Double coverings of algebraic curves and Gauss maps for hypersurfaces in Prym varieties

池田 京司 （東京電機大学）

1 Introduction

1.1 目的

代数曲線の 2 重被覆 $\pi : \tilde{C} \to C$ に対し，Prym 多様体と呼ばれる一つの偏極アーベル多様体 $(P, [\mathcal{L}])$ が定義される（Mumford [11]）．C の種数を g，$\tilde{C}$ の種数を $\tilde{g}$，分岐点の個数を $2n$ とするとき，アーベル多様体 P の次元は $d = \tilde{g} - g = g + n - 1$ である．本稿では，豊富直線束 $\mathcal{L}$ を定める P 内の超曲面 $D \in |\mathcal{L}|$ に対するガウス写像（D の非特異点 ξ に対し，その点における D の接空間 $T_\xi D$ を対応させる写像）

$$\begin{array}{cccccc} \Psi_D: & D_{\mathrm{reg}} & \longrightarrow & \mathbf{P}(T_0 P) = \{\text{codim 1 subsps in } T_0 P\} & \simeq \mathbf{P}^{d-1} \\ & \xi & \longmapsto & [T_\xi D \subset T_\xi P \simeq T_0 P] & \end{array}$$

の計算を紹介する．Andreotti [1] による Torelli の定理の証明のアイデアに基づき，偏極アーベル多様体 $(P, [\mathcal{L}])$ から，ガウス写像の幾何的性質を用いて元の 2 重被覆 $\pi : \tilde{C} \to C$ を回復することがねらいである．

1.2 Prym-Torelli 問題

代数曲線の 2 重被覆のモジュライ空間を

$$\mathcal{R}_{g,n} = \{\pi : \tilde{C} \to C : g(C) = g, \quad \#\text{ of branch pts} = 2n\}/\simeq,$$

偏極アーベル多様体のモジュライ空間を

$$\mathcal{A}_d = \{(P, [\mathcal{L}]) : \text{polarized abelian variety of dim } d\}/\simeq$$

とする．代数曲線の 2 重被覆にその Prym 多様体を対応させることにより，Prym 写像

$$\mathrm{Prym}_{g,n} : \mathcal{R}_{g,n} \longrightarrow \mathcal{A}_d \quad (d = g + n - 1)$$

が定まる．

問題 1.1 (Prym-Torelli 問題)**.** $\dim \mathcal{R}_{g,n} \leq \dim \mathcal{A}_d$ のとき，Prym 写像 $\mathrm{Prym}_{g,n}$ は単射か？

注意 1.2. $d = n + g - 1 > 0$ のとき $\dim \mathcal{R}_{g,n} = 3g - 3 + 2n$，$\dim \mathcal{A}_d = \frac{d(d+1)}{2}$ なので，$\dim \mathcal{R}_{g,n} > \dim \mathcal{A}_d$ となるのは,

$$\begin{cases} n = 0,\ g = 1, 2, 3, 4, 5 \\ n = 1,\ g = 1, 2, 3, 4 \\ n = 2,\ g = 1, 2 \end{cases}$$

のときのみであり，これらの場合 $\mathrm{Prym}_{g,n}$ は単射でない.

$g = 0$ のとき Prym 多様体は超楕円曲線 $\tilde{C}$ のヤコビ多様体と一致するため，Torelli の定理より $\mathrm{Prym}_{0,n}$ は単射となる.

定理 1.3 (Torelli theorem for hyperelliptic curves)**.** $g = 0$ のとき，$\mathrm{Prym}_{g,n}$ は単射である.

$g \geq 1$ のとき，$\dim \mathcal{R}_{g,n} = \dim \mathcal{A}_d$ となるのは，$(g, n) = (6, 0), (3, 2), (1, 3)$ の 3 通りで，次の結果により $(g, n) = (6, 0), (3, 2)$ の場合 $\mathrm{Prym}_{g,n}$ は単射でない.

定理 1.4. $g \geq 1$，$\dim \mathcal{R}_{g,n} = \dim \mathcal{A}_d$ のとき，$\mathrm{Prym}_{g,n}$ は generically finite で次数

$$\begin{cases} 27 & (g = 6,\ n = 0) \quad \text{(Donagi-Smith [5])} \\ 3 & (g = 3,\ n = 2) \quad \text{(Nagaraj-Ramanan [12], Bardelli-Ciliberto-Verra [2])} \\ 1 & (g = 1,\ n = 3) \quad \text{(Marcucci-Naranjo [9])} \end{cases}$$

となる.

$\dim \mathcal{R}_{g,n} < \dim \mathcal{A}_d$ の場合は，$\mathrm{Prym}_{g,n}$ を $\mathcal{R}_{g,n}$ の稠密開集合へ制限したものが単射（Generic Prym-Torelli theorem）になることが知られている.

定理 1.5 (Generic Prym-Torelli theorem [6],[8],[12],[10],[9],[14])**.** $\dim \mathcal{R}_{g,n} < \dim \mathcal{A}_d$ のとき，$\mathrm{Prym}_{g,n}$ は generically injective である.

