入されたものであるが、Donaldson-Thomas 理論の圏論化の文脈でも有用であることが示された。もし (1.4) のように直接極限で定義することが可能になった場合、Koszul 双対性（あるいは次元還元とも呼ばれる）の議論で両者の定義は同値になると期待される。また、この場合の圏論化 Hall 積は [Tod20] で構成した。

2 Resolved conifold に対する圏論的壁超え公式

2.1 Resolved conifold

Resolved conifold は以下で定義される非コンパクト 3 次元カラビヤウ多様体である。

$$X = \mathrm{Tot}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 2}).$$

これは conifold 特異点 $\{xy + zw = 0\} \subset \mathbb{C}^4$ のクレパント小特異点解消としても得られる。$C = \mathbb{P}^1 \subset X$ を射影 $X \to \mathbb{P}^1$ のゼロ切断とする。X 上の曲線を数え上げる DT 不変量の生成関数は以下で与えられることが良く知られている。

$$\sum_{n,\beta} P_{n,\beta[C]} q^n t^\beta = \prod_{m \geq 1} (1 - (-q)^m t)^m. \tag{2.1}$$

ここで $P_{n,\beta[C]}$ は PT 不変量と呼ばれ、以下で定義される。

$$P_{n,\beta[C]} = \int_{[P_n(X,\beta[C])]^{\mathrm{vir}}} 1 = \int_{P_n(X,\beta[C])} \chi_B \ de.$$

モジュライ空間 $P_n(X, \beta[C])$ は安定対と呼ばれるデータ (F, s) であって、$[F] = \beta[C]$、$\chi(F) = n$ を満たすものをパラメトライズしている。ここで (F, s) が安定対であるとは、F が X 上の純一次元層で、$s\colon \mathcal{O}_X \to F$ の余核の次元が高々ゼロ次元であるものである。PT 不変量の生成関数 (2.1) は、次の等式を満たす。

$$\prod_{m \geq 1} (1 - (-q)^m t)^m = \exp\left(\sum_{k \geq 1, g \geq 0} \frac{1}{k} \left(2 \sin\left(\frac{k\lambda}{2}\right)\right)^{2g-2} t^k \right).$$

ここで $q = -e^{i\lambda}$ であり、右辺は X 上の Gromov-Witten 不変量の生成関数を与えることが直接計算により知られている。上の等式は GW/DT 対応の最も基本的な例を与えている。

長尾-中島 [NN11] は枠付き箙の表現から定まる DT 型不変量に対して壁越え公式を証明することで等式 (2.1) を証明した。以下で長尾-中島の壁越え公式の圏論化について解説し、これを用いた等式 (2.1) の圏論化について述べる。これらは論文 [Todd] における主結果である。

2.2 非可換クレパント解消

Resolved conifold X に対し、Van den Bergh により以下の導来同値が存在する。

$$D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(A).$$

ここで A は以下の超ポテンシャル付き箙 (Q,W) の道代数である。

$$
\begin{tikzcd}
\bullet^0 \arrow[r, bend left=40, "a_2"] \arrow[r, bend left=10, "a_1"] & \bullet^1 \arrow[l, bend left=10, "b_1"] \arrow[l, bend left=40, "b_2"]
\end{tikzcd}, \quad W = a_1 b_1 a_2 b_2 - a_1 b_2 a_2 b_1.
$$

以降、次で定義される枠付き箙 $(Q^\dagger, W)$ も考察する。

$$
\begin{tikzcd}
\bullet^0 \arrow[r, bend left=40, "a_2"] \arrow[r, bend left=10, "a_1"] & \bullet^1 \arrow[l, bend left=10, "b_1"] \arrow[l, bend left=40, "b_2"] \\
\bullet^\infty \arrow[u, "\xi"] &
\end{tikzcd}, \quad W = a_1 b_1 a_2 b_2 - a_1 b_2 a_2 b_1.
$$

