カラビ・ヤウ超曲面の幾何転移

Geometric transitions for Calabi–Yau hypersurfaces

三浦 真人 *

概要

カラビ・ヤウ多様体の幾何転移とは、双有理収縮とそれに続く変形非特異化によって、二つのカラビ・ヤウ多様体を結びつける操作である。中でも、トーリック多様体の超曲面として記述されるようなカラビ・ヤウ多様体に対しては、反射的多面体の包含関係に伴う幾何転移というものが存在する。この形のカラビ・ヤウ超曲面の幾何転移は、より基本的な退化と収縮に分解することができ、トーリック森理論を適用して調べることが可能である。本稿では、この観点からの研究を通じて分かった事実を紹介し、未解決の問題についても概説する。

1 はじめに

複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体は、超弦理論においては時空のモデルとして、代数幾何においては分類の帰着先として重視される幾何学的対象である。滑らかな複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体を**カラビ・ヤウ** *3*-**様体**（*Calabi–Yau 3-fold*）と呼ぼう。「カラビ・ヤウ 3-様体が全体としてどのように分布しているのか」という地誌学（geography）は、分野をまたがる興味深い研究テーマの一つである。

カラビ・ヤウ 3-様体の地誌学には、大きく分けて三つの重要な未解決問題がある。一つ目は、「カラビ・ヤウ 3-様体の変形族は有界か」という問題である。たとえば、ホッジ数の組 $(h^{1,1}, h^{2,1})$ が有限通りか、というような基本的なことが、まだ分かっていない。有界性が知られている重要なクラスは、楕円曲線によるファイブレーションの構造を備えたカラビ・ヤウ 3-様体（楕円カラビ・ヤウ 3-様体）である [Gro94], [BCS20], [FHS21]。とくに、楕円カラビ・ヤウ 3-様体の位相型は有限個である [FHS21, Corollary 1.2]。一方、非ケーラーなものも許すような広義のカラビ・ヤウ 3-様体は無限に存在する [Fri91], [HS21]。

* 京都大学数理解析研究所

二つ目は、「ミラー対称性はどこまで成り立つか」という問題である。剛でないカラビ・ヤウ 3-様体 Y には、ミラー多様体と呼ばれる別のカラビ・ヤウ 3-様体 $Y^\vee$ の族が付随すると信じられている。ミラー対称性とは、これらのカラビ・ヤウ 3-様体の間に存在する非自明な幾何学的対応のことで、たとえば、ホッジ数の交換

$$h^{1,1}(Y) = h^{2,1}(Y^\vee), \quad h^{2,1}(Y) = h^{1,1}(Y^\vee) \tag{1.1}$$

が、この対応を端的に表す。カラビ・ヤウ 3-様体に対して、このミラー多様体の存在とホッジ数の交換 (1.1) を予想するのが、**位相的ミラー対称性**である。

ミラー対称性において、トーリック多様体の超曲面完全交叉として記述されるようなカラビ・ヤウ 3-様体はもっとも重要なクラスの一つである。このクラスはミラー対称性で閉じており、位相的ミラー対称性を含め、様々なレベルでのミラー対称性の主張がすでに確立している（[CK99] など参照）。とくに超曲面の場合には、ミラー対称性が反射的多面体の双対 $\Delta \leftrightarrow \Delta^*$ という単純な組み合わせ論によって記述される [Bat94]（バチレフのミラー対称性）。さらに、このような組み合わせ論的記述はバチレフのカラビ・ヤウ超曲面に特有のものではなく、将来的には一般のカラビ・ヤウ 3-様体のミラー対称性にまで一般化できることが期待されている。この一般化の一つの方向を与えるアイデアがグロス・ジーベルト・プログラムである。**グロス・ジーベルト・プログラム**（*Gross–Siebert program*）とは、カラビ・ヤウ 3-様体をトーリック多様体の合併に退化させることにより組み合わせ的性質を抽出し、そこに備わる自然な双対を利用することでミラー多様体を構成しようというプログラムである（[Gro11] など参照）。ここで用いる退化は、カラビ・ヤウ 3-様体の最大退化と呼ばれている。一方、最大退化を持たないカラビ・ヤウ 3-様体の族も存在する。これらの族は**孤児族**（*orphan family*）と呼ばれている[*1]。

本稿の主題は、三つ目の「カラビ・ヤウ 3-様体の大域連結性が成り立つか」という問題である。ここで、すべてのカラビ・ヤウ 3-様体が幾何転移と呼ばれる操作でつながることを指して、カラビ・ヤウ 3-様体の大域連結性と呼んだ。これは、**リードの空想**（*Reid's fantasy*）とも呼ばれる有名な未解決問題 [Rei87] で、超弦理論の解の一意性との関係から物理学者の注目も集めてきた。二つのカラビ・ヤウ 3-様体（あるいは一般のカラビ・ヤウ多様体）Y_1, Y_2 をつなぐ**幾何転移**（*geometric transition*）とは、一方は双有理収縮、一方は平坦退化によって、共通のカラビ・ヤウ多様体 Y を経由して、Y_1, Y_2 を結びつける操作のことをいう。本稿において、**カラビ・ヤウ多様体**（*Calabi–Yau variety*）とは

[*1] 孤児族は、特殊な二重八次曲面（double octic）だけからでも 25 個得られるなど、続々と例が見つかっており、意外にたくさんありそうだ [GvG10], [CvS13], [CvS19]。ちなみに、孤児族であるという性質は双有理不変である [CvS19, Theorem 4]。

高々標準的特異点を持つ正規射影代数多様体 Y であって、$K_Y = 0$ かつ $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$（$0 < i < \dim Y$）を満たすものを指す。幾何転移を次のような概略式で表そう：

$$Y_1 \to Y \leftsquigarrow Y_2, \tag{1.2}$$

ここで、$Y_1 \to Y$ は双有理収縮、$Y_2 \rightsquigarrow Y$ は複素変形による平坦退化を表す。カラビ・ヤウ 3-様体に対し、Y の特異点が有限個の孤立通常二重点であるような幾何転移はコニフォルド転移と呼ばれ、とくによく研究されている。幾何転移 (1.2) は、ミラー対称性で逆向きの幾何転移

$$Y_1^\vee \rightsquigarrow Y' \leftarrow Y_2^\vee, \tag{1.3}$$

に写されることが予想されている [Mor99]（モリソン予想）。仮に、リードの空想とモリソン予想が完全な形で示されれば、ただ一組のミラー対から（孤児族を含む）すべてのカラビ・ヤウ 3-様体に対するミラー多様体の存在が従うことになる。