この定理 1.5 は, Friedman-Smith [6], Kanev [8] が $n = 0$ の場合を示し, Nagaraj-Ramanan [12] は $n = 2$ の場合, Marcucci-Pirola [10] は $g \geq 2$ かつ $\dim \mathcal{R}_{g,n} < \dim \mathcal{A}_d - 1$ の場合, Marcucci-Naranjo [9] は $g = 1$ の場合, Naranjo-Ortega [14] は $\dim \mathcal{R}_{g,n} = \dim \mathcal{A}_d - 1$ の場合を示した.

一方で $\dim \mathcal{R}_{g,n} < \dim \mathcal{A}_d$ の場合でも，一般には $\mathrm{Prym}_{g,n}$ は単射とは限らないことが知られている (Mumford [11], Dalaljan [3], Donagi [4], Naranjo [13], Nagaraj-Ramanan [12], Verra [16]). とくに，$g \geq 1$ かつ $n \leq 2$ のとき $\mathrm{Prym}_{g,n}$ は単射でないことが知られている．$g = 0$ の場合は Torelli の定理より $\mathrm{Prym}_{g,n}$ は単射となるが，$n \geq 3$ の場合に $\mathrm{Prym}_{g,n}$ が単射となることは特に期待されてはいなかった．このような状況のもと，本稿では $g = 1$ の場合に $\mathrm{Prym}_{g,n}$ が単射になるという次の結果を紹介する.

定理 1.6 (I. [7])**.** $g = 1$，$n \geq 3$ のとき，$\mathrm{Prym}_{g,n}$ は単射である.

定理 1.6 が示されたことにより，$g \geq 2$ の場合も $n \geq 3$ であれば $\mathrm{Prym}_{g,n}$ が単射になるのではないかということが期待されるようになり，最近 Naranjo-Ortega によりそれが証明された．

定理 1.7 (Naranjo-Ortega [15])**.** $g \geq 1$，$n \geq 3$ のとき，$\mathrm{Prym}_{g,n}$ は単射である．

以下では，定理 1.6 のガウス写像を用いた証明の概要を紹介する．

2　準備

2.1　代数曲線の 2 重被覆

$\pi : \tilde{C} \to C$ を標数が 2 でない代数閉体 k 上の非特異射影的代数曲線の 2 重被覆とする．π の分岐点集合を $\{e_1, \ldots, e_{2n}\} \subset C$ とし，$\eta = (\det(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}))^\vee \in \mathrm{Pic}(C)$ とするとき，次の事実がよく知られている．

1. $\mathcal{O}_C(e_1 + \cdots + e_{2n}) \simeq \eta^{\otimes 2}$ である．
2. $\pi^*(\Omega^1_C \otimes \eta) \simeq \Omega^1_{\tilde{C}}$ である．
3. $\pi : \tilde{C} \to C$ の同型類はデータ $(C, \{e_1, \ldots, e_{2n}\}, \eta)$ で決まる．

逆に，非特異射影的代数曲線 C 上の $2n$ 点集合 $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ と直線束 η が $\mathcal{O}_C(e_1 + \cdots + e_{2n}) \simeq \eta^{\otimes 2}$ を満たしているとき，2 重被覆 $\pi : \tilde{C} \to C$ で，その分岐点集合が $\{e_1, \ldots, e_{2n}\} \subset C$ であり $\eta = (\det(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}))^\vee \in \mathrm{Pic}(C)$ となるものを構成することができる．

$$\pi : \tilde{C} = \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_C \oplus \eta^\vee) \longrightarrow \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}) = C.$$

（$e_1 + \cdots + e_{2n}$ を定める $\eta^{\otimes 2}$ の切断を用いて，$\mathcal{O}_C \oplus \eta^\vee$ に有限 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$-代数の構造を与える．）

2.2　Prym 多様体とその “テータ因子”

$g \geq 1$，$n \geq 1$ とする．$N : \mathrm{Pic}(\tilde{C}) \to \mathrm{Pic}(C)$ をノルム写像（点 $q \in \tilde{C}$ に対し，$N(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(q)) = \mathcal{O}_C(\pi(q))$ で定まる準同型）とし，

$$P = N^{-1}([\Omega^1_C \otimes \eta]) \subset \mathrm{Pic}^{2g-2+n}(\tilde{C}),$$
$$W = \{\xi \in \mathrm{Pic}^{2g-2+n}(\tilde{C}) \mid h^0(\tilde{C}, \xi) > 0\}$$

の共通部分を $\Theta_P = P \cap W \subset \mathrm{Pic}^{2g-2+n}(\tilde{C})$ とする．

$$\begin{array}{ccc} \Theta_P & \subset & W \\ \cap & & \cap \\ P & \subset & \mathrm{Pic}^{2g-2+n}(\tilde{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\Omega^1_C \otimes \eta] & \in & \mathrm{Pic}^{2g-2+n}(C). \end{array}$$

このとき，次の事実が成り立つ．

1. $2g-2+n=\tilde{g}-1$ より，$W \subset \mathrm{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C}) \simeq \mathrm{Pic}^0(\tilde{C}) = J(\tilde{C})$ は $\tilde{C}$ のヤコビ多様体 $J(\tilde{C})$ のテータ因子である．
2. $P \simeq \mathrm{Ker}(N)$ は $d=\tilde{g}-g=g+n-1$ 次元アーベル多様体である．（$n \geq 1$ のとき, $\mathrm{Ker}(N)$ は連結である．）
3. $\mathcal{L}_P = \mathcal{O}_P(\Theta_P)$ は P 上の豊富直線束である．
4. $h^0(P,\mathcal{L}_P)=2^g$ である．
5. $(P,[\mathcal{L}_P])$ は $(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1},\underbrace{2,\ldots,2}_{g})$-型の偏極アーベル多様体である．