各 $v = (v_0, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ に対し、$\mathcal{M}_{Q^\dagger}(v)$ を次で定義する。

$$
\mathcal{M}_{Q^\dagger}(v) = \left[V_0 \oplus \mathrm{Hom}(V_0, V_1)^{\oplus 2} \oplus \mathrm{Hom}(V_1, V_0)^{\oplus 2} / \, \mathrm{GL}(V_0) \times \mathrm{GL}(V_1) \right].
$$

上のスタックは次元ベクトルが $(1, v)$ である $Q^\dagger$-表現のモジュライスタックを与えている。ここで 1 は頂点 ∞ の次元に対応し、v_i は頂点 i の次元に対応している。

また、各 $\theta \in \mathbb{R}^2$ に対し $Q^\dagger$-表現の安定性条件も定まる。つまり $Q^\dagger$-表現 R で次元ベクトルが $(1, v)$ であるものに対し、R が θ-半安定であるとは任意の部分表現 $R' \subset R$ （商表現 $R \twoheadrightarrow R'$）に対しで R' が Q-表現であるもの（つまり R' の次元ベクトルが $(0, v')$ の形）に対し不等式 $\theta(R') \leq 0$ （$\theta(R') \geq 0$）がなりたつこととして定義する。θ-半安定な $Q^\dagger$-表現のモジュライスタックは次の開部分スタックをなす。

$$
\mathcal{M}^\theta_{Q^\dagger}(v) \subset \mathcal{M}_{Q^\dagger}(v).
$$

更に、次の図式が存在する。

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^\theta_{(Q^\dagger, W)}(v) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}^\theta_{Q^\dagger}(v) \arrow[d, "w = \mathrm{Tr}(W)"] \\
\mathrm{Crit}(w) & \mathbb{A}^1
\end{tikzcd} \tag{2.2}
$$

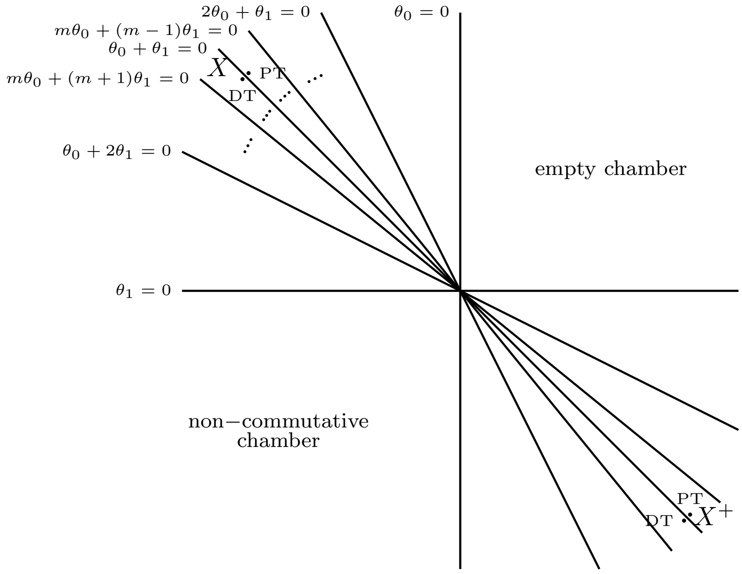
ここで $\mathcal{M}^\theta_{(Q^\dagger, W)}(v)$ は超ポテンシャル付き箙 $(Q^\dagger, W)$ の次元ベクトルが $(1, v)$ である表現のモジュライスタックを与えている。つまり、関数 w の臨界点集合で与えられる $\mathcal{M}^\theta_{Q^\dagger}(v)$ の閉部分スタックは超ポテンシャル W の微分で与えられる関係式を満たす $Q^\dagger$-表現と対応している。

2.3 Resolved conifold の DT 不変量

$\theta \in \mathbb{R}^2$ を一般に取ると、$\mathcal{M}_{(Q^\dagger, W)}(v)$ は準射影的スキームとなる。この場合、$(Q^\dagger, W)$-表現の DT 不変量は以下で与えられる。

$$
\mathrm{DT}_\theta(v) := \int_{\mathcal{M}^\theta_{(Q^\dagger, W)}(v)} \chi_B \, de
$$

