On liftability of log surfaces in positive characteristic (正標数のログ・曲面のリフト可能性について)

河上龍郎 *

1 導入

本稿では，正標数の射影曲面とその上の因子からなる対の，標数 0 へのリフト可能性について議論する．まずは，リフトを定義する．

定義 1.1. X を正標数の代数閉体 k 上の代数多様体，R を *Noether* 局所環で剰余体が k であるとする．X が R にリフトするとは，R 上平坦なスキーム $\mathcal{X}$ であって，自然な射 $R \to k$ による基底変換 $\mathcal{X} \otimes_R k$ が X と同型になるようなものが存在することをいう．

B を X 上の被約因子，$B = \sum_i B_i$ を規約分解とする．対 (X, B) が R にリフトするとは，X が R 上のリフト $\mathcal{X}$ を持ち，各 B_i に対し，R 上 *flat* な $\mathcal{X}$ の閉部分スキーム $\mathcal{B}_i$ が存在し，基底変換 $\mathcal{B}_i \otimes_R k$ が B_i と同型になるようなものが存在することをいう．また，B が正規単純交差の場合，$\mathcal{B} \coloneqq \sum_i \mathcal{B}_i$ も R 上正規単純交差であることを要請する．

最後に，R が標数 0 の完備離散付値環の場合，単に標数 0 にリフトするという．

注意 1.2. R が正則局所環であるときは，(X, B) が正規単純交差であれば，$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ も自動的に R 上正規単純交差になる *([8, Lemma 2.7])*.

以後特に断りのない限り，(代数) 多様体は，標数 $p > 0$ の代数閉体 k 上定義されているとする．

標数 0 へリフト可能な多様体上では，正標数の病理的現象が起きにくいと考えられている．例えば Raynaud は，$W_2(k)$ にリフト可能な滑らかな射影多様体上では，小平の消滅定理が成立することを明らかにした．

定理 1.3 ([4, Corollarie 2.8])**.** X を標数 $p > \dim X$ の滑らかな射影多様体で，$W_2(k)$ にリフトするとする．このとき，全ての豊富な *Cartier* 因子 A に対し，

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + A)) = 0 (\forall i > 0)$$

が成立する．

また，射影曲面のリフト可能性は古くから調べられており，次のようなことが知られている．

定理 1.4. X を標数 $p > 3$ の滑らかな射影曲面で，小平次元 $\kappa(X, K_X) \leq 0$ であるとする．このとき，X は $W_2(k)$ と標数 0 の両方にリフトする．

*email:kawakami@ms.u-tokyo.ac.jp, address:Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8914, Japan

筆者の知る限り quasi-hyperelliptic 曲面のリフト可能性はまだわかっておらず，定理 1.4 において $p > 3$ としているのは，これを除くためである．また，$\kappa(X, K_X) = 1$ の際は，$W_2(k)$ と標数 0 それぞれに対し，$p = 2, 3$ でリフトしない例が知られているが，$p > 3$ でリフトするかは分かっていない．最後に，X の小平次元が 2 の時は，標数を大きくしても $W_2(k)$ にリフトしないものがある．詳しくは，[13] などを参考にされたい．

さて，本稿の目的は，定理 1.4 を滑らかな射影曲面とその上の正規単純交差因子の対に拡張することである．

2 なぜ対のリフトを考えるのか?

この章では，対のリフトを考える理由を述べる．まずは，特異点を持つ曲面のリフトを考える際に，対のリフトが重要になることを見る．

canonical 特異点のみをもつ射影曲面 X で，反標準因子 $-K_X$ が豊富なものを canonical del Pezzo 曲面と呼ぶ．標数 2 の Picard 数 1 の canonical del Pezzo 曲面 X で，次を満たすものの存在が知られている．

1. X の特異点の個数が 7 個．
2. 全ての反標準線形系 $|-K_X|$ の元が特異点を持つ．
3. ある豊富な ($\mathbb{Q}$-Cartier) $\mathbb{Z}$-因子 A が存在し，$H^1(X, \mathcal{O}_X(K_X + A)) \neq 0$.