定義 2.1. 偏極アーベル多様体 $(P,[\mathcal{L}_P])$ を被覆 $\pi:\tilde{C}\to C$ の Prym 多様体といい， $\Theta_P \subset P$ をその “テータ因子” という．

注意 2.2. 線形系 $|\mathcal{L}_P|$ には Θ_P 以外のメンバーも含まれるが，本稿では上の Θ_P のみを $(P,[\mathcal{L}_P])$ の “テータ因子” とよぶことにする．（Prym 多様体の偏極を定義するだけであれば，単に $J(\tilde{C})$ の主偏極を部分アーベル多様体 $\mathrm{Ker}(N)$ に制限したものと考えればよい．）

2.3 本稿の解説の流れ

- 3 章において，$g \geq 1$ かつ $n \geq 3$ のとき，アーベル多様体と “テータ因子” の組 (P,Θ_P) から被覆 $\pi:\tilde{C}\to C$ を回復する方法（Weak theorem）を説明する．
- 4 章において，$g=1$ かつ $n\geq 3$ のとき，線形系のメンバー $D\in|\mathcal{L}_P|$ の中から “テータ因子”$\Theta_P \in |\mathcal{L}_P|$ を特定する手順を紹介する．これらにより，$g=1$ かつ $n \geq 3$ のとき，偏極アーベル多様体 $(P,[\mathcal{L}_P])$ から，被覆 $\pi:\tilde{C}\to C$ が回復される（Main theorem)．
- 5 章において，4 章の結果の証明の概要を紹介する．

3 “テータ因子” から被覆の回復

3.1 $W \subset \mathrm{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C})$ に対するガウス写像

$W \subset \mathrm{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C})$ はヤコビ多様体のテータ因子となるため，そのガウス写像

$$\begin{array}{cccc} \Psi_W: & W_{\mathrm{reg}} & \longrightarrow & \mathbf{P}(H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}})) \simeq \mathbf{P}^{\tilde{g}-1} \\ & \xi & \longmapsto & [T_\xi W \subset T_\xi \mathrm{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C}) \simeq H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}})] \end{array}$$

の計算についてはよく知られている．$\tilde{C}_\varepsilon = \tilde{C}\times \mathrm{Spec}\, k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ とするとき，$\mathrm{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C})$ の接空間は

$$T_\xi \mathrm{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C}) = \{\xi_\varepsilon \in \mathrm{Pic}(\tilde{C}_\varepsilon) \mid \xi_\varepsilon|_{\tilde{C}} = \xi\} \simeq H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}})$$

となる．リーマンの特異点定理より

$$W_{\mathrm{reg}} = \{\xi \in \mathrm{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C}) \mid h^0(\tilde{C},\xi)=1\}$$

であるから，$\xi \in W_{\mathrm{reg}}$ のとき，$h^0(\tilde{C},\xi) = h^1(\tilde{C},\xi) = h^0(\tilde{C},\xi^\vee \otimes \Omega^1_{\tilde{C}}) = 1$ である．$s \neq 0 \in H^0(\tilde{C},\xi)$，$s' \neq 0 \in H^0(\tilde{C},\xi^\vee \otimes \Omega^1_{\tilde{C}})$ とすると，

$$\begin{array}{rcl} T_\xi W & = & \{\xi_\varepsilon \in T_\xi \operatorname{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C}) \mid s_\varepsilon|_{\tilde{C}} = s \quad (\exists\, s_\varepsilon \in H^0(\tilde{C}_\varepsilon, \xi_\varepsilon))\} \\ & \simeq & \{\tau \in H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}) \mid \tau \cup s = 0 \in H^1(\tilde{C},\xi)\} \\ & \simeq & \{\tau \in H^0(\Omega^1_{\tilde{C}})^\vee \mid \langle \tau, s \cup s' \rangle = 0\} \end{array}$$

となる．よって，ガウス写像 Ψ_W は W_{reg} の点に対し，$\tilde{C}$ の標準因子を対応させる写像

$$\begin{array}{rccl} \Psi_W : & W_{\mathrm{reg}} & \longrightarrow & \mathbf{P}(H^0(\Omega^1_{\tilde{C}})^\vee) \simeq |\Omega^1_{\tilde{C}}| \\ & \xi & \longmapsto & (s \cup s')^\perp \leftrightarrow A + A', \end{array}$$

とみなすことができる．ここで $A = \{s = 0\}$，$A' = \{s' = 0\}$ は $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(A) = \xi$，$\mathcal{O}_{\tilde{C}}(A') = \xi^\vee \otimes \Omega^1_{\tilde{C}}$ により決まる $\tilde{C}$ の有効因子を表す.