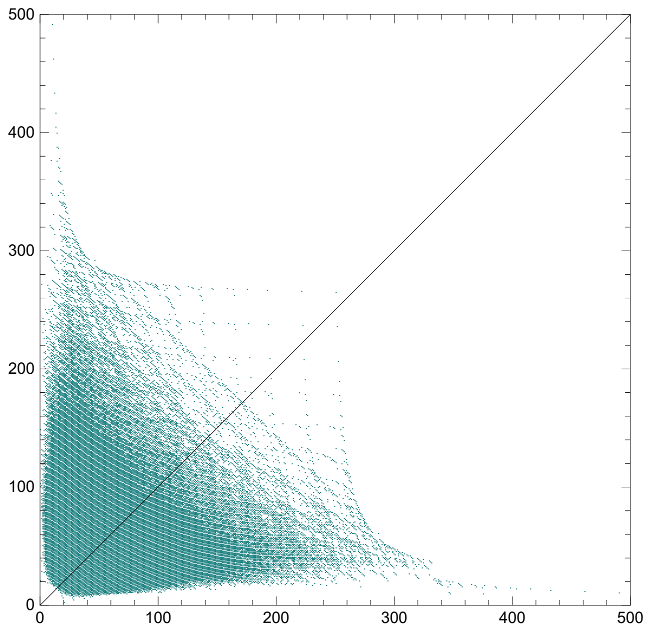


図 1　**バチレフのカラビ・ヤウ 3-様体.** 4 次元反射的多面体に付随するカラビ・ヤウ超曲面のホッジ数 ($h^{1,1}$, $h^{2,1}$) の分布図。[KS00] により分類された 473,800,776 個の 4 次元反射的多面体から計算され、プロットされた 30,108 点は既知のホッジ数の大部分を含む。これらは幾何転移により結びつき、連結な有向グラフ Γ をなしている。とくに、反射的多面体の包含関係に伴う幾何転移に制限して得られる連結部分グラフ $\Gamma_0 \subset \Gamma$ についてはモリソン予想が明白であり、直線 $h^{1,1} = h^{2,1}$ に関する鏡映と矢印の反転を同時に行う操作のもとで不変になる。

大域連結性の知られている重要なクラスが、射影空間の直積の超曲面完全交叉として記述されるカラビ・ヤウ 3-様体である。これらのカラビ・ヤウ 3-様体はコニフォルド転移のみを用いてつながることが証明されていて、その全体は標準ウェブ（standard web）と呼ばれている [GH88], [Wan18]。一方、4 次元反射的多面体に付随するトーリック多様体のカラビ・ヤウ超曲面（バチレフのカラビ・ヤウ 3-様体）は、フロップを法として大域連結であることが示される（系 5.2）。これは、反射的多面体の包含関係に伴うカラビ・ヤウ超曲面の幾何転移について、すでに知られている事実からの単純な帰結である。本稿では、このクラスの幾何転移について解説する。バチレフのカラビ・ヤウ 3-様体の分布について本稿で紹介する事実は、図 1 にまとめた通りである。

第 2 節では、カラビ・ヤウ超曲面の幾何転移の記述に不可欠な、整多面体とつづらの概念を準備する。第 3 節では、反射的多面体の包含関係に伴うカラビ・ヤウ超曲面の幾何転移が、より基本的な退化と収縮による分解を持つことを見る。この事実は、第 4 節で紹介するファノ多面体の森理論に関する結果によって裏付けられる。第 5 節では、多面体の包含関係についての大域連結性が、カラビ・ヤウ超曲面の大域連結性と密接に結びついていることを説明する。引用のない主張は [Miu] で詳述する予定である。

謝辞. 城崎代数幾何学シンポジウムに招待して下さった世話人の田中公さん、古川勝久さん、馬昭平さんに感謝いたします。本研究は、科研費（課題番号：21K03156）の助成を受けたものです。研究の機会を与えていただき、どうもありがとうございます。

2 整多面体とカラビ・ヤウ超曲面

まずは、カラビ・ヤウ超曲面の幾何転移を記述する上で主役となる整多面体の概念について、簡単に準備しておく。ここで紹介する概念の多くは、[ACG16], [Bat17], [Bat20] などで整えられた新しいものである。用語などは広く合意されたものではないため注意したい。本節の後半では、つづらによるカラビ・ヤウ超曲面の記述について紹介する。

多面体（polytope）とは、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ における有限個の点の凸包のことである。すべての頂点が $\mathbb{Q}^d$ に乗るものを有理多面体 (rational polytope)、格子 $\mathbb{Z}^d$ に乗るものを整多面体（lattice polytope）という。原点を内部に含む多面体 Δ に対しては、双対空間に双対多面体

$$\Delta^* = \left\{ v \in \left(\mathbb{R}^d\right)^* \;\middle|\; \langle u, v\rangle \geq -1, u \in \Delta \right\} \tag{2.1}$$

を定義できる。このような双対性を備えた整多面体には、とりわけ豊かな構造がある。

原点を内部に含む整多面体 Δ に対して、次のような性質が定義される：

- 反射的（reflexive） $\iff$ 双対多面体 Δ^* も整凸多面体である。
- 擬反射的（pseudo-reflexive） $\iff$ $\Delta = \lfloor \lfloor \Delta^* \rfloor^* \rfloor$ を満たす。
- ほとんど擬反射的（almost pseudo-reflexive） $\iff$ $\lfloor \Delta^* \rfloor$ も原点を内部に含む。
- 標準的（canonical） $\iff$ 原点は Δ のただ一つの内部格子点である。
- ファノ的（Fano） $\iff$ Δ の頂点はいずれも原始的格子点である。

ここで、有界凸集合 $S \subset \mathbb{R}^d$ の切り下げ $\lfloor S \rfloor$ は S に含まれる最大の整多面体、すなわち、$S \cap \mathbb{Z}^d$ の凸包を表す。標準的な多面体を**標準多面体**（*canonical polytope*）、ファノ的な多面体を**ファノ多面体**（*Fano polytope*）という[*2]。これらの性質には、

$$\text{反射的} \Rightarrow \text{擬反射的} \Rightarrow \text{ほとんど擬反射的} \Rightarrow \text{標準的} \Rightarrow \text{ファノ的}$$