ここで，標数 0 の Picard 数 1 の canonical del Pezzo 曲面 X' は，(1') X' の特異点は 4 つ以下，(2') Bertini の定理より，$|-K_{X'}|$ の一般元は滑らか，(3') 小平型消滅定理により，$H^1(X', \mathcal{O}_{X'}(K_{X'} + A')) = 0$ ($\forall A'$: 豊富な $\mathbb{Z}$-因子)，が成立する．これらを踏まえると，上記の del Pezzo 曲面 X は正標数特有の病理をふんだんに持つといえるであろう．従って，X は標数 0 や $W_2(k)$ にリフト不可能であることが期待されるが，X 自体は $W(k)$ に持ち上がってしまう．しかし，ここで X の最小特異点解消 $f\colon Y \to X$ とその例外因子 E の対 (Y, E) を考えると，これは $W_2(k)$ と標数 0 の両方に持ち上がらないことがわかる．このように特異点を持つ曲面に関しては，曲面それ自体ではなく，特異点解消と例外因子の対のリフト可能性を考えるほうが，正標数の病理的現象を掴む上で適切であると考えられる．このような canonical del Pezzo 曲面における正標数の病理的現象とリフト可能性の関連性については，[9] を参照されたい．

次に，対のリフトを考える際に，ログ・特異点解消をとり，因子を正規単純交差にする方が自然であることを述べる．L を $\mathbb{P}^2_k$ の全ての $\mathbb{F}_p$-line の和とし，対 $(\mathbb{P}^2_k, L)$ を考える．L の configuration は標数 p でしか実現できないことが知られている．例えば，$p = 2$ では，3 つの $\mathbb{F}_p$-line$\{-x + y + z = 0\}, \{x - y + z = 0\}, \{x + y - z = 0\}$ は全て同一の直線であり，その結果 L を構成する 7 本の直線が，3 本ずつ 7 点で交わることがわかる．この configuration は Fano 平面と呼ばれる．

さて，このような正標数独特の configuration を持つ $(\mathbb{P}^2_k, L)$ も，リフト不可能なことが期待されるが，L を構成する直線は全て整数係数であることから，$(\mathbb{P}^2_k, L)$ は $W(k)$ にリフトする．一方で，Langer [12, Section 8] は，ログ·特異点解消 $f\colon (S, \mathrm{Exc}(f) + f_*^{-1}L) \to (\mathbb{P}^2_k, L)$ に対し，対 $(S, \mathrm{Exc}(f) + f_*^{-1}L)$ は $W_2(k)$ にリフトしないことを示した．このことから，対のリフトを考える際はログ・特異点解消をとり，因子を正規単純交差にする方が適切と思われる．また，$p = 2$ のとき，S から $f_*^{-1}L$ を潰すことで，先程の 7 つの特異点を持つ canonical del Pezzo 曲面が得られるため，これらの例には密接な関係がある．

上述の Langer の例より，次がわかる．

定理 2.1 ([12, Theorem 1.4])**.** 全ての素数 p に対し，標数 p の滑らかな有理曲面 X とその上の被約な単純正規交差因子 B からなる対 (X, B) であって，$W_2(k)$ に持ち上がらないものが存在する．

有理曲面は比較的構造が分かりやすく，リフトの観点からも非常に性質が良いと思われているため，定理 2.1 は対のリフトがいかに困難であるかを表している．一方で，定理 2.1 において，$p \neq 2$ のとき，ログ・小平次元 $\kappa(X, K_X + B) = 2$ であることがわかる．従って，対のリフト可能性は，曲面 X の小平次元 $\kappa(X, K_X)$ ではなく，対 (X, B) のログ・小平次元 $\kappa(X, K_X + B)$ と密接な関わりがあるのではないかと予想できる．

予想 2.2 (定理 1.4 の対バージョン)**.** (X, B) を滑らかな射影曲面 X と被約な単純正規交差因子 B からなる対とする．$\kappa(X, K_X + B) \leq 0$ で，p がある程度大きければ，(X, B) は $W_2(k)$ と標数 0 の両方にリフトする．

3　主結果

十分大きい標数で，予想 2.2 が成立することを証明した．

定理 3.1 ([8, Theorem 1.3])**.** 正整数 p_0 であって以下の性質を満たすものが存在する．X を標数 $p > p_0$ の滑らかな射影曲面，B を被約な正規単純交差因子であって，$\kappa(X, K_X + B) \leq 0$ を満たすとする．このとき，(X, B) は $W_2(k)$ と標数 0 の両方にリフトする．また，$\kappa(X, K_X + B) = -\infty$ であれば，(X, B) は $W(k)$ にリフトし，最適な上限として $p_0 = 5$ とできる．