また、モジュライ空間 $\mathcal{M}^{\theta}_{(Q^{\dagger},W)}(v)$ 及び DT 不変量 $\mathrm{DT}_{\theta}(v)$ の壁と領域の構造は以下の図で与えられることが知られている。



例えば $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$W_m := \mathbb{R}_{>0}(1-m, m)$$

は上の図における壁の一つを与えている。壁に含まれない θ に対し、生成関数

$$\mathrm{DT}_{\theta}(Q^{\dagger}) := \sum_{(v_0,v_1)\in\mathbb{Z}^2} \mathrm{DT}_{\theta}(v_0,v_1) q_0^{v_0} q_1^{v_1}$$

を考える。上記の生成関数が壁を越えた際の変化を記述するのが壁越え公式である。上述の壁 W_m における壁越え公式は長尾-中島 [NN11] により次で与えられている。

$$\mathrm{DT}_{\theta_+}(Q^{\dagger}) = \mathrm{DT}_{\theta_-}(Q^{\dagger}) \cdot (1 + q_0^m(-q_1)^{m-1})^m. \tag{2.3}$$

ここで $\theta \in W_m$、$\theta_{\pm} = \theta \pm \varepsilon(-1,1)$、$0 < \varepsilon \ll 1$ である。

$\mathbb{R}^2$ の第一象限は空集合領域と呼ばれる。実際 $\theta_{\emptyset} \in \mathbb{R}^2$ を空集合領域の点とすると、次が成り立つ。

$$\mathcal{M}^{\theta_{\emptyset}}_{(Q^{\dagger},W)}(v) = \begin{cases} \operatorname{Spec}\mathbb{C}, & v = 0, \\ \emptyset, & v \neq 0. \end{cases}$$

また $\theta_{\mathrm{PT}} \in \mathbb{R}^2$ を壁 $\mathbb{R}_{>0}(-1,1)$ に十分近い（但し $\mathbb{R}_{>0}(-1,1)$ より上に位置する）領域に入る安定性条件とする。この様な領域は PT 領域と呼ばれる。実際、次の PT モジュライ空間との同型が存在する。

$$\mathcal{M}^{\theta_{\mathrm{PT}}}_{(Q^{\dagger},W)}(v) \xrightarrow{\cong} P_n(X, \beta[C]),\ \beta = v_0 - v_1, n = v_0. \tag{2.4}$$

特に、等式 $P_{n,\beta[C]} = \mathrm{DT}_{\theta_{\mathrm{PT}}}(n, n-\beta)$ が成り立つ。等式 (2.1) は壁越え公式 (2.3) を空集合領域から PT 領域まで当てはめることで示される。

2.4 Resolved conifold の圏論的 DT 不変量

図式 (2.2) において、モジュライスタック $\mathcal{M}^{\theta}_{Q^{\dagger}}(v)$ は滑らかであり、よってこれは $M^{\theta}_{(Q^{\dagger},W)}(v)$ の大域的な d-臨界チャートを与えている。そこで、次の定義を与える。

定義 2.1. Resolved conifold X の圏論的 DT 不変量を

$$\mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta}_{Q^{\dagger}}(v), w)$$

と定義する。

一般の θ を取ると、$\mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta}_{Q^{\dagger}}(v), w)$ の周期的サイクリックホモロジーのオイラー数は（符号を除いて）$\mathrm{DT}_{\theta}(v)$ と符号を除いて等しいことが示される。次が壁越え公式 (2.3) の圏論化である。

定理 2.2. ([Todd, Theorem 1.2]) 各 $\theta \in W_m$ に対し、次の形の準直交分解が存在する。

$$\mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta_+}_{Q^{\dagger}}(v), w) = \left\langle \binom{m}{l}\text{-}\textit{copies of}\ \mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta_-}_{Q^{\dagger}}(v - l s_m), w) : l \geq 0 \right\rangle.$$