という階層的な関係がある。いくつかの概念は低次元で縮退する。たとえば、2 次元以下の標準多面体や、4 次元以下の擬反射的多面体は、いずれも反射的になる。

射影トーリック多様体を調べる際には、扇のある空間 $N_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^d$ と運動量多面体のある空間 $M_\mathbb{R} = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})_\mathbb{R}$ の両方を扱うが、今回は $N_\mathbb{R}$ の整多面体に着目することが多い。これは、トーリック多様体の双有理幾何的な情報を持つデータである。一般に、射影トーリック多様体に付随する $N_\mathbb{R}$ の完備扇 Σ に対して、その 1 次元錐体を生成する原始的格子点の集合を $G(\Sigma)$ と書こう。凸包 $\mathrm{Conv}\, G(\Sigma)$ はファノ多面体になる。ファノ多面体はこの意味で、もっとも一般の射影トーリック多様体と関係するデータである[*3]。

有理多面体の対 (Δ_1, Δ_2) は、包含関係 $\Delta_1 \subset \Delta_2$ があって、Δ_1 と Δ_2^* が標準多面体であるとき、これを（暫定的な訳語であるが）**つづら**（*good pair*）と呼ぼう。外側の双対標準多面体 Δ_2 は整多面体とは限らないことに注意する。一方、中身の標準多面体 Δ_1 はもちろん整多面体である。つづらは、アルテバニ、コンパリン、 ギルボットによって導入された [ACG16, p.320]。多面体がトーリック多様体を記述するのに対し、つづらはカラビ・ヤウ超曲面を記述する。具体的には、Δ_1 をニュートン多面体とする一般のローラン多項式 f_{Δ_1} に対してアフィン超曲面

$$Z_{\Delta_1} := \left\{ f_{\Delta_1}(t) = 0 \;\middle|\; t \in (\mathbb{C}^*)^d \right\} \subset (\mathbb{C}^*)^d \tag{2.2}$$

[*2] 標準多面体を指してファノ多面体と呼ぶ著者も多いため、本稿の意味でのファノ多面体は $\mathbb{Q}$-ファノ多面体とも呼ばれている。

[*3] より正確には、ファノ多面体 $\mathrm{Conv}\, G(\Sigma)$ は射影トーリック多様体 X_Σ の（$\mathbb{Q}$-分解化の）反標準モデル $\mathrm{Proj}\, R(-K_{X_\Sigma})$ を保つような双有理変換による同値類を表している。反標準モデルはトーリック・ファノ多様体 $X_{\mathrm{Conv}\, G(\Sigma)^*}$ になる。標準多面体は反標準モデルが高々標準的特異点を持つ場合に対応し、反射的多面体は反標準モデルがゴレンシュタインである場合に対応する。一方、格子点集合 $G(\Sigma)$ は余次元 1 の同型による同値類を表す。

が定まり、Δ_2 の定義するトーリック・ファノ多様体 X_{Δ_2} において閉包をとることでカラビ・ヤウ多様体 Y_{Δ_1,Δ_2} が得られる [ACG16, Theorem 1], [Bat17, Theorem 2.23]：

$$Y_{\Delta_1,\Delta_2} \coloneqq \overline{Z_{\Delta_1}} \subset X_{\Delta_2}. \tag{2.3}$$

カラビ・ヤウ超曲面 Y_{Δ_1,Δ_2} の同型類は定義式 f_{Δ_1} に依っていることに注意する[*4]。つづらの巧いところは、カラビ・ヤウ超曲面に対して、複素変形のデータである $M_{\mathbb{R}}$ の多面体 Δ_1 と、ケーラー変形のデータである $N_{\mathbb{R}}$ の多面体 Δ_2^* を、明白な形で分離して記述している点にある。これにより、つづらの明らかな双対性

$$(\Delta_1, \Delta_2) \longleftrightarrow (\Delta_2^*, \Delta_1^*) \tag{2.4}$$

が、ミラー対称性を記述すると期待できる。実際、反射的多面体 Δ と自明なつづら (Δ, Δ) を同一視すると、バチレフのミラー対称性 $\Delta \leftrightarrow \Delta^*$ が再現される。

補足 2.1. つづらの定義において、Δ_1 と Δ_2^* が標準多面体であるとまで課さずとも、代わりに原点を内部に含む整多面体であることさえ要請すれば、(Δ_1, Δ_2) は自動的につづらになる [ACG16, Corollary 1.6]。これは、つづらの双対性 (2.4) が意味をなすための最小限の要請である。一方、つづら (Δ_1, Δ_2) に対して、Δ_1 と Δ_2^* は標準的なだけでなく、ほとんど擬反射的になる。ほとんど擬反射的な多面体 Δ はつづら $(\Delta, \lfloor \Delta^* \rfloor^*)$ に延長できるので、中身の整多面体に対してこれ以上強いことは言えない。代数的トーラスの非退化アフィン超曲面 Z_Δ がカラビ・ヤウ多様体と双有理同値になることと、ニュートン多面体 Δ がほとんど擬反射的であることは同値である [Bat17, Theorem 2.23][*5]。

つづら (Δ_1, Δ_2) が、$\Delta_1 \subset \Delta \subset \Delta_2$ となる任意の有理多面体 Δ に対して、

$$\begin{aligned} &(\Delta_1, \Delta) \text{ がつづらならば } \Delta = \Delta_2, \text{ かつ} \\ &(\Delta, \Delta_2) \text{ がつづらならば } \Delta = \Delta_1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

を満たすとき、**大きなつづら**（*maximal good pair*）であると呼ぼう。これは、つづらの順序 $(\Delta_1, \Delta_2) \preceq (\Delta_1', \Delta_2')$ を $\Delta_1 \subset \Delta_1'$ かつ $\Delta_2^* \subset \Delta_2'^*$ と定義した場合の極大元である。大きなつづらの中身 Δ_1 は擬反射的多面体になり、双対 (2.4) はバチレフのミラー対称性

[*4] より一般に、$\operatorname{Conv} A = \Delta_1$ を満たす格子点集合 $A \subset M$ を台とする非退化ローラン多項式 f_A に対してもカラビ・ヤウ超曲面 $Y_{f_A,\Delta_2} \subset X_{\Delta_2}$ が定まる。