3.2　$\Theta_P \subset P$ に対するガウス写像

Prym 多様体の “テータ因子”$\Theta_P \subset P$ に対するガウス写像

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{\Theta_P} : & \Theta_{P,\mathrm{reg}} & \longrightarrow & \mathbf{P}(T_0 P) \simeq \mathbf{P}^{d-1} \\ & \xi & \longmapsto & [T_\xi \Theta_P \subset T_\xi P \simeq T_0 P] \end{array}$$

を計算する．$\Theta_P = P \cap W \subset \operatorname{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C})$ なので，$\xi \in \Theta_{P,\mathrm{reg}}$ のとき $T_\xi \Theta_P = T_\xi P \cap T_\xi W$ であるから，可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \Theta_{P,\mathrm{reg}} & \xrightarrow{\Psi_{\Theta_P}} & \mathbf{P}(T_0 P) & \ni & T_0 P \cap T \\ \cap & \circlearrowleft & \uparrow & & \uparrow \\ W_{\mathrm{reg}} & \xrightarrow[\Psi_W]{} & \mathbf{P}(T_0 \operatorname{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C})) & \ni & T \end{array}$$

を得る．（基点 $0 \in P \subset \operatorname{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C})$ を選んで固定している.）ここで，$\Omega^1_{\tilde{C}} \simeq \pi^*(\Omega^1_C \otimes \eta)$ により，

$$|\Omega^1_C \otimes \eta| \subset |\Omega^1_{\tilde{C}}| \simeq \mathbf{P}(T_0 \operatorname{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C}))$$

とみるとき，$\Theta_P \subset P = N^{-1}([\Omega^1_C \otimes \eta])$ なので，$\Psi_W(\Theta_{P,\mathrm{reg}}) \subset |\Omega^1_C \otimes \eta|$ となる．また，合成

$$T_0 P \hookrightarrow T_0 \operatorname{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C}) \simeq H^0(\Omega^1_{\tilde{C}})^\vee \twoheadrightarrow H^0(\Omega^1_C \otimes \eta)^\vee$$

が同型になることから，射影空間の同型 $|\Omega^1_C \otimes \eta| \simeq \mathbf{P}(T_0 P)$ により，$\Theta_P \subset P$ に対するガウス写像は

$$\begin{array}{rccl} \Psi_{\Theta_P} : & \Theta_{P,\mathrm{reg}} & \longrightarrow & |\Omega^1_C \otimes \eta| \\ & \xi & \longmapsto & B = \pi(A) (= \pi(A')) \end{array}$$

とみなすことができる．ここで A，A' は $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(A) = \xi$，$\mathcal{O}_{\tilde{C}}(A') = \xi^\vee \otimes \Omega^1_{\tilde{C}}$ により決まる $\tilde{C}$ の有効因子を表す.（$\pi^* B = A + A' \in |\Omega^1_{\tilde{C}}|$ である.）これにより，ガウス写像 Ψ_{Θ_P} について次の事実が示される.

1. $\Psi_{\Theta_P} : \Theta_{P,\mathrm{reg}} \to |\Omega^1_C \otimes \eta|$ は次数 $2^{\tilde{g}-1}$ の被覆である.

2. Ψ_{Θ_P} の分岐因子は

$$\overline{\Psi_{\Theta_P}(\mathrm{Ram}\,(\Psi_{\Theta_P}))} = X \cup H_1 \cup \cdots \cup H_{2n} \subset |\Omega_C^1 \otimes \eta|$$

と表せる．ここで，$\{e_1, \ldots, e_{2n}\} \subset C$ を $\pi : \tilde{C} \to C$ の分岐点集合とし，

$$\begin{cases} H_i = \{B \in |\Omega_C^1 \otimes \eta| \mid e_i \leq B\}, \\ X = \{B \in |\Omega_C^1 \otimes \eta| \mid 2p \leq B \quad (\exists p \in C)\} \end{cases}$$

とする．

3. $n \geq 3$ のとき $\Omega_C^1 \otimes \eta$ は非常に豊富で，X は $\Phi_{|\Omega_C^1 \otimes \eta|}(C) \subset \mathbf{P}(H^0(\Omega_C^1 \otimes \eta))$ の射影双対

$$X = (\Phi_{|\Omega_C^1 \otimes \eta|}(C))^\vee \subset |\Omega_C^1 \otimes \eta| = \mathbf{P}(H^0(\Omega_C^1 \otimes \eta))^\vee$$

となる．

4. 定義体の標数が 2 と異なるので，射影双対性から $X \subset |\Omega_C^1 \otimes \eta|$ の射影双対は

$$X^\vee = \Phi_{|\Omega_C^1 \otimes \eta|}(C) \subset \mathbf{P}(H^0(\Omega_C^1 \otimes \eta))$$

となる．

定理 3.1 (Weak theorem)**.** $g \geq 1$，$n \geq 3$ のとき，$\pi : \tilde{C} \to C$ は (P, Θ_P) から回復できる．

$\Theta_P \subset P$ のガウス写像 $\Psi_{\Theta_P} : \Theta_{P,\mathrm{reg}} \to \mathbf{P}^{d-1}$ の分岐因子は $2n$ 個の超平面 $H_1, \ldots, H_{2n}$ と 1 つの（超平面でない）超曲面 X からなる．$H_i^\vee \in (\mathbf{P}^{d-1})^\vee$ を H_i に対応する双対射影空間 $(\mathbf{P}^{d-1})^\vee$ の点とし，$X^\vee \subset (\mathbf{P}^{d-1})^\vee$ を X の射影双対とする．このとき $X^\vee$ は $H_1^\vee, \ldots, H_{2n}^\vee \in X^\vee$ となる非特異代数曲線であり，データ $(X^\vee, \{H_1^\vee, \ldots, H_{2n}^\vee\}, \mathcal{O}_{X^\vee}(1) \otimes T_{X^\vee})$ が被覆を回復する．