ここで $s_m = (m, m-1)$ である。

上の定理の準直交分解は、周期的サイクリックホモロジー及びそのオイラー数を取ることで壁越え公式 (2.3) を復元することが示される。

同型 (2.4) に着目することで、resolved conifold X 上の圏論的 PT 不変量を次で定義する。

$$\mathcal{DT}(P_n(X, \beta[C])) := \mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta_{\mathrm{PT}}}_{Q^{\dagger}}(n, n-\beta), w).$$

$S \to \mathbb{C}^2$ を一点ブローアップとして $X = \mathrm{Tot}_S(\omega_S)$ とみなすと、上の定義は [Todb, Todc] で与えたものと同値である。定理 2.2 を空集合領域から PT 領域までの壁越えで当てはめることで次を得る。

系 2.3. ([Todd, Theorem 1.1]) 次の形の準直交分解が存在する。

$$\mathcal{DT}(P_n(X, \beta[C])) = \langle a_{n,\beta}\text{-}\textit{copies of}\ \mathrm{MF}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}, 0) \rangle.$$

ここで $a_{n,\beta}$ は次で与えられる。

$$a_{n,\beta} := \sum_{\substack{l\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ \sum_{m \geq 1} l(m)\cdot(m,1) = (n,\beta)}} \prod_{m \geq 1} \binom{m}{l(m)}.$$

これまでと同様に、周期的サイクリックホモロジーのオイラー数を取ることで上の系は等式 (2.1) の圏化を与えていることが分かる。

2.5 定理 2.2 の証明の方針について

各 $\theta \in W_m$ に対して、$\mathcal{M}^{\theta}_{Q^{\dagger}}(v) \to M^{\theta}_{Q^{\dagger}}(v)$ を良モジュライ空間とする。この時、次の壁超え図式が存在する。

$$\begin{tikzcd} M^{\theta_+}_{Q^{\dagger}}(v) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & M^{\theta_-}_{Q^{\dagger}}(v) \arrow[dl] \\ & M^{\theta}_{Q^{\dagger}}(v) & \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

上の図式は滑らかな準射影的代数多様体の間の（広い意味での）フリップであることが示される。Bondal-Orlov [BO] や川又 [Kaw02] による D/K 予想によると、フリップによって導来圏や行列因子化の圏の間の充満忠実関手が存在すると期待されている。上のような GIT 安定性の壁超えの場合、いわゆる窓部分圏を用いることで D/K 予想にアプローチできることが知られている [HL15, BFK19]。上の状況下では、窓部分圏とは部分三角圏 $\mathbb{W}^{\theta_{\pm}}_{\mathrm{glob}}(v) \subset \mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta}_{Q^{\dagger}}(v), w)$ であって、合成関手

$$\mathbb{W}^{\theta_{\pm}}_{\mathrm{glob}}(v) \hookrightarrow \mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta}_{Q^{\dagger}}(v), w) \twoheadrightarrow \mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta_{\pm}}_{Q^{\dagger}}(v), w)$$

が同値となるものである。窓部分圏は一意的ではないが、もし上手く選んで包含関係 $\mathbb{W}^{\theta_-}_{\mathrm{glob}}(v) \subset \mathbb{W}^{\theta_+}_{\mathrm{glob}}(v)$ が示されると充満忠実関手

$$\mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta_-}_{Q^{\dagger}}(v), w) \hookrightarrow \mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta_+}_{Q^{\dagger}}(v), w) \tag{2.6}$$

が存在することになる。実際、上の議論を用いて充満忠実関手 (2.6) の存在を [Todb, Theorem 4.3.5] で示した。

一方、実際に示す必要があるのは充満忠実関手 (2.6) の準直交補空間が $\mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta_-}_{Q^{\dagger}}(v - ls_m), w)$ が記述できるということである。そのため、Padurariru [Păda, Pădb, Pădc] により導入された超ポテンシャル付き箙の圏論的 Hall 代数を用いる。これは各分解 $v = v_1 + v_2$ で $\theta(v_1) = 0$ を満たすものに対し、関手

$$*\colon\ \mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta}_{Q}(v_1), w) \boxtimes \mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta}_{Q^{\dagger}}(v_2), w) \to \mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta}_{Q^{\dagger}}(v), w)$$