[*5] バチレフによる、ほとんど擬反射的多面体 Δ の元々の定義は、ファイン [Fin83] によって導入されたファイン内部 $F(\Delta) \subset \Delta$ という集合が、原点のみからなるという条件である（本稿の定義とは同値になる [Bat17, Proposition 3.4]）。一般に、整多面体 Δ のファイン内部 $F(\Delta)$ の次元には、対応するアフィン超曲面の小平次元 $\kappa = \min(\dim F(\Delta), d-1)$ という幾何学的な意味がある [Bat20, Theorem 6.2]。

の一般化であるマブリュトフのミラー対称性 [Mav11] を再現する。同様に、**小さなつづら**（*minimal good pair*）をこの順序の極小元と定める。小さなつづらの中身 Δ_1 は、ほとんど擬反射的な極小標準多面体になる。極小標準多面体は単体であるか、低次元の極小標準単体から組み上げてつくられる多面体であるが [Kas10, Proposition 3.2]、とくに Δ_1 も Δ_2^* も単体である場合の双対 (2.4) は、ベルグルンド・ヒュプシュ・クローウィッツのミラー対称性 [BH93], [Kra] を再現する [ACG16, Theorem 2][*6]。

3 反射的多面体の包含関係に伴う幾何転移の分解

本節では、反射的多面体の包含関係に伴うカラビ・ヤウ超曲面の幾何転移と、より基本的な退化と収縮への分解について紹介する。一般に、d 次元反射的多面体の包含関係 $\Delta \subset \Delta'$ は、$d-1$ 次元カラビ・ヤウ多様体の幾何転移

$$Y_{\Delta,\Sigma} \to Y_{\Delta,\Sigma'} \leadsto Y_{\Delta',\Sigma'} \tag{3.1}$$

を定める。ここで、Σ は Δ^* の**射影極大扇**（*projective* Δ^**-maximal fan*）というもので、Δ^* に含まれる原始的格子点の集合 $\Delta^* \cap N^{\mathrm{prim}}$（今の場合は $\partial\Delta^* \cap N$ と等しい）を 1 次元錐体の生成系 $G(\Sigma)$ として用いる射影単体的完備扇のことである（Σ' も同様）[*7]。ここで、N^{prim} は N の原始的格子点のなす部分集合とした。つづら (Δ_1, Δ_2) に対するカラビ・ヤウ超曲面 Y_{Δ_1,Δ_2} の定義 (2.3) において、トーリック・ファノ多様体 X_{Δ_2} の代わりに Δ_2^* の射影極大扇 Σ_2 の定めるトーリック多様体 X_{Σ_2} の中で閉包を取ってもカラビ・ヤウ多様体になることが示せる。これを Y_{Δ_1,Σ_2} と表す。大きなつづら (Δ_1, Δ_2) に対しては、Y_{Δ_1,Σ_2} が高々端末的特異点を持つカラビ・ヤウ多様体になる。さらに、4 次元の大きなつづらの場合（つまり $\Delta_1 = \Delta_2$ が 4 次元反射的多面体の場合）、Y_{Δ_1,Σ_2} は（滑らかな）カラビ・ヤウ 3-様体になることが知られている [Bat94, Corollary 4.2.3], [Fre15b, Theorem 4.9]。これをバチレフのカラビ・ヤウ 3-様体と呼ぶことにする（図 1 参照）。

[*6] ただし、つづらの双対 (2.4) を用いたミラー対称性は、一般には正則性に関する条件（たとえば準滑らかさや、ヤコビ環に関する条件 [Bor13, Proposition 7.1.3]）を満たさないことが指摘されている。マブリュトフのミラー対称性についても、この事情が一般次元の位相的ミラー対称性の定式化を妨げているようだ [Bat17, Theorem 5.5]。幾何転移の過程において登場するカラビ・ヤウ超曲面では、（5 次超曲面の退化など）もっとも単純な例においてさえ、準滑らかさを期待することは不可能になる。

[*7] 標準多面体 ∇ の射影極大扇は、∇ の各面が張る錐体を集めた射影完備扇 $\Sigma(\nabla)$ の細分となる場合、MPCP 細分と呼ばれる。フレッドリックソンは、反射的多面体の包含関係に対して幾何転移 (3.1) が定まるためには、MPCP 細分でない射影極大扇も考える必要があることを指摘した [Fre15a], [Fre15b]。一般に凸包がファノ多面体になる格子点集合 A に対しても、射影極大扇 Σ_A を同様に定義しておく（すなわち、Σ_A は $G(\Sigma_A) = A$ を満たす射影単体的完備扇）。

さて、つづらのカバー関係（非自明な順序の最小単位）$(\Delta_1, \Delta_2) \succ (\Delta_1', \Delta_2')$ は、

$$\begin{array}{ll} \text{退化型} & l(\Delta_1') = l(\Delta_1) - 1 \text{ かつ } \Delta_2' = \Delta_2, \\ \text{収縮型} & \Delta_1' = \Delta_1 \text{ かつ } l(\Delta_2'^*) = l(\Delta_2^*) - 1, \end{array} \tag{3.2}$$

のいずれかとなる。ここで、$l(S)$ は S の含む格子点の個数である。退化型のカバー関係 $(\Delta_1, \Delta_2) \succ (\Delta_1', \Delta_2)$ は、スーパーポテンシャル $f_{\partial\Delta_1 \cap M} : (\mathbb{C}^*)^d \to \mathbb{C}$ の（単項式を一つ取り除く）退化 $f_{\partial\Delta_1 \cap M} \rightsquigarrow f_{\partial\Delta_1' \cap M}$, と、それに伴うカラビ・ヤウ超曲面の平坦退化 $Y_{\Delta_1, \Sigma_2} \rightsquigarrow Y_{\Delta_1', \Sigma_2}$ を記述しており、収縮型のカバー関係 $(\Delta_1, \Delta_2) \succ (\Delta_1, \Delta_2')$ は、トーリック多様体の（因子を一つつぶす）双有理収縮 $X_{\Sigma_2} \to X_{\Sigma_2'}$ と、それに伴うカラビ・ヤウ超曲面の双有理収縮 $Y_{\Delta_1, \Sigma_2} \to Y_{\Delta_1, \Sigma_2'}$ を記述する。したがって、大きなつづらは、この形の退化・収縮先にならないカラビ・ヤウ超曲面に対応し、小さなつづらは、この形の退化・収縮を重ねた終着点となるようなカラビ・ヤウ超曲面に対応する。