4 “テータ因子” の特定

$g = 1$ の場合に，Prym 多様体 $(P, [\mathcal{L}_P])$ から，“テータ因子”$\Theta_P \in |\mathcal{L_P}|$ を特定する手順を説明する．線形系

$$|\mathcal{L}_P| \simeq \mathbf{P}^{2^g-1} = \mathbf{P}^1$$

の各メンバー $D \in |\mathcal{L}_P|$ に対し，そのガウス写像

$$\Psi_D : D_{\mathrm{reg}} \longrightarrow \mathbf{P}^{d-1} = \mathbf{P}^{n-1}$$

を考える．線形系 $|\mathcal{L}_P|$ の基点集合 $\mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P| = \bigcap_{D \in |\mathcal{L}_P|} D$ と D_{reg} の共通部分を $U_D = D_{\mathrm{reg}} \cap \mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P|$ とする．ガウス写像 Ψ_D による U_D の像の Zariski 閉包を $X'_D = \overline{\Psi_D(U_D)} \subset \mathbf{P}^{n-1}$ とし，$X_D \to X'_D$ をその正規化とする．この正規化射と射影空間への埋め込み $X'_D \subset \mathbf{P}^{n-1}$ の合成を $\nu_D : X_D \to \mathbf{P}^{n-1}$ と表す．U_D は非特異となるため，下の図式を可換にする射 $\psi_D : U_D \to X_D$ が一意的に定まる．

$$\begin{array}{ccccc} U_D & \xrightarrow{\Psi_D} & X'_D & = \overline{\Psi_D(U_D)} \subset & \mathbf{P}^{n-1} \\ \| & & \uparrow & & \| \\ U_D & \xrightarrow[\psi_D]{} & X_D & \xrightarrow[\nu_D]{} & \mathbf{P}^{n-1}. \end{array}$$

命題 4.1. $\#\Sigma_1 = 6$ となる集合 $\Sigma_1 \subset |\mathcal{L}_P|$ が存在し，被覆 $\psi_D : U_D \to X_D$ の次数は

$$\deg \psi_D = \begin{cases} 2^{n-2} & (D \notin \Sigma_1) \\ 2^{n-1} & (D \in \Sigma_1) \end{cases}$$

となる．

$_D : U_D \to X_D$ の分岐因子を

$$Z_D = \overline{\psi_D(\mathrm{Ram}\,(\psi_D))} \subset X_D$$

とする．このとき $\dim X_D = n-2$，$\dim Z_D = n-3$ である．

命題 4.2. $D \in |\mathcal{L}_P| \setminus \Sigma_1$ とする．

1. $n \geq 4$ のとき，Z_D は $2n$ 個の既約成分 $Z_{D,i}$ をもつ．

$$Z_D = \bigcup_{i=1}^{2n} Z_{D,i} \quad (\text{既約分解}).$$

2. $n = 3$ のとき，X_D は種数 1 の非特異射影的曲線で，Z_D は $2n(=6)$ 個の $J(X_D)[2]$-軌道 $Z_{D,i}$ からなる．

$$Z_D = \coprod_{i=1}^{2n} Z_{D,i} \quad (J(X_D)[2]\text{-軌道分解}).$$

（X_D のヤコビ多様体 $J(X_D)$ が X_D へ自然に作用し，これにより 2 等分点 $J(X_D)[2]$ が Z_D に作用する．）

命題 4.3. 命題 4.2 の各成分 $Z_{D,i}$（$n \geq 4$ の場合は既約成分，$n = 3$ の場合は $J(X_D)[2]$-軌道）について，

1. $\nu_D(Z_{D,i}) \subset \mathbf{P}^{n-1}$ を含む超平面 $H_{D,i} \subset \mathbf{P}^{n-1}$ が一意的に存在する．
2. X_D の既約因子 $M^+_{D,i}$，$M^-_{D,i}$ で

$$\nu_D^*(H_{D,i}) = Z_{D,i} + M^+_{D,i} + M^-_{D,i}$$

となるものが存在する．

命題 4.3 の既約因子 $M^+_{D,i}$，$M^-_{D,i}$ を用いて

$$\Sigma_{0,i} = \{D \in |\mathcal{L}_P| \setminus \Sigma_1 \mid M^+_{D,i} = M^-_{D,i}\}$$

と定める．

命題 4.4. $\Sigma_{0,i} \subset |\mathcal{L}_P|$ は $1 \leq i \leq 2n$ によらない集合で，$\#\Sigma_{0,i} = 4$ である．

命題 4.4 より，$\Sigma_0 := \Sigma_{0,i}$ と表すことにする．

命題 4.5. $D \in \Sigma_0$ ならば，$(P, D) \simeq (P, \Theta_P)$ である．

定理 4.6 (Main theorem)**.** $g = 1$，$n \geq 3$ のとき，$\pi : \tilde{C} \to C$ は $(P, [\mathcal{L}_P])$ から回復できる．