Hara による定理 1.3 のログ・バージョン (定理 4.18) を用いることで，正規射影曲面の小平型消滅定理を得る．

系 3.2 ([8, Theorem 1.4])**.** 正整数 p_0 であって以下の性質を満たすものが存在する．X を標数 $p > p_0$ の正規射影曲面であって，$\kappa(X, K_X) \leq 0$ を満たすとする．このとき，全てのネフかつ巨大な $\mathbb{Z}$-因子 D に対して，$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + D)) = 0\,(\forall i > 0)$ が成立する．

4　定理 3.1 の証明

4.1　証明のスケッチ

まず，記号を用意する．

定義 4.1. 正規代数多様体とその上の $\mathbb{Q}$-因子の対 (X, B) のことをログ・多様体と呼ぶ．$\dim X = 2$ のときは，特にログ・曲面と呼ぶ．また，X が滑らかかつ，$\mathrm{Supp}(B)$ が正規単純交差のとき，(X, B) はログ・スムースであるという．

定義 4.2. (X, B) をログ・代数多様体で，B が被約であるとする．U を (X, B) のログ・スムース領域，$j \colon U \to X$ を自然な包含とする．このとき，反射的ログ・微分形式層 $\Omega_X^{[i]}(\log B)$ を $\Omega_X^{[i]}(\log B) \coloneqq j_*\Omega_U^i(\log B)$ で定義する．また，ログ・接層 $T_X(-\log B)$ を $T_X(-\log B) \coloneqq \Omega_X^{[1]}(\log B)^*$ で定義する．ただし，$(-)^* \coloneqq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{O}_X)$ である．

注意 4.3. 定義において，X が正規かつ B が被約より，$\mathrm{codim}_X(U) \geq 2$ であるため，$\Omega_X^{[i]}(\log\, B)$ は反射的，すなわち，$\Omega_X^{[i]}(\log\, B) = \Omega_X^{[i]}(\log\, B)^{**}$ である．

以下の二つの補題が基本となる．

補題 4.4. (X, B) を射影的ログ･スムースな多様体とする．もし，$H^2(X, T_X(-\log\, B)) = 0$ なら (X, B) は $W(k)$ に *formal* スキームとしてリフトする．加えて，$H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ であれば，(X, B) は $W(k)$ に *(*スキームとして*)* リフトする．

滑らかな多様体 X のリフトの障害は，$H^2(X, T_X)$ にあることがよく知られている．ログ・多様体 (X, B) の場合は，$H^2(X, T_X(-\log\, B)) = 0$ に (X, B) のリフトの障害があることがわかる．証明は，例えば [9, Theorem 2.3] などを参照されたい．

補題 4.5. $f\colon (Y, B_Y) \to (X, B \coloneqq f_*B_Y)$ を射影的ログ・曲面の間の双有理写像とする．このとき，単射 $H^2(Y, T_Y(-\log\, B_Y)) \hookrightarrow H^2(X, T_X(-\log\, B))$ が存在する．

証明. 二重双対による自然な単射

$$f_*\Omega_Y(\log\, B_Y) \hookrightarrow (f_*\Omega_Y(\log\, B_Y))^{**} \cong \Omega_X^{[1]}(\log\, B)$$

の大域切断をとり，Serre の双対定理を使えばわかる． □

補題4.4と補題4.5により，定理3.1はほとんどの場合，極小モデルプログラム (MMP) のアウトプットに帰着できる．さて，(X, B) を射影的ログ・スムース曲面とし，(X, B) のリフト可能性を調べる．本稿では $\kappa(X, K_X + B) = 0$ の場合のみを扱う．$(K_X + B)$-MMP を回し，対 (X', B') を得る．ここで，特異点の悪さに応じ，以下の 4 つの場合に分ける．MMP に現れる特異点の定義に関しては，[10, Section 2.3] を参照されたい．

(0) (X', B') が terminal.

(1) (X', B') が canonical かつ not terminal.

(2) (X', B') が klt かつ not canonical.

(3) (X', B') が dlt かつ not klt.