を与える。定理 2.2 は各 $l \geq 0$ と整数列 $0 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_l \leq m - l$ に対して、圏論的 Hall 積

$$\begin{aligned} \boxtimes_{i=1}^{l} \mathrm{MF}(\mathcal{M}^{\theta}_{Q}(s_m), w)_{j_i + (2i-1)(m^2 - m)} \boxtimes \left(\mathbb{W}^{\theta_-}_{\mathrm{glob}}(v - ls_m) \otimes \chi_0^{j_l + 2l(m^2 - m)} \right) \\ \to \mathbb{W}^{\theta_+}_{\mathrm{glob}}(v) \end{aligned} \tag{2.7}$$

が充満忠実関手を与え、さらにこれらの本質的像が準直交分解を与えることで示される。ここで $j_i + (2i-1)(m^2 - m)$ は固定された $\mathbb{C}^*$-重み部分を指し、χ_0 は $\mathcal{M}^{\dagger}_{Q}(v)$ 上のある直線束である。

関手 (2.7) が充満忠実で準直交分解をなすことを示すには、これらの性質が良モジュライ空間 $M^{\theta}_{Q^{\dagger}}(v)$ 上形式局所的に同様の性質が成り立つことを示せばよい。エタールスライス定理

を用いることで、図式 (2.5) の形式的ファイバーは（超ポテンシャルの非退化 2 次式の部分を取り除くと）グラスマニアンフリップの形式的ファイバーと同型になることが示される。ここでグラスマニアンフリップとは商スタック

$$\mathcal{G}_{a,b}(d) = [(\mathrm{Hom}(A, V) \oplus \mathrm{Hom}(V, B))/\,\mathrm{GL}(V)]$$

の二つの GIT 商で得られる双有理写像

$$G^{+}_{a,b}(d) \dashrightarrow G^{-}_{a,b}(d)$$

を指す。ここで、$d = \dim V$、$a = \dim A \geq b = \dim B$ である。Donovan-Segal [DS14] は導来同値 $D^b(G^{-}_{a,b}(d)) \simeq D^b(G^{+}_{a,b}(d))$ を $a = b$ の場合に窓部分圏を用いて示したが、同様の議論を適用して充満忠実関手 $D^b(G^{-}_{a,b}(d)) \hookrightarrow D^b(G^{+}_{a,b}(d))$ を構成することが可能である。一方、これらの準直交補空間を記述したのは Ballard-Chidambaram-Favero-McFaddin-Vandermolen による比較的最近の論文 [BCF$^+$21] である。彼らの記述を圏論的 Hall 代数の言葉で解釈しなおし、更により準直交分解を洗練化することで、次の準直交分解を示すことができる [Todd, Corollary 4.18]

$$D^b(G^{+}_{a,b}(d)) = \left\langle \binom{a-b}{l}\text{-copies of } D^b(G^{-}_{a,b}(d-l)) : 0 \leq l \leq d \right\rangle. \tag{2.8}$$

上の準直交分解は超ポテンシャル付きでも成立する。更に形式的近傍に制限して考え、大域的な関手 (2.7) と Knörrer 周期性を通じて比較することで必要な形式的局所的に必要な性質が示せる。以上の流れで定理 2.2 が証明される。

3 Quot 公式への応用

3.1 Jiang による Quot 公式予想

定理 2.2 の証明の中間地点として重要だったのは、圏論的 Hall 代数を用いてグラスマニアンフリップに対する準直交分解 (2.8) 示すことであった。これを用いることで、Qingyuan Jiang [Jia] に関する相対 Quot スキームの導来圏の準直交補分解に関する予想が解決された [Tode]。以下では Quot 公式について解説し、幾つかの応用を述べる。