線形系 $|\mathcal{L}_P|$ の各メンバー $D \in |\mathcal{L}_P|$ に対し，そのガウス写像 Ψ_D を考える．Ψ_D を $|\mathcal{L}_P|$ の基点集合へ制限したものの分岐因子の幾何的性質から，他とは異なる振る舞いをする 4 つのメンバーからなる集合 $\Sigma_0 \subset |\mathcal{L}_P|$ が定まる．$D \in \Sigma_0$ のガウス写像 Ψ_D を用いると，定理 3.1 と同じ手続きで被覆 $\pi : \tilde{C} \to C$ が回復できる．

5 証明の概要

5.1 4 章で $g = 1$ と仮定したのはなぜか？

Prym 多様体の "テータ因子"Θ_P は $\tilde{C}$ のヤコビ多様体のテータ因子 $W \subset \mathrm{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C})$ の P への制限として定義された．$g = 1$ の場合は，以下のように $|\mathcal{L}_P|$ の他のメンバー $D \subset P$ も $W \subset \mathrm{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C})$ の適当な平行移動の P への制限として得られる．

$\xi \in \mathrm{Pic}^0(C)$ に対し，$D_\xi := t_{\pi^*\xi}(W)|_P$ と定める．ここで，$t_{\pi^*\xi} : \mathrm{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C}) \to \mathrm{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C})$ は $\pi^*\xi \in \mathrm{Pic}^0(\tilde{C})$ による平行移動を表す．

補題 5.1. 任意の $\xi \in \mathrm{Pic}^0(C)$ に対し，$D_\xi = D_{\xi^\vee} \subset P$ であり，P の因子として D_ξ は $D_0 = \Theta_P$ と線形同値である．

補題 5.1 より，射 $\mathrm{Pic}^0(C) \longrightarrow |\mathcal{L}_P|; \xi \longmapsto D_\xi$ を得る．

注意 5.2. $g = 1$ のとき，$\mathrm{Pic}^0(C) \to |\mathcal{L}_P| \simeq \mathbf{P}^1$ は 2 重被覆となる．一方 $g \geq 2$ のとき，$\dim \mathrm{Pic}^0(C) = g < 2^g - 1 = \dim |\mathcal{L}_P|$ より，$\mathrm{Pic}^0(C) \longrightarrow |\mathcal{L}_P| \simeq \mathbf{P}^{2^g-1}$ は全射でない（像はクンマー多様体）．つまり，$|\mathcal{L}_P|$ のメンバーの中には $W \subset \mathrm{Pic}^{\tilde{g}-1}(\tilde{C})$ の平行移動の P への制限として得られないものも存在する．そのような $D \in |\mathcal{L}_P|$ に対するガウス写像 Ψ_D を具体的に計算するのは困難と判断し，$g = 1$ を仮定することにした．

5.2 4 章でガウス写像 Ψ_D を基点集合 $\mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P|$ に制限したのはなぜか？

以下 $g = 1$ と仮定する．このとき，$d = n = \tilde{g} - 1$ であり，$|\eta| = |\Omega^1_C \otimes \eta|$ なので，3 章と同様に可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
D_{\xi,\mathrm{reg}} & \xrightarrow{\Psi_{D_\xi}} & \mathbf{P}(T_0 P) & \xleftarrow{\simeq} & |\eta| \\
t^{-1}_{\pi^*\xi} \cap & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowright & \cap \\
W_{\mathrm{reg}} & \xrightarrow[\Psi_W]{} & \mathbf{P}(T_0 \mathrm{Pic}^n(\tilde{C})) & \simeq & |\Omega^1_{\tilde{C}}|
\end{array}$$

を得る．3 章では，$\Psi_W(D_{0,\mathrm{reg}}) \subset |\eta|$ であることを用いて，$\Psi_{D_0} = \Psi_{\Theta_P}$ を比較的容易に計算することができた．しかし，$\xi \notin \mathrm{Pic}^0(C)[2]$ のとき，$(\Psi_W \circ t^{-1}_{\pi^*\xi})(D_{\xi,\mathrm{reg}}) \not\subseteq |\eta|$ となるため，$\Psi_W|_{D_{\xi,\mathrm{reg}}}$ を計算しただけでは，Ψ_{D_ξ} の分岐の様子等は分からない．

補題 5.3. $U_\xi := \mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P| \cap D_{\xi,\mathrm{reg}}$ とおくとき，任意の $\xi \in \mathrm{Pic}^0\,(C)$ に対し $(\Psi_W \circ t^{-1}_{\pi^*\xi})(U_\xi) \subset |\eta|$ となる．

補題 5.3 により，$D_\xi \subset P$ のガウス写像の基点集合への制限 $\Psi_{D_\xi}|_{U_\xi}$ は比較的容易に計算することができる．

5.3 基点集合 $\mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P|$ の記述

$\tilde{C}$ の i 次対称積を $\tilde{C}^{(i)}$ と表し，その点を $\tilde{C}$ 上の i 次有効因子と同一視する．$\tilde{C}^{(n-2)} \times C$ の部分多様体 Y を

$$Y = \{(A,p) \in \tilde{C}^{(n-2)} \times C \mid \pi(A) + 2p \in |\eta| \subset C^{(n)}\}$$