B' は被約であるため，(0)–(2) では，$B' = 0$ である．(0) の場合は，定理 1.4 を使えば，$p > 3$ で (X, B) がリフトすることがわかる．(3) の場合は，$K'_X \equiv -B' < 0$ より，さらに $K_{X'}$-MMP を回すことで，birational contraction $\phi\colon X' \to \overline{X}$ と $K_{\overline{X}}$-Mori fiber space $g\colon \overline{X} \to Z$ を得る．$K_{X'} + B' \equiv 0$ より，negativity lemma から，$K_{X'} + B' \equiv \phi^*(K_{\overline{X}} + \overline{B})$ を得る．ここで，$\overline{B} = \phi_*B'$ である．特に，$K_{\overline{X}} + \overline{B} \equiv 0$ かつ $(\overline{X}, \overline{B})$ は lc である．$g\colon \overline{X} \to Z$ は Mori fiber space なので，$\dim Z < \dim X = 2$ であり，(3) はさらに以下の場合に分けることができる．

(3-1) $\dim Z = 1$.

(3-2) $\dim Z = 0$.

以下，(1), (2), (3-1), (3-2) の各々の場合に対し，(X, B) のリフト可能性を調べる．

4.2 (1):(X', B') が canonical かつ not terminal の場合

このとき，X' は滑らかでない，canonical 特異点を持つ射影曲面で $K_{X'} \equiv 0$，$B' = 0$ である．補題 4.4 と 4.5 より，次を示せば十分である．

補題 4.6. X' を標数 $p > 19$ の *canonical* 特異点のみを持つ滑らかでない射影曲面で $K_{X'} \equiv 0$ を満たすとする．このとき，$H^2(X', T_{X'}) = 0$ である．

証明. $f\colon Y \to X'$ を最小特異点解消とする．Y は有理曲線を含むため，K3 曲面か Enriques 曲面である．K3 曲面の場合のみ証明する．A_n, D_n, E_6, E_7, E_8-特異点の最小特異点解消の例外因子の交点行列の行列式は $(-1)^n(1+n), (-1)^n 4, 3, -2, 1$ であること，及び $\rho(Y) \leq 22$ から，$\mathrm{Exc}(f)$ の行列式は $p(> 19)$ では割り切れないことがわかる．よって，正則微分形式の拡張定理 ([5, Theorem 1.3]) より $f_*\Omega_Y = \Omega_{X'}^{[1]}$ が成立する．従って，Serre の双対定理から $H^2(X', T_{X'}) \cong H^0(X', \Omega_{X'}^{[1]}) = H^0(Y, \Omega_Y) = 0$ を得る． □

注意 4.7. 命題 *4.6* は，$p \leq 19$ では成立しない．実際，各 19 以下の素数 p に対し，標数 p の *RDP(=canonical) K3* 曲面 S が存在し，その最小特異点解消 $\pi\colon T \to S$ の例外因子 F が 21 本の (-2)-*curve* であるようなものが存在する *([14])*．標数 0 の *K3* 曲面の *Picard* 数は 20 以下であることから，(T, F) は標数 0 にリフトしないことがわかる．ここから，$H^2(S, T_S) \neq 0$ や，$\pi_*\Omega_T$ が $\Omega_S^{[1]}$ より真に小さい部分層になることがわかる．

4.3 (2):(X', B') が canonical かつ not terminal の場合

このとき，X' は klt かつ not canonical な射影曲面で $K_{X'} \equiv 0$，$B' = 0$ である．

定義 4.8. X' を正規射影曲面とする．X' は *klt* かつ *not canonical* であり，$K_{X'} \equiv 0$ であるとき，X' を *strictly klt CY* 曲面という．

ここで証明することは，次の命題である．

命題 4.9. 正整数 p_0 であって以下の性質を満たすものが存在する．X' を標数 $p > p_0$ の *strictly klt CY* 曲面とする．このとき，任意のログ・特異点解消 $f\colon Y \to X'$ に対し，$(Y, \mathrm{Exc}(f))$ は $W(k)$ にリフトする．

実際，$(K_X + B)$-MMP $(X, B) \to X'$ は，X' のあるログ・特異点解消 f' を経由し，B の強変換は $\mathrm{Exc}(f')$ に含まれるので，命題 4.9 より，Section 4.1 の場合分けの (2) の場合の主張を得る．

Cascini-Tanaka-Witaszek は，基礎体の標数が 5 より大きい ϵ-klt log del Pezzo 曲面が，bounded family を成すことを示し，そこから ϵ に依存する $p(\epsilon)$ が存在し，標数が $p(\epsilon)$ より大きい ϵ-klt log del Pezzo 曲面のログ・特異点解消が $W(k)$ にリフトすることを示した ([3, Lemma 3.1 and Proposition 3.2])．ここで，基礎体の標数が 5 より大きいという仮定は，技術的なものであり，標数が 5 より大きい 2 次元 klt 特異点は，F-regular であるという事実に使っている．