反射的多面体の包含関係 $\Delta \subset \Delta'$ は、つづらのカバー関係の列

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \Delta \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r, equal] & \Delta = \Delta_p' \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & \Delta_1' \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \Delta' \arrow[d, equal] \\ \Delta \arrow[r, hook] & \Delta_1 \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & \Delta_q = \Delta' \arrow[r, equal] & \cdots \arrow[r, equal] & \Delta' \arrow[r, equal] & \Delta', \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

に分解することができる（擬反射的多面体の包含関係についても同様）。ここで、(3.3) の各列がつづらを表し、$\Delta' \supset \Delta_1' \supset \cdots \supset \Delta_p'$ と $\Delta^* \supset \Delta_1^* \supset \cdots \supset \Delta_q^*$ は、標準多面体のカバー関係（非自明な包含関係の最小単位）の列となる。対応して、トーリック多様体の双有理収縮と、カラビ・ヤウ超曲面の幾何転移 (3.1) の分解が次のように得られる：

$$\begin{tikzcd} X_\Sigma \arrow[r, "\varphi_0"] & X_{\Sigma_1} \arrow[r, "\varphi_1"] & \cdots \arrow[r, "\varphi_{q-1}"] & X_{\Sigma'} \arrow[r, equal] & \cdots \arrow[r, equal] & X_{\Sigma'} \arrow[r, equal] & X_{\Sigma'} \\ Y_{\Delta,\Sigma} \arrow[r] \arrow[u, hook] & Y_{\Delta,\Sigma_1} \arrow[r] \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[r] & Y_{\Delta,\Sigma'} \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[l, rightsquigarrow] & Y_{\Delta_1',\Sigma'} \arrow[l, rightsquigarrow] \arrow[u, hook] & Y_{\Delta',\Sigma'}, \arrow[l, rightsquigarrow] \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

ここで、各 Σ_j は Δ_j^* の射影極大扇である。図式に登場する標準多面体のカバー関係には、上述の 4 種類の基本的な操作が付随している：

$$\begin{array}{ll} \text{ランダウ・ギンツブルグ・パート} & f_{\partial\Delta_j' \cap M} \rightsquigarrow f_{\partial\Delta_{j+1}' \cap M}, \\ \text{カラビ・ヤウ複素パート} & Y_{\Delta_j', \Sigma'} \rightsquigarrow Y_{\Delta_{j+1}', \Sigma'}, \\ \text{トーリックパート} & \varphi_j : X_{\Sigma_j} \to X_{\Sigma_{j+1}}, \\ \text{カラビ・ヤウ・ケーラーパート} & Y_{\Delta, \Sigma_j} \to Y_{\Delta, \Sigma_{j+1}}. \end{array}$$

以降はトーリックパートを中心に話を進める。

4　ファノ多面体の森理論

前節で見たように、バチレフのカラビ・ヤウ 3-様体を個別に扱う際には反射的多面体さえ考えていれば良かったが、幾何転移の分解 (3.4) を考えると、必然的に標準多面体を扱う必要が出てきた。同様に、次節で標準多面体の大域連結性を議論しようとすると、必然的に一般のファノ多面体を扱う必要も生じてくる。そこで、あらかじめ守備範囲をファノ多面体にまで広げて、トーリックパートを議論しておく。まずは、ファノ多面体の包含関係に伴うトーリック多様体の射の存在を保証する著者の結果を紹介し、次に、それをトーリック多様体の森理論 [Rei83] と組み合わせる。定理 4.1 は、同じ主張を反射的多面体の包含関係について示したフレッドリックソンの結果 [Fre15b, Lemma 6.1] の単純な一般化である。定理 4.1, 定理 4.2 とも、二次扇（secondary fan）を用いて射影トーリック多様体の有効錐体（effective cone）、可動錐体（movable cone）、ネフ錐体（nef cone）の詳細な記述を与えた [CLS11, §14–15] の結果を用いて、組み合わせ論的に証明される。

定理 4.1. $\nabla \supset \nabla'$ を d 次元ファノ多面体の包含関係とする。このとき、∇' の任意の射影極大扇 Σ' に対し、Σ' の細分であるような ∇ の射影極大扇 Σ が存在する。とくに、双有理因子収縮 $X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ が存在する。

定理 4.2. ∇ を $N_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^d$ の d 次元ファノ多面体とし、ある r 次元線形部分空間 $L \subset N_\mathbb{R}$ による切断の切り下げ $\nabla_f := \lfloor \nabla \cap L \rfloor$ が r 次元ファノ多面体であるとする。このとき、アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow N_f := L \cap N \longrightarrow N \xrightarrow{\ \pi\ } N_b \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

を用いて、$(N_b)_\mathbb{R}$ の格子点集合 S と有理多面体 ∇_b を

$$S := \left\{ \mathbb{R}_+\pi(v) \cap N_b^{prim} \;\middle|\; v \in \nabla \cap N^{prim} \right\}, \quad \nabla_b := \operatorname{Conv} S \tag{4.2}$$

と定める。すると、∇_b は $d-r$ 次元ファノ多面体になる。このとき、S の任意の射影極大扇 Σ_S に対し、一般化扇 $\pi^{-1}(\Sigma_S)$ の細分であるような ∇ の射影極大扇 Σ と、その r 次元部分扇 Σ_f が存在し、Σ_f は ∇_f の射影極大扇となる[*8]。とくに、ファイブレーション $X_\Sigma \to X_{\Sigma_S}$ が存在し、その一般的なファイバー（*general fiber*）は X_{Σ_f} に一致する。

[*8] より強く、任意の射影極大扇 Σ_f, Σ_S に対して条件を満たす Σ が存在するという期待もある。

定理 4.2 のファイブレーションとは、ファイバーが連結な低次元への射影的全射のことを指す。以降、ファイブレーションを考える場合には、単にファノ多面体の包含関係 $\nabla_f \subset \nabla$ と書いても、定理 4.2 の意味での包含関係を意味するものと取り決めておく。前節の文脈に対し、この結果を応用してみよう。分解 (3.3) における標準多面体のカバー関係の列 $\Delta^* \supset \Delta_1^* \supset \cdots \supset \Delta_q^*$ に対して、Δ_q^* の射影極大扇 Σ_q を任意に指定することで、定理 4.1 により各々の細分となる射影極大扇 $\Sigma_{q-1}, \ldots, \Sigma_1, \Sigma$ の存在が順繰りに言えて、図式 (3.4) が存在することが分かる。さらに、次の定理から、トーリックパートの各双有理射 $\varphi_j : X_{\Sigma_j} \to X_{\Sigma_{j+1}}$ は $K_{X_{\Sigma_j}}$-負な端射線に伴う因子収縮になる。