により定義する．この代数多様体 Y が $\mathcal{L}_P$ の基点集合 $\mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P|$ と双有理になっている．$(A,p) \in Y$ のとき，$N(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(A) \otimes \pi^*\mathcal{O}_C(p)) = \mathcal{O}_C(\pi(A)+2p) \simeq \eta$ より，$\mathcal{O}_{\tilde{C}}(A) \otimes \pi^*\mathcal{O}_C(p) \in P$ であり，$\xi \in \mathrm{Pic}^0\,(C)$ に対し $\mathcal{O}_C(p - p_\xi) \simeq \xi$ となる点 $p_\xi \in C$ をとると，

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\tilde{C}}(A) \otimes \pi^*\mathcal{O}_C(p) &= \mathcal{O}_{\tilde{C}}(A) \otimes \pi^*\mathcal{O}_C(p_\xi) \otimes \pi^*\xi \\ &= t_{\pi^*\xi}(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(A) \otimes \pi^*\mathcal{O}_C(p_\xi)) \quad \in D_\xi = P \cap t_{\pi^*\xi}(W) \subset \mathrm{Pic}^n\,(\tilde{C}) \end{aligned}$$

なので，

$$\mathcal{O}_{\tilde{C}}(A) \otimes \pi^*\mathcal{O}_C(p) \in \bigcap_{\xi \in \mathrm{Pic}^0\,(C)} D_\xi = \mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P| \subset P$$

である．したがって，

$$\mu : Y \longrightarrow \mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P| \subset \mathrm{Pic}^n\,(\tilde{C});\ (A,p) \longmapsto \mathcal{O}_{\tilde{C}}(A) \otimes \pi^*\mathcal{O}_C(p)$$

が定義される．

補題 5.4. $\xi \in \mathrm{Pic}^0\,(C)$ に対し，

$$\mu|_{\mu^{-1}(U_\xi)} : \mu^{-1}(U_\xi) \xrightarrow{\simeq} U_\xi = \mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P| \cap D_{\xi,\mathrm{reg}}$$

は同型である．

5.4 ガウス写像 Ψ_{D_ξ} の $\mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P|$ への制限の記述

$C^{(n-2)} \times C$ の部分多様体 X を

$$X = \{(B,p) \in C^{(n-2)} \times C \mid B + 2p \in |\eta| \subset C^{(n)}\}$$

により定義すると，自然な射

$$: Y \longrightarrow X;\ (A,p) \longmapsto (\pi(A), p)$$

が定義される．このとき X，Y は共に非特異で，ψ は次数 2^{n-2} の分岐被覆となる．また $\xi \in \mathrm{Pic}^0(C)$ に対し，

$$\nu_\xi : X \longrightarrow |\eta|;\ (B,p) \longmapsto B + t_\xi(p) + t_{\xi^\vee}(p)$$

と定める．ここで，t_ξ，$t_{\xi^\vee}$ はそれぞれ $\xi, \xi^\vee \in \mathrm{Pic}^0(C)$ による楕円曲線 C の点の平行移動を表す．

補題 5.5. 次の図式

$$\begin{array}{ccccc}
Y & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P| & & \\
\cup & & \cup & & \\
\mu^{-1}(U_\xi) & \xrightarrow{\simeq} & U_\xi & \subset D_{\xi,\mathrm{reg}} & \\
\downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\
X & \xrightarrow[\nu_\xi]{} & |\eta| & \Psi_{D_\xi} &
\end{array}$$

は可換になる．つまり，$y \in U_\xi = \mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P| \cap D_{\xi,\mathrm{reg}}$ に対し，$\Psi_{D_\xi}(y) = \nu_\xi \circ \psi \circ \mu^{-1}(y)$ が成り立つ．

補題 5.6. $\nu_\xi : X \to X'_\xi := \overline{\Psi_{D_\xi}(U_\xi)}$ は有限被覆であり，その次数は

$$\begin{cases} 2 & (\xi \in \mathrm{Pic}^0(C) \text{ の位数が } 4 \text{ のとき，つまり } \xi \in \mathrm{Pic}^0(C)[4] \setminus \mathrm{Pic}^0(C)[2] \text{ のとき}), \\ 1 & (\xi \in \mathrm{Pic}^0(C) \text{ の位数が } 4 \text{ でないとき}) \end{cases}$$

となる．

補題 5.6 より，$\xi \in \mathrm{Pic}^0(C)$ の位数が 4 でないとき $\nu_\xi : X \to X'_\xi := \overline{\Psi_{D_\xi}(U_\xi)}$ は X'_ξ の正規化を与えており，補題 5.5 から $\psi_\xi := \psi|_{\mu^{-1}(U_\xi)} : \mu^{-1}(U_\xi) \to X$ によりガウス写像 Ψ_{D_ξ} の基点集合 $\mathrm{Bs}\,|\mathcal{L}_P|$ への制限が計算できる．