命題 4.9 も，これと同じ方針で証明する．まず，ある正数 $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，全ての代数閉体上定義された全ての (strictly) klt CY 曲面は ϵ-klt になることをいう．これには，Global ACC と呼ばれる定理を使う．

補題 4.10 (cf. [1, Proposition 11.7])**.** $\Lambda \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ を *DCC* 集合とする．このとき，有限部分集合 $\Gamma \subset \Lambda$ が存在して，以下が成立する：任意の代数閉体上定義された任意のログ・曲面 (W, B_W) で，

- (W, B_W) は *lc*,
- B_W の各係数は，Λ の元，
- $K_W + B_W \equiv 0$,

であるならば，B_W の各係数は，Γ の元である．

注意 4.11. 補題 *4.10* は，基礎体が固定された標数 0 の代数閉体である場合，任意次元で証明されている *([6, Theorem 1.5])*．また，基礎体が固定された正標数の代数閉体である場合は，*2* 次元で証明されている *([1, Proposition 11.7])*．補題 *4.10* では基礎体を動かしているが，*[1, Proposition 11.7]* と同様の証明が機能する．

補題 4.10 を strictly klt CY 曲面の mld の extraction に適用することで，次がわかる．

補題 4.12. ある正数 $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，全ての代数閉体上定義された全ての *klt CY* 曲面は，ϵ-*klt* である．

命題 *4.9* の証明の概略. 補題 4.12 と [3, Lemma 3.1] により，標数が 5 より大きい代数閉体上定義された strictly klt CY 曲面は混標数の base 上の bounded family を成すことがわかる．ここで，基礎体の標数が動くため，base スキームに混標数のものが現れることがポイントである．この geometric generic fiber たちのログ・特異点解消から，十分大きい標数での strictly klt CY 曲面の $W(k)$-リフト可能性を導くことができる．詳しくは，[3, Proposition 3.2] の証明を参照されたい．これにより，$W(k)$-リフトするログ・特異点解消の存在がわかるが，実は任意のログ・特異点解消が $W(k)$-リフトすることもわかり，命題 4.9 を得る． □

4.4 (3-1): (X', B') が dlt かつ not klt，$\dim Z = 1$ の場合

このとき，$g\colon \overline{X} \to Z$ は $K_{\overline{X}}$-Mori fiber space，$K_{\overline{X}} + \overline{B} \equiv 0$ である．従って，次を示せば十分である．

命題 4.13. $(\overline{X}, \overline{B})$ を標数 $p > 3$ のログ・曲面とする．$g\colon \overline{X} \to Z$ を射影的全射で，$\dim Z = 1$, $g_*\mathcal{O}_{\overline{X}} = \mathcal{O}_Z$, $-(K_{\overline{X}} + \overline{B})$ が *g-nef* とする．F を g の一般ファイバーとする．このとき，$D \cdot F > 0$ なる全ての $\mathbb{Z}$-因子 D に対して

$$g_*((\Omega^{[1]}_{\overline{X}}(\log \overline{B}) \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(-D))^{**}) = 0$$

が成立する．

(3-1) の場合では，$-K_{\overline{X}}$ は g-豊富であるため，命題 4.13 を $D = -K_{\overline{X}}$ 使い，その大域切断を取ることで，Serre の双対定理から，$H^2(\overline{X}, T_{\overline{X}}(-\log \overline{B})) = 0$ を得る．これと補題 4.4, 4.5 より，欲しいリフト可能性を得る．

命題 *4.13* の証明の概略. この命題の主張は，Z に関して局所的であるため，必要ならば Z を小さく取り直して良い．$p > 3$ を使えば Z を小さく取り直し，(X, B) を Z 上ログ・ スムースにできることがわかる．ここにのみ標数の仮定を使う．ログ・ スムースにしたことで，次の完全列を得る．

$$0 \to \mathcal{O}_{\overline{X}}(f^*K_Z) \to \Omega_{\overline{X}}(\log \overline{B}) \to \Omega_{\overline{X}/Z}(\log \overline{B}) \to 0.$$