定理 4.3. 高々端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$-分解的射影トーリック多様体 X_Σ に対して、K_{X_Σ}-負な端射線 $R \subset \mathrm{NE}(X_\Sigma)$ に関する収縮射 $\varphi_R : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ は、ファノ多面体 $\nabla := \mathrm{Conv}\, G(\Sigma)$, $\nabla' := \mathrm{Conv}\, G(\Sigma')$ の次のような変換に対応する：

- φ_R がフリップ収縮なら、ファノ多面体は一定である：$\nabla = \nabla'$,
- φ_R が因子収縮なら、ファノ多面体はカバー関係である：$\nabla \supset \nabla'$,
- φ_R が r 次元のファイバーを持つファイバー収縮なら、r 次元端末的単体 $\nabla_f \subset \nabla$ が存在し、定理 *4.2* の記号で

$$\nabla' = \nabla_b \quad \text{かつ} \quad \left|\nabla \cap N^{prim}\right| = r + 1 + |S| \tag{4.3}$$

  を満たす。ここで、端末的単体とは、原点と頂点のみを格子点として含む整単体のことである。このような包含関係 $\nabla_f \subset \nabla$ を備えたファノ多面体 ∇ を、**森ファイバー多面体**と呼ぶことにしよう。

逆に、ファノ多面体のカバー関係 $\nabla \supset \nabla'$ および森ファイバー多面体 $\nabla_f \subset \nabla$ に対して、定理 *4.1*, 定理 *4.2* を適用して得られる収縮射 $\varphi : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ はそれぞれ、ある K_{X_Σ}-負な端射線に関する因子収縮およびファイバー収縮になる。

さて、定理 4.3 において、出発点のトーリック多様体 X_Σ に課した高々端末的という条件は簡単のために付けているもので、射影極大扇を拡張して定理 4.1, 定理 4.2 を書き換えれば削除可能である。また、射影トーリック多様体 X_Σ の反標準因子 $-K_{X_\Sigma}$ は巨大なため、端射ファイバー収縮は無条件に K_{X_Σ}-負になる。一方、因子収縮に関して K_{X_Σ}-負という条件は必須である。実際、端射因子収縮 $\varphi_R : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ に対し、つぶれる因子に対応する格子点 $v \in G(\Sigma) \setminus G(\Sigma')$ がファノ多面体 $\mathrm{Conv}\, G(\Sigma')$ の外部にある（境界に乗る、内部に含まれる）ことと、$K_{X_\Sigma}.R < 0$（$= 0$, > 0）であることがそれぞれ同値になる。

ファノ多面体 ∇ の頂点の一つ $v \in V(\nabla)$ を取って、∇ に含まれる別のファノ多面体

$$\nabla' = \mathrm{Conv}\left((\nabla \cap N^{\mathrm{prim}}) \setminus \{v\}\right) \tag{4.4}$$

がつくれるとき、∇' を ∇ の**縮小**であると呼ぼう。縮小 $\nabla \supset \nabla'$ はファノ多面体のカバー関係であり、任意のカバー関係は縮小に対応する。逆に、∇ は ∇' の**拡大**であると言う。定理 4.3 からファノ多面体をどんどん縮小して森ファイバー多面体にまで持っていく操作は、ちょうど $\mathbb{Q}$-分解的射影トーリック多様体に対して、極小モデル・プログラム（MMP）を走らせることに相当している。

5 リードの空想と多面体の大域連結性

どの二つの d 次元反射的多面体 Δ, Δ' も、（d 次元反射的多面体の間の）包含関係の列によってつながることを指して、d 次元反射的多面体の大域連結性と呼ぼう。標準多面体、ファノ多面体などに対しても同様に定義する。4 次元以下の反射的多面体の（同型を除いた）大域連結性は、物理学者のクロイツァーとスカークによって示された [KS98], [KS00]。5 次元以上では未解決である。以下では、多面体の大域連結性とカラビ・ヤウ超曲面の大域連結性の関係について整理し、前者に関連する話題を紹介する。

命題 5.1. d 次元擬反射的多面体の（同型を除いた）大域連結性は、大きなつづらの定める $d-1$ 次元カラビ・ヤウ超曲面がフロップを法として大域連結であることを意味する。

フロップを法とする必要があるのは、擬反射的多面体の包含列 $\nabla_1 \subset \nabla \supset \nabla_2$ に対して定理 4.1 を用いても、∇_i の射影極大扇 Σ_i の共通細分となるような ∇ の射影極大扇 Σ が存在するとは限らないためである（実際、$\mathbb{P}^4$ の 3 点爆発の双有理モデルなどで反例がつくれる）。したがって、この方向でカラビ・ヤウ超曲面の真の大域連結性まで示すには、さらに何か別の議論が必要になるだろう。次の系は、上述のクロイツァー・スカークの結果と、4 次元以下の擬反射的多面体が反射的であることから直ちに従う。

系 5.2. バチレフのカラビ・ヤウ *3*-様体は、フロップを法として大域連結である。

擬反射的多面体の縮小は、ほとんど擬反射的にはなるものの、再び擬反射的になるとは限らない。一方、ファノ（標準、ほとんど擬反射的）多面体の縮小はそれぞれ、ファノ的（標準的、ほとんど擬反射的）である。したがって、一般次元のカラビ・ヤウ超曲面の大域連結性や幾何転移の詳細を調べるために、ひとまずは、二つの擬反射的多面体をつなぐファノ（標準、ほとんど擬反射的）多面体の包含列を構成しておいて、これが擬反射的多

面体の包含列に持ち上がるかどうかを議論するという戦略は自然に思われる。以下では、ファノ多面体と標準多面体の大域連結性について考えてみよう。

まず、ファノ多面体の場合には、その同型類ですら 2 次元以上で各次元無限個あるのだが、大域連結性については初等的に明らかである。

命題 5.3. d 次元ファノ多面体は大域連結である。

証明. 任意の d 次元ファノ多面体 ∇_1, ∇_2 に対し、$\nabla = \mathrm{Conv}(\nabla_1 \cup \nabla_2)$ もファノ多面体である。したがって、ファノ多面体の包含列 $\nabla_1 \subset \nabla \supset \nabla_2$ が存在する。 □

