

有限自己同型群を持つ Coble 曲面の分類

— 2021年10月29日 城崎 —

名大・多元数理 金 金司誠之

標数2は程利行氏との共同研究

—はじめに—

本講演の主題は、任意標数で有限自己同型群を持つ Coble 曲面を分類することである。Coble 曲面は Enriques 曲面の退化として現われ、主結果は Enriques 曲面の場合を補完するものである。

私事ではあるが、30数年前に城崎で初めて講演した内容が有限自己同型群を持つ複素 Enriques 曲面の分類である。数学的に成長していく子孫であろう。かく、正標数、特に標数2の世界は独特のおもしろさがある。それが少しでも伝われば幸いである。

本講演では代数関係 $k=\bar{k}$, $\text{char}(k)=p \geq 0$ を考へる。

(1') Coble曲面について

Coble曲面の由来は、A. Coble [2] が 10個の node を持つ平面6次曲線を研究したことである。正確な定義は、

Dolgachev - De-Qi Zhang [5] が与えた。

非特異有理面 V が Coble曲面であるとは

$$|k_V| = \phi, |2k_V| = \{B_1 + \dots + B_n\},$$

$$B_i \cong \mathbb{P}^1, B_i \cap B_j = \phi \quad (i \neq j)$$

を満たすとよい。 B_1, \dots, B_n は 境界成分 と呼ばれる。

定義より $B_1 + \dots + B_n$ で分岐する二重被覆

$$\pi: X \rightarrow S$$

が存在し、 X は $K3$ 曲面となる。但し、 $p=2$ の場合は、

π は不分離被覆で X は必ず“特異点を持った有理曲面”となること起き得る。しかし、 $\omega_X \cong \Omega_X$, $H^1(\Omega_X) = 0$ で $K3$ -like と呼ばれる曲面である。

複素数体上では丘田川 [8], [9] が、Enriques曲面の周期理論を確立した。IV型 10次元有理双曲线領域 \mathcal{D} と \mathcal{D} の中の可算無限個の超平面の集合 \mathcal{H} が存在し、算術商 $(\mathcal{D} \setminus \mathcal{H})/\Gamma$ が Enriques曲面のモジュライ空間である。除れを \mathcal{H}/Γ が Coble曲面のモジュライ空間に他ならず、Coble曲面が Enriques曲面の退化として現れる。

(Dolgachev - K. [4])

丘田川 [8] は有理的である。これは Dolgachev と南紀白浜へ向う電車の中で見つけたが、テレワークでは難しかったと思われる。

(2°) Coble-向井因子

Enriqueta面, Coble面の研究には因子が大切である。
Enriqueta面 S は \mathbb{P}^1 と \mathbb{P}^1 の直積である。 $\text{Num}(S) := NS(S)/\text{torsion}$ は even unimodular, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \langle 1, 9 \rangle$ の因子を持つ。(Illusie [10])。 E_{10} で表される。



S 上の非特異有理曲線 $C \cong \mathbb{P}^1$ を “单純ルート” と呼ぶ。 $C^2 = -2$ である。一方, Coble面の場合, ピカルド $P(V)$ は $P(V) = 10 + n$, $n \leq 10$ (n は境界成分の個数) である。
 $V \cap C \cong \mathbb{P}^1$ は $C^2 = -1, -2, -4$ となる。 $C^2 = -4$ は境界成分のときである。Enriqueta面の場合の疑似を得る方法。

$$\text{Pic}(V)_\mathbb{Q} \supset \left\langle \text{Pic}(V), \frac{1}{2}B_1, \dots, \frac{1}{2}B_n \right\rangle$$

の中で、境界成分は直交する

$$CM(V) := \left\langle B_1, \dots, B_n \right\rangle^\perp$$

を因子と, $CM(V)$ は \mathbb{P}^1 と \mathbb{P}^1 の直積である。 $CM(V)$ は E_{10} と同型である。これはどの期待されるか, 事实上 E_{10} は $n=1, 2$ の場合に成立立つことが知られている (Dolgachev-K. [3])。

Coble面の場合の单純ルートは, (-2) -曲線 ($\cong \mathbb{P}^1$)

と

$$2E + \frac{1}{2}B_i + \frac{1}{2}B_j, E \cong \mathbb{P}^1, E^2 = -1, \quad \begin{array}{c} E \\ \diagup \\ B_i \\ \diagdown \\ B_j \end{array}$$

の形のルートと 2 平面が現われる:

	Enriqueta面	Coble面
lattice	E_{10}	$CM(V)$
单純ルート	(-2) -曲线 \mathbb{P}^1	(-2) -曲线 \mathbb{P}^1 , $2E + \frac{1}{2}B_i + \frac{1}{2}B_j$

(3°) 自己同型群

Coble曲面の場合も状況は同じで T^2 が Enriques曲面の場合と全く同じである。自然 T^2 対称群

$$\rho: \text{Aut}(S) \rightarrow O(\text{Num}(S)) \quad (O(1) \text{ の直交群})$$

では $|\text{Ker}(\rho)| < \infty$ であり、 $\text{Im}(\rho) \cap W(S) = \{1\}$ である。ここで

$W(S)$ は、単純ルートが引き起こす鏡映で生成される $O(N_m(S))$ の部分群である。 S が generic ならば $W(S) = \{1\}$ であり、 $|\text{Aut}(S)| = \infty$ となる。なぜ T^2 ならば、Enriques曲面上には genus 1 fibration が存在するか、単純ルートが無いと、その "Mordell-Weil" 群が正の階数を持つ。 S は無限自己同型を引き起こすからである。genus 1 fib. は重複ファイバーを持つので切断は存在せず、Mordell-Weil 群は空でないか。Jacobian fib. を考えることで、回避である。

(4°) 鏡映群

$\text{Num}(S) \otimes \mathbb{R}$, $\text{CM}(V) \otimes \mathbb{R}$ ($\cong \mathbb{R}^{1,9}$) の中の正鏡映

$$P^+ = \{x \mid x^2 > 0\}^\circ$$