F に制限して，次数を比較することにより，この完全列の両端に $\mathcal{O}_X(D)$ が含まれないことがわかるので，補題の主張を得る． □

注意 4.14. 命題 *4.13* は $p = 2, 3$ では成立しない．実際 X として，*Raynaud* の準楕円ファイブレーションを持つ小平次元 1 の小平の消滅定理を満たさない曲面をとれば，これが反例になることが確かめられる．

4.5 (3-2):(X', B') が dlt かつ not klt，$\dim Z = 0$ の場合

このとき，$\overline{X}$ は Picard 数 1 の klt del Pezzo 曲面，$(\overline{X}, \overline{B})$ は lc である．従って，次の命題を示せば十分である．

命題 4.15. $\overline{X}$ を標数 $p > 5$ の *klt del Pezzo* 曲面とする．$\overline{B}$ を被約な因子で，$(\overline{X}, \overline{B})$ が *lc* になるとする．このとき，全ての豊富な $\mathbb{Z}$-因子 D に対し，

$$H^0(\overline{X}, (\Omega^{[1]}_{\overline{X}}(\log \overline{B}) \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(-D))^{**}) = 0$$

が成立する．

命題 4.15 をログ・特異点解消に帰着させるため，次の補題を示す．

補題 4.16. $(\overline{X}, \overline{B})$ を標数 $p > 5$ の *lc* 曲面で，$\overline{B}$ が被約とする．D を $\mathbb{Z}$-*divisor* とする．$f\colon Y \to \overline{X}$ を $(\overline{X}, \overline{B})$ のログ・特異点解消，$B_Y := f_*^{-1}\overline{B} + \mathrm{Exc}(f)$ とおく．このとき，

$$\Phi\colon f_*(\Omega_Y(\log B_Y) \otimes \mathcal{O}_Y(-\lceil f^*D \rceil))^{**} \cong (\Omega^{[1]}_{\overline{X}}(\log \overline{B}) \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(-D))^{**}$$

が成立する．

この補題 4.16 は，$D = 0$ のとき，Graf [5, Theorem 1.2] により証明されている．主張は Z に関して局所的であるため，D の Cartier 指数が p で割り切れないときは D の指数 1 被覆を取ることで $D = 0$ に帰着させることができる．一方で，D の Cartier 指数が p で割り切れる際は，指数 1 被覆が準エタールになるとは限らないため，$D = 0$ に帰着させることはできない．(3-2) の状況では，$D = -K_{\overline{X}}$ として使いたいが，$\overline{X}$ が MMP の output であるため，$K_{\overline{X}}$ の Cartier 指数を制御することは難しい．このため，補題 4.16 の形の主張がポイントとなる．ただし，証明手法は [5, Theorem 1.2] に近いため，ここでは省略する．

命題 4.15 の証明の概略． 命題 4.15 の状況で，$f\colon Y \to (\overline{X}, \overline{B})$ をログ・特異点解消とし，補題 4.16 を使うことで，

$$H^0(\overline{X}, (\Omega^{[1]}_{\overline{X}}(\log \overline{B}) \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(-D))^{**}) \cong H^0(Y, \Omega_Y(\log f_*^{-1}B + \mathrm{Exc}(f)) \otimes \mathcal{O}_Y(-\lceil f^*D \rceil))$$

がわかる．さらに，D が豊富であることを使うと

$$H^0(Y, \Omega_Y(\log f_*^{-1}B + \mathrm{Exc}(f)) \otimes \mathcal{O}_Y(-\lceil f^*D \rceil)) \cong H^0(Y, \Omega_Y(\log \mathrm{Exc}(f)) \otimes \mathcal{O}_Y(-\lceil f^*D \rceil))$$

が証明できる．あとは，次の 2 つの定理 (定理 4.17 と 4.18) の帰結である． □

定理 4.17 ([11, Theorem 1.4])**.** $\overline{X}$ を標数 $p > 5$ の *Picard* 数 1 の *klt del Pezzo* 曲面とする．$f\colon Y \to \overline{X}$ をログ・特異点解消とすると，対 $(Y, \mathrm{Exc}(f))$ は $W(k)$ にリフトする．

定理 4.17 は，Picard 数 1 の klt del Pezzo 曲面を，適切な双有理変換により，Mori fiber space か canonical del Pezzo 曲面にすることで証明される．