一方、標準多面体の大域連結性はずっと繊細に見える。実際、d 次元標準多面体 ∇_1, ∇_2 に対し、（一方をユニモジュラー変換で動かしたとしても）$\mathrm{Conv}(\nabla_1 \cup \nabla_2)$ は一般に標準的ではない。例外的に単純な場合として、2 次元標準多面体の同型を除いた大域連結性は、16 個ある同型類を観察すれば容易に確認できる。しかし、3 次元標準多面体の同型類は 674,688 個 [Kas10] もあり、ただの観察によって大域連結性を確認するのは現実的でない。4 次元以上でも標準多面体の同型類は有限個であることが知られている [LZ91] が、その数はすさまじく巨大になるはずだ。さらに、標準多面体の真の大域連結性に至っては、それ自体としても興味深い問題であるが、2 次元でも未解決だと思われる。

問題 5.4. d 次元標準多面体は大域連結か？

著者は問題 5.4 を独居改築問題（renovation problem for a single occupant）と呼んでいる。最後に、この標準多面体の大域連結性に対する十分条件の一つを、双有理幾何の言葉で定式化しておこう。

問題 5.5. 高々端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$ 分解的射影トーリック森ファイバー空間 X_1, X_2 が、どちらも高々標準的特異点を持った反標準モデルを持つとする。このとき、任意の同変双有理写像 $\varphi\colon X_1 \dashrightarrow X_2$ に対し、φ を分解するサルキソフ・リンクの列であって、各段階に登場する双有理モデルがすべて、高々標準的特異点を持った反標準モデルを持つようなものが存在するか。

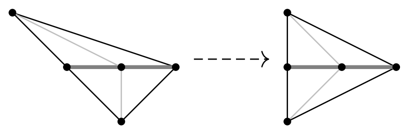
補足 5.6. 一般に、双有理同値な極小モデルがフロップでつながる [Kaw08] ように、双有理同値な森ファイバー空間は 4 種類のサルキソフ・リンクでつながることが知られている [Cor95], [HM13]。トーリック多様体に対するサルキソフ・リンクは多面体の言葉では、

$$\nabla_1 \subset \nabla_2, \qquad \nabla_1 \subset \nabla \supset \nabla_2, \qquad \nabla_1 \supset \nabla_2, \qquad \nabla_1 = \nabla_2 \tag{5.1}$$

という 4 種類のカバー関係の列を与える。任意の標準多面体は、MMP に相当する縮小を

繰り返して森ファイバー多面体に行きつくが、この過程に登場する多面体はすべて標準的である。したがって、標準的な森ファイバー多面体の標準多面体を用いた大域連結性が言えれば、一般の標準多面体の大域連結性が従う。しかし、サルキソフ・リンク (5.1) は多面体を拡大する場合もあるので、標準多面体の範囲でつなげるかどうかは非自明である。標準的な森ファイバー多面体をつなぐサルキソフ・リンク (5.1) の列が標準多面体の範囲で取れるか、というのが問題 5.5 の意味する内容である。

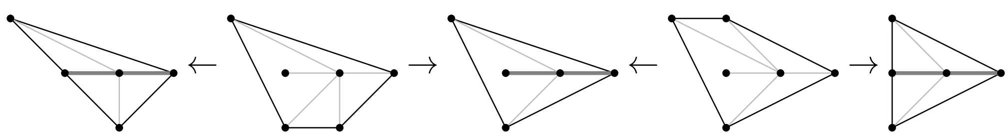
例 5.7. ヒルツェブルフ曲面 F_2 の同変自己双有理写像 $\varphi: F_2 \dashrightarrow F_2$ のサルキソフ分解を考える。ここで、φ は以下の同型な二つの標準的な森ファイバー多面体 ∇_1, ∇_2 から代数的トーラスの恒等写像を延長して得られる双有理写像だとする（多面体でトーリック多様体を表し、射影極大扇 Σ_i や森ファイバー $\mathbb{P}^1$ の線分 $(\nabla_i)_f$ も重ねて表示している）：

φ :  . (5.2)

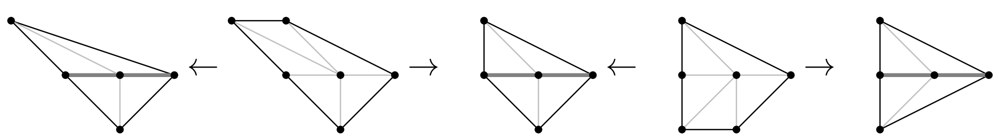
このとき、ファノ多面体 $\mathrm{Conv}(\nabla_1, \nabla_2)$ に対応するピカール数 4 のトーリック曲面 S は φ の共通解消を与える：

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ F_2 \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & F_2. \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

射 p, q は二通りの K_S-MMP の手続きを表している。一般に、$\mathbb{Q}$-分解的射影トーリック多様体の有効錐体は豊富モデルを分類する自然な細分を持ち、その様子は二次扇によって組み合わせ論的に記述される（たとえば、[BCHM10], [KKL16], [川 14, §2.10], [CLS11] 参照）。今の場合、有効錐体 $\mathrm{Eff}(S)$ は 3 次元ピラミッド上の錐になっていて、18 個の 4 次元錐体に細分される。サルキソフ分解は、この有効錐体 $\mathrm{Eff}(S)$ の境界を辿る道に沿った壁越え（wall crossing）によって具体的に記述できる [HM13], [Kal13]。これを実行すると、$F_2 \dashrightarrow F_3 \dashrightarrow F_2$ に対応する

 (5.4)

という分解と、$F_2 \dashrightarrow F_1 \dashrightarrow F_2$ に対応する

 (5.5)

という分解の、二通りのサルキソフ分解が得られる。いずれも (5.1) の 2 番目にあたる、いわゆる type II のサルキソフ・リンクのみによって分解されている。各矢印はトーリック多様体の端射因子収縮を表すが、これはちょうどファノ多面体の縮小に対応する。分解 (5.4) を見れば、原点以外の内部格子点を含むファノ多面体が登場しており、標準的な森ファイバー多面体同士をつなぐサルキソフ分解であっても、必ずしも標準多面体の範囲におさまるとは限らないことが分かる。一方、(5.5) は標準多面体の範囲での分解を与えており、∇_1 と ∇_2 をつなぐ標準多面体の包含列が得られている。

参考文献

[ACG16] Michela Artebani, Paola Comparin, and Robin Guilbot, *Families of Calabi–Yau hypersurfaces in $\mathbb{Q}$-Fano toric varieties*, J. Math. Pures Appl. (9) **106** (2016), no. 2, 319–341. MR 3515305

[Bat94] Victor V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 3, 493–535. MR MR1269718 (95c:14046)

[Bat17] Victor Batyrev, *The stringy Euler number of Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties and the Mavlyutov duality*, Pure Appl. Math. Q. **13** (2017), no. 1, 1–47. MR 3858013

[Bat20] Victor V. Batyrev, *Canonical models of toric hypersurfaces*, 2020.