注意 5.7. 12 点集合 $\mathrm{Pic}^0(C)[4] \setminus \mathrm{Pic}^0(C)[2]$ の 2 重被覆

$$\mathrm{Pic}^0(C) \longrightarrow |\mathcal{L}_P|;\ \xi \longmapsto D_\xi$$

による像が 4 章の 6 点集合 $\Sigma_1 \subset |\mathcal{L}_P|$ を定める．

補題 5.8. $\pi : \tilde{C} \to C$ の各分岐点 $e_i \in C$ に対し，X の閉部分集合 Z_i を

$$Z_i := \{(B,p) \in X \mid e_i \leq B\}$$

と定めるとき，$\psi_\xi : \mu^{-1}(U_\xi) \to X$ の分岐因子は

$$\mathrm{Branch}\,(\psi_\xi) = \overline{\psi_\xi(\mathrm{Ram}\,(\psi_\xi))} = Z_1 \cup \cdots \cup Z_{2n} \subset X$$

となる．

注意 5.9. Y の閉部分集合 R を

$$R = \{(A,p) \in Y \mid \pi^* q \leq A \quad (\exists q \in C)\}$$

により定める（$n = 3$ のときは $R = \emptyset$）とき，$R \subset \mathrm{Ram}\,(\psi)$ であるから，$\psi : Y \to X$ の分岐因子は

$$\mathrm{Branch}\,(\psi) = \psi(R) \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_{2n} \subset X$$

となる．ところが $R \cap \mu^{-1}(U_\xi) = \emptyset \subset Y$ であるため，ψ_ξ の分岐因子の成分には $\psi(R)$ が現れない．

$|\eta| \simeq \mathbf{P}^{n-1}$ の超平面 H_i を

$$H_i := \{A \in |\eta| \mid e_i \leq A\}$$

により定めるとき，H_i は $\nu_\xi(Z_i)$ を含む唯一の超平面となる．X の部分多様体 $M^{\pm}_{\xi,i}$ を

$$\begin{cases} M^+_{\xi,i} := \{(B,p) \in X \mid t_\xi(p) = e_i\}, \\ M^-_{\xi,i} := \{(B,p) \in X \mid t_{\xi^\vee}(p) = e_i\} \end{cases}$$

により定めるとき，

$$\nu_\xi^* H_i = \{(B,p) \in X \mid e_i \leq B + t^+_\xi(p) + t^-_\xi(p)\} = Z_i + M^+_{\xi,i} + M^-_{\xi,i}$$

となる．

補題 5.10. $M^+_{\xi,i} = M^-_{\xi,i}$ となるための必要十分条件は $\xi \in \mathrm{Pic}^0(C)[2]$ となることである．

注意 5.11. $\xi \in \mathrm{Pic}^0(C)[2]$ のとき，$(P, D_\xi) \simeq (P, D_0) = (P, \Theta_P)$ である．4 点集合 $\mathrm{Pic}^0(C)[2]$ は 2 重被覆

$$\mathrm{Pic}^0(C) \longrightarrow |\mathcal{L}_P|; \xi \longmapsto D_\xi$$

の分岐点に対応しており，4 章の 4 点集合 $\Sigma_0 \subset |\mathcal{L}_P|$ を定める．

参考文献

[1] A. Andreotti, *On a theorem of Torelli,* Amer. J. Math. **80**, 801–828 (1958).

[2] F. Bardelli, C. Ciliberto and A. Verra, *Curves of minimal genus on a general abelian variety,* Compos. Math. **96**, 115–147 (1995).

[3] S. G. Dalaljan, *The Prym variety of a double covering of a hyperelliptic curve with two branch points,* Math. USSR Sbornik **27**, 227–237 (1975).

[4] R. Donagi, *The tetragonal construction,* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **4**, 181–185 (1981).

[5] R. Donagi, R. C. Smith, *The structure of the Prym map,* Acta Math. **146**, 25–102 (1981). Springer-Verlag, Berlin, (2004).

[6] R. Friedman and R. Smith, *The generic Torelli theorem for the Prym map,* Invent. Math. **67**, 473–490 (1982).

[7] A. Ikeda, *Global Prym-Torelli theorem for double coverings of elliptic curves,* Algebraic Geometry **7**, 544–560 (2020).

[8] V. I, Kanev, *The global Torelli theorem for Prym varieties at a generic point,* Math. USSR Izv. **20**, 235–257 (1983).

[9] V. O. Marcucci and J. C. Naranjo, *Prym varieties of double coverings of elliptic curves,* Int. Math. Res. Not. **6**, 1689–1698 (2014).

[10] V. O. Marcucci and G. P. Pirola, *Generic Torelli theorem for Prym varieties of ramified coverings,* Compos. Math. **148**, 1147–1170 (2012).

[11] D. Mumford, *Prym varieties. I,* Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), Academic Press, New York, 325–350 (1974).

[12] D. S. Nagaraj and S. Ramanan, *Polarisations of type* $(1, 2, \dots, 2)$ *on abelian varieties,* Duke Math. J. **80**, 157–194 (1995).

[13] J. C. Naranjo, *Prym varieties of bi-elliptic curves,* J. Reine Angew. Math. **424**, 47–106 (1992).

[14] J. C. Naranjo and A. Ortega, (with an appendix by A. Verra,) *Generic injectivity of the Prym map for double ramified coverings,* Trans. Amer. Math. Soc. **371**, 3627–3646 (2019).

[15] J. C. Naranjo and A. Ortega, *Global Prym-Torelli for Ddouble coverings ramified in at least* 6 *points,* arXiv:2005.11108.

[16] A. Verra, *The Prym map has degree two on plane sextics,* The Fano Conference, Univ. Torino, 735–759 (2004).