に大変お世話になりました．深く御礼申し上げます．

参考文献

[1] H. Borges and S. Fukasawa, Galois points for double-Frobenius nonclassical curves, Finite Fields Appl. **61** (2020), 101579, 8 pages.

[2] X. Faber, Finite p-irregular subgroups of $\mathrm{PGL}_2(k)$, preprint, arXiv:1112.1999.

[3] S. Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, Geom. Dedicata **139** (2009), 211–218.

[4] S. Fukasawa, Complete determination of the number of Galois points for a smooth plane curve, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **129** (2013), 93–113.

[5] S. Fukasawa, Galois points for a non-reflexive plane curve of low degree, Finite Fields Appl. **23** (2013), 69–79.

[6] S. Fukasawa, A birational embedding of an algebraic curve into a projective plane with two Galois points, J. Algebra **511** (2018), 95–101.

[7] S. Fukasawa, Birational embeddings of the Hermitian, Suzuki and Ree curves with two Galois points, Finite Fields Appl. **57** (2019), 60–67.

[8] S. Fukasawa, Galois lines for the Artin-Schreier-Mumford curve, Finite Fields Appl., **75**(2021), 101894, 10 pages.

[9] S. Fukasawa, Algebraic curves admitting inner and outer Galois points, preprint, arXiv:2010.00815.

[10] S. Fukasawa and K. Higashine, A birational embedding with two Galois points for certain Artin–Schreier curves, Finite Fields Appl. **52** (2018), 281–288.

[11] S. Fukasawa and K. Higashine, Galois lines for the Giulietti-Korchmáros curve, Finite Fields Appl. **57** (2019), 268–275.

[12] S. Fukasawa and K. Waki, Examples of plane rational curves with two Galois points in positive characteristic, Finite Fields and their Applications: Proceedings of the 14th International Conference on Finite fields and their Applications, Vancouver, June 3–7, 2019, pp.181–188, De Gruyter, 2020.

[13] S. Fukasawa and K. Waki, Examples of plane rational curves with two Galois points in positive characteristic, II, preprint, arXiv:2103.022118.

[14] H. Hayashi and H. Yoshihara, Galois group at each point for some self-dual curves, Geometry **2013** (2013), Article ID 369420, 6 pages.

[15] K. Higashine, A criterion for the existence of a plane model with two inner Galois points for algebraic curves, Hiroshima Math. J., **51** (2021), 163–176.

[16] J. W. P. Hirschfeld, G. Korchmáros and F. Torres, Algebraic curves over a finite field, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.

[17] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, J. Algebra **226** (2000), 283–294.

[18] H. Stichtenoth, Algebraic function fields and codes, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[19] T. Takahashi, Non-smooth Galois points on a quintic curve with one singular point, Nihonkai Math. J. **16** (2005), 57–66.

[20] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra

239 (2001), 340–355.

[21] H. Yoshihara and S. Fukasawa, List of problems, available at:
https://sites.google.com/sci.kj.yamagata-u.ac.jp/fukasawa-lab/open-questions-english