X を $\mathbb{C}$ 上滑らかな準射影的スキーム、$\mathcal{G}$ をその上の連接層とする。相対 Quot 関手

$$\mathit{Quot}_{X,d}(\mathcal{G})\colon (X \text{ 上のスキーム}) \to (\text{集合})$$

は各 $T \to X$ に対して全射 $\mathcal{G}_T \twoheadrightarrow \mathcal{P}$ であって $\mathcal{P}$ が局所自由層となる集合を対応させることで定義される。相対 Quot 関手は相対 Quot スキーム

$$\mathrm{Quot}_{X,d}(\mathcal{G}) \to X$$

で実現される。上の射の各ファイバーはグラスマニアンであるが、その次元はファイバー毎に異なりうる。

一方で、Ext-層 $\mathcal{H} := \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{G}$ が局所自由ではない部分に台を持つ連接層である。同様に相対 Quot スキーム

$$\mathrm{Quot}_{X,d}(\mathcal{H}) \to X$$

も考察する。次が Jiang [Jia] により予想され筆者 [Tode] により証明された Quot 公式である。

定理 3.1. ([Tode]) $\mathcal{G}$ のホモロジー次元が *1* 以下で、$\delta := \mathrm{rank}(\mathcal{G}) \geq 0$ とする。更に $\mathrm{Quot}_{X,d}(\mathcal{G})$, $\mathrm{Quot}_{X,d}(\mathcal{H})$ がそれぞれ期待次元 $\dim X + \delta d - d^2$、$\dim X - \delta d - d^2$ を持つと仮定する。この時、次の準直交分解が存在する。

$$D^b(\mathrm{Quot}_{X,d}(\mathcal{G})) = \left\langle \binom{\delta}{i}\text{-}copies\ of\ D^b(\mathrm{Quot}_{X,d-i}(\mathcal{H})) : i \geq 0 \right\rangle.$$

上の定理は (-1)-捻り余接束

$$\Omega_{\mathrm{Quot}_{X,d}(\mathcal{G})}[-1] \dashrightarrow \Omega_{\mathrm{Quot}_{X,d}(\mathcal{H})}[-1]$$

が [Toda] で導入された「d-臨界的フリップ」で記述されることに着目し、定理 2.2 と同様に行列因子化の圏論的 Hall 代数を用いることで (2.8) に帰着して証明された。

3.2 Quot 公式の応用 I: Brill-Noether 軌跡

Quot 公式は古典的なモジュライ空間の連接層の導来圏に関する様々な応用をもたらす。まずは、曲線のヤコビアンの Brill-Noether 軌跡に関する導来圏の準直交分解に応用がある。C を種数 g の滑らかな射影的代数曲線とする。$\mathrm{Pic}^d(C)$ の Brill-Noether 軌跡は次で定義される。

$$W^r_d(C) := \{L \in \mathrm{Pic}^d(C) : h^0(L) \geq r+1\}.$$

更に、g^r_d 達をパラメータ付けする次のスキーム $G^r_d(C)$ が存在する。

$$G^r_d(C) = \{(L, W) : L \in W^r_d(C), W \subset H^0(C, L), \dim W = r+1\}.$$

これは C が一般ならば滑らかな射影的代数多様体である。

系 3.2. ([Tode]) C が一般ならば、任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及び $\delta \geq 0$ に対して次の形の準直交分解が存在する。

$$D^b(G^r_{g-1+\delta}(C)) = \left\langle \binom{\delta}{i}\text{-}copies\ of\ D^b(G^{r-i}_{g-1-\delta}(C)) : i \geq 0 \right\rangle.$$

$r = 0$ の場合、次の対称積の準直交分解を意味する。

$$D^b(\mathrm{Sym}^{g-1+\delta}(C)) = \left\langle D^b(\mathrm{Sym}^{g-1-\delta}(C)), \delta\text{-copies of } D^b(\mathrm{Jac}(C)) \right\rangle.$$

これは [Tod21, Corollary 5.11] で既に示されている。また $r = 1$ の場合は [Jia, Corollary 1.3] で示されており、次を与える。

$$D^b(G^1_{g-1+\delta}(C)) = \left\langle D^b(G^1_{g-1-\delta}(C)), \delta\text{-copies of } D^b(\mathrm{Sym}^{g-1-\delta}(C)), \binom{\delta}{2}\text{-copies of } D^b(\mathrm{Jac}(C)) \right\rangle.$$