定理 4.18 ([7, Corollary 3.8], (cf. [8, Theorem 2.11])). (Y, E) を E が被約な射影的ログ·スムース曲面で，$W_2(k)$-リフトするとする．A を豊富な $\mathbb{Q}$-因子であり，$\mathrm{Supp}(\{A\}) \subset E$ を満たすものとする．このとき，全ての $i+j<2$ なる非負整数 $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，

$$H^j(Y, \Omega_Y^i(\log\, E) \otimes \mathcal{O}_Y(-\lceil A \rceil)) = 0$$

が成立する．

4.6 補足

定理 3.1 は，多くの場合，次の Bogomolov-Sommese 消滅定理の帰結となっている．

定理 4.19 (Bogomolov-Sommese 消滅定理, [8, Theorem 1.2]). 正整数 p_0 であって以下の性質を満たすものが存在する．(X, B) を標数 $p > p_0$ の *lc* 射影曲面とする．もし，$\kappa(X, K_X + \lfloor B \rfloor) \neq 2$ であれば，全ての $\kappa(X, D) > i$ なる $\mathbb{Z}$-因子 D に対して，

$$H^0(X, (\Omega_X^{[i]}(\log \lfloor B \rfloor) \otimes \mathcal{O}_X(-D))^{**}) = 0$$

が成立する．また，$\kappa(X, K_X + \lfloor B \rfloor) = -\infty$ のときは，$p_0 = 5$，$\kappa(X, K_X + \lfloor B \rfloor) = 0$ のときは，p_0 を *klt CY* 曲面の *Gorenstein* 指数の最大値，$\kappa(X, K_X + \lfloor B \rfloor) = 1$ のときは $p_0 = 3$ とできる．

注意 4.20. 定理 *4.19* は，条件 $\kappa(X, K_X + \lfloor B \rfloor) \neq 2$ を外すと，標数 p を大きくしても成立しない．実際，定理 *2.1* の曲面対 (X, B) 上では，*Bogomolov-Sommese* 消滅定理は成立しない．また，基礎体の標数が 0 のとき，*klt CY* 曲面の *Gorenstein* 指数の最大値は 19 であることが知られている *([2, Theorem C(a)])*．一方で，基礎体が正標数にもなりうる場合は，補題 *4.12* から，その上限の存在はわかるものの，具体的な値は分かっていない．

謝辞

城崎代数幾何学シンポジウム 2021 での講演の機会を与えて下さった田中 公先生, 古川 勝久先生, 馬 昭平先生に心よりお礼を申し上げます．本研究は JSPS KAKENHI 19J21085 から助成を受けています．

参考文献

[1] C. Birkar, Existence of flips and minimal models for 3-folds in char p, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), **49**, 169–212, 2016.

[2] R. Blache, The structure of l.c. surfaces of Kodaira dimension zero, J. Algebraic Geom., **4**, 137–179, 1995.

[3] P. Cascini, H. Tanaka, and J. Witaszek, On log del Pezzo surfaces in large characteristic, Compos. Math., **153**(4):820–850, 2017.

[4] P. Deligne and L. Illusie, Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham, Invent. Math. **89**, 247–270, 1987.

[5] P. Graf, Differential forms on log canonical spaces in positive characteristic, J. London Math. Soc.

[6] C. D. Hacon, J. McKernan, and C. Xu, ACC for log canonical thresholds, Ann. of Math. (2) **180**, no. 2 (2014): 523–571.

[7] N. Hara, A characterization of rational singularities in terms of injectivity of Frobenius maps, Amer. J. Math., **120**, 981–996, 1998.

[8] T. Kawakami, Bogomolov-Sommese vanishing and liftability for surface pairs in positive characteristic, arXiv: 2108.03768.

[9] T. Kawakami and M. Nagaoka, Pathologies and liftability on Du Val del Pezzo surfaces in positive characteristic, arXiv:2008.07700, 2020.

[10] J. Kollár and S. Mori, Birational geometry of algebraic varieties, volume 134 of CambridgeTracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original.

[11] J. Lacini, On rank one log del Pezzo surfaces in characteristic different from two and three, arXiv: 2005.14544.

[12] A. Langer, The Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality for logarithmic surfaces in positive characteristic, Duke Math. J., **165**, 2737–2769, 2016.

[13] C. Liedtke, Algebraic surfaces in positive characteristic, Birational geometry, rational curves, and arithmetic, 229–292, 2013.

[14] I. Shimada, Rational double points on supersingular K3 surfaces, Math. Comp., **73**(248):1989–2017, 2004.