[BCHM10] Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher D. Hacon, and James McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468. MR 2601039

[BCS20] Caucher Birkar, Gabriele Di Cerbo, and Roberto Svaldi, *Boundedness of elliptic Calabi–Yau varieties with a rational section*, 2020.

[BH93] Per Berglund and Tristan Hübsch, *A generalized construction of mirror manifolds*, Nuclear Phys. B **393** (1993), no. 1-2, 377–391. MR MR1214325 (94k:14031)

[Bor13] Lev A. Borisov, *Berglund-Hübsch mirror symmetry via vertex algebras*, Comm. Math. Phys. **320** (2013), no. 1, 73–99. MR 3046990

[CK99] David A. Cox and Sheldon Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR MR1677117 (2000d:14048)

[CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck, *Toric varieties*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 124, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. MR 2810322

[Cor95] Alessio Corti, *Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 2, 223–254. MR 1311348

[CvS13] Slawomir Cynk and Duco van Straten, *Calabi-Yau conifold expansions*, Arithmetic and geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds, Fields Inst. Commun., vol. 67, Springer, New York, 2013, pp. 499–515. MR 3156429

[CvS19] Sł awomir Cynk and Duco van Straten, *Picard–Fuchs operators for octic arrangements I (The case of orphans)*, Commun. Number Theory Phys. **13** (2019), no. 1, 1–52. MR 3951103

[FHS21] Stefano Filipazzi, Christopher D. Hacon, and Roberto Svaldi, *Boundedness of elliptic Calabi–Yau threefolds*, 2021.

[Fin83] Fine, *Resolution and completion of algebraic varieties*, Ph.D. thesis, University of Warwick, 1983.

[Fre15a] Karl Fredrickson, *Extremal transitions from nested reflexive polytopes*, Comm. Math. Phys. **335** (2015), no. 3, 1381–1395. MR 3320316

[Fre15b] Karl Fredrickson, *Generalized compactifications of batyrev hypersurface families*, 2015.

[Fri91] Robert Friedman, *On threefolds with trivial canonical bundle*, Complex geometry and Lie theory (Sundance, UT, 1989), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 103–134. MR 1141199

[GH88] Paul S. Green and Tristan Hübsch, *Connecting moduli spaces of Calabi–Yau threefolds*, Comm. Math. Phys. **119** (1988), no. 3, 431–441. MR 969210

[Gro94] Mark Gross, *A finiteness theorem for elliptic Calabi-Yau threefolds*, Duke Math. J. **74** (1994), no. 2, 271–299. MR 1272978

[Gro11] ———, *Tropical geometry and mirror symmetry*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 114, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. MR 2722115

[GvG10] A. Garbagnati and B. van Geemen, *Examples of Calabi-Yau threefolds parametrised by Shimura varieties*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **68** (2010), no. 3, 271–287. MR 2807280

[HM13] Christopher D. Hacon and James McKernan, *The Sarkisov program*, J. Algebraic Geom. **22** (2013), no. 2, 389–405. MR 3019454

[HS21] Kenji Hashimoto and Taro Sano, *Examples of non-kähler calabi-yau 3-folds with arbitrarily large b_2*, 2021.

[Kal13] Anne-Sophie Kaloghiros, *Relations in the Sarkisov program*, Compos. Math. **149** (2013), no. 10, 1685–1709. MR 3123306

[Kas10] Alexander M. Kasprzyk, *Canonical toric Fano threefolds*, Canad. J. Math. **62** (2010), no. 6, 1293–1309. MR 2760660

[Kaw08] Yujiro Kawamata, *Flops connect minimal models*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), no. 2, 419–423. MR 2426353

[KKL16] Anne-Sophie Kaloghiros, Alex Küronya, and Vladimir Lazić, *Finite generation and geography of models*, Minimal models and extremal rays (Kyoto, 2011), Adv. Stud. Pure Math., vol. 70, Math. Soc. Japan, [Tokyo], 2016, pp. 215–245. MR 3617781

[Kra] Marc Krawitz, *FJRW rings and Landau-3-Ginzburg mirror symmetry*, arXiv:0906.0796.

[KS98] Maximilian Kreuzer and Harald Skarke, *Classification of reflexive polyhedra in three dimensions*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), no. 4, 853–871. MR 1663339 (99m:14100)

[KS00] ———, *Complete classification of reflexive polyhedra in four dimensions*, Adv. Theor. Math. Phys. **4** (2000), no. 6, 1209–1230. MR 1894855

[LZ91] Jeffrey C. Lagarias and Günter M. Ziegler, *Bounds for lattice polytopes containing a fixed number of interior points in a sublattice*, Canad. J. Math. **43** (1991), no. 5, 1022–1035. MR 1138580

[Mav11] Anvar R. Mavlyutov, *Mirror symmetry for Calabi–Yau complete intersections in fano toric varieties*, 2011.

[Miu] Makoto Miura, *Decomposition of geometric transitions for Calabi–Yau hypersurfaces*, in preparation.

[Mor99] David R. Morrison, *Through the looking glass*, Mirror symmetry, III (Montreal, PQ, 1995), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 263–277. MR 1673108

[Rei83] Miles Reid, *Decomposition of toric morphisms*, Arithmetic and geometry, Vol. II, Progr. Math., vol. 36, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, pp. 395–418. MR 717617

[Rei87] ———, *The moduli space of 3-folds with $K = 0$ may nevertheless be irreducible*, Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 329–334. MR 909231 (88h:32016)

[Wan18] Sz-Sheng Wang, *On the connectedness of the standard web of Calabi-Yau 3-folds and small transitions*, Asian J. Math. **22** (2018), no. 6, 981–1003. MR 3919548

[川 14] 川又雄二郎, **高次元代数多様体論**, 岩波数学叢書, 2014.