系 3.2 の結果は上の結果達を任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に拡張するものである。

3.3 Quot 公式の応用 II: 代数曲面上の点の Hilbert 概型

もう一つの応用は、代数曲面上の点の Hilbert 概型の導来圏のブローアップ公式である。S を滑らかな射影的代数曲面とし、$\widehat{S} \to S$ を一点ブローアップとする。この時、中島-吉岡 [NY11] は点の Hilbert 概型 $\mathrm{Hilb}^n(S)$ と $\mathrm{Hilb}^n(\widehat{S})$ を関連付ける壁超え図式の存在を示した。この壁超え図式に対して定理 3.1 の Quot 公式を当てはめることができ、これを用いて次が小関 [Kos] によって示された。

定理 3.3. (小関 [Kos]) 次の準直交分解が存在する。

$$D^b(\mathrm{Hilb}^n(\widehat{S})) = \left\langle p(j)\text{-}copies\ of\ D^b(\mathrm{Hilb}^{n-j}(S)) : j = 0, \dots, n \right\rangle.$$

ここで $p(j)$ は j の分割数であり、次の式で与えられる。

$$\sum_{j \geq 0} p(j) q^j = \prod_{d \geq 1} \frac{1}{(1-q^d)}.$$

Göttsche 公式 [G$\ddot{9}$0] によると、オイラー数に関する次のブローアップ公式が成り立つ。

$$\sum_{n \geq 0} e(\mathrm{Hilb}^n(\widehat{S})) q^n = \sum_{n \geq 0} e(\mathrm{Hilb}^n(S)) q^n \cdot \prod_{d \geq 1} \frac{1}{(1-q^d)}.$$

定理 3.3 の準直交分解は上のブローアップ公式の圏化を与えるものである。

参考文献

[AG15] D. Arinkin and D. Gaitsgory, *Singular support of coherent sheaves and the geometric Langlands conjecture*, Selecta Math. (N.S.) **21** (2015), no. 1, 1–199.

[BBD+15] C. Brav, V. Bussi, D. Dupont, D. Joyce, and B. Szendrői, *Symmetries and stabilization for sheaves of vanishing cycles*, J. Singul. **11** (2015), 85–151, With an appendix by Jörg Schürmann. MR 3353002

[BBJ19] C. Brav, V. Bussi, and D. Joyce, *A Darboux theorem for derived schemes with shifted symplectic structure*, J. Amer. Math. Soc. **32** (2019), 399–443.

[BCF+21] M. R. Ballard, N. K. Chidambaram, D. Favero, P. K. McFaddin, and R. R. Vandermolen, *Kernels for Grassmann flops*, J. Math. Pures Appl. (9) **147** (2021), 29–59.

[Beh09] K. Behrend, *Donaldson-Thomas type invariants via microlocal geometry*, Ann. of Math **170** (2009), 1307–1338.

[BFK19] M. Ballard, D. Favero, and L. Katzarkov, *Variation of geometric invariant theory quotients and derived categories*, J. Reine Angew. Math. **746** (2019), 235–303.

[BJM19] V. Bussi, D. Joyce, and S. Meinhardt, *On motivic vanishing cycles of critical loci*, J. Algebraic Geom. **28** (2019), no. 3, 405–438.

[BO] A. Bondal and D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, preprint, arXiv:9506012.

[Bri07] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math **166** (2007), 317–345.

[Bri11] ———, *Hall algebras and curve-counting invariants*, J. Amer. Math. Soc. **24** (2011), 969–998.

[Dav17] B. Davison, *The critical CoHA of a quiver with potential*, Q. J. Math. **68** (2017), no. 2, 635–703.

[DS14] W. Donovan and E. Segal, *Window shifts, flop equivalences and Grassmannian twists*, Compos. Math. **150** (2014), no. 6, 942–978.

[Efi18] A. I. Efimov, *Cyclic homology of categories of matrix factorizations*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2018), no. 12, 3834–3869.

[G9̈0] L. Göttsche, *The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface*, Math. Ann. **286** (1990), 193–207.

[HL15] D. Halpern-Leistner, *The derived category of a GIT quotient*, J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), no. 3, 871–912.

[Jia] Q. Jiang, *Derived categories of Quot schemes of locally free quotients I*, arXiv:2107.09193.

[Joy15] D. Joyce, *A classical model for derived critical loci*, J. Differential Geom. **101** (2015), 289–367.

[JS12] D. Joyce and Y. Song, *A theory of generalized Donaldson-Thomas invariants*, Mem. Amer. Math. Soc. **217** (2012), no. 1020, iv+199.

[Kaw02] Y. Kawamata, *D-equivalence and K-equivalence*, J. Differential Geom. **61** (2002), no. 1, 147–171.

[Kos] N. Koseki, *Categorical blow-up formula for Hilbert schemes of points*, arXiv:2110.08315.

[KS] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations*, preprint, arXiv:0811.2435.

[KS11] ———, *Cohomological Hall algebra, exponential Hodge structures and motivic Donaldson-Thomas invariants*, Commun. Number Theory Phys. **5** (2011), no. 2, 231–352.

[MNOP06] D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov, and R. Pandharipande, *Gromov-Witten theory and Donaldson-Thomas theory. I*, Compositio. Math **142** (2006), 1263–1285.

[NN11] K. Nagao and H. Nakajima, *Counting invariant of perverse coherent sheaves and its wall-crossing*, Int. Math. Res. Not. (2011), 3855–3938.

[NY11] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Perverse coherent sheaves on blow-up. I. A quiver description*, Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics, Adv. Stud. Pure Math., vol. 61, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2011, pp. 349–386.

[Păda] T. Pădurariu, *Categorical and K-theoretic Hall algebras for quivers with potential*, arXiv:2107.13642.

[Pădb] ———, *Generators for K-theoretic Hall algebras of quivers with potential*, arXiv:2108.07919.

[Pădc] ———, *K-theoretic Hall algebras for quivers with potential*, arXiv:1911.05526.

[PT09] R. Pandharipande and R. P. Thomas, *Curve counting via stable pairs in the derived category*, Invent. Math. **178** (2009), 407–447.

[Tho00] R. P. Thomas, *A holomorphic Casson invariant for Calabi-Yau 3-folds, and bundles on $K3$ fibrations*, J. Differential Geom. **54** (2000), no. 2, 367–438.

[Toda] Y. Toda, *Birational geometry for d-critical loci and wall-crossing in Calabi-Yau 3-folds*, arXiv:1805.00182.

[Todb] ———, *Categorical Donaldson-Thomas theory for local surfaces*, arXiv:1907.09076.

[Todc] ———, *Categorical Donaldson-Thomas theory for local surfaces: $\mathbb{Z}/2$-periodic version*, arXiv:2106.05493.

[Todd] ———, *Categorical wall-crossing formula for Donaldson-Thomas theory on the resolved conifold*, arXiv:2109.07064.

[Tode] ———, *Derived categories of Quot schemes of locally free quotients via categorified Hall products*, arXiv:2110.02469.

[Tod10] ———, *Curve counting theories via stable objects I: DT/PT correspondence*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 1119–1157.

[Tod12] ———, *Stability conditions and curve counting invariants on Calabi-Yau 3-folds*, Kyoto Journal of Mathematics **52** (2012), 1–50.

[Tod20] ———, *Hall-type algebras for categorical Donaldson-Thomas theories on local surfaces*, Selecta Math. (N.S.) **26** (2020), no. 4, 64.

[Tod21] ———, *Semiorthogonal decompositions of stable pair moduli spaces via d-critical flips*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **23** (2021), no. 5, 1675–1725.

Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe (WPI), University of Tokyo, 5-1-5 Kashiwanoha, Kashiwa, 277-8583, Japan.

E-mail address: yukinobu.toda@ipmu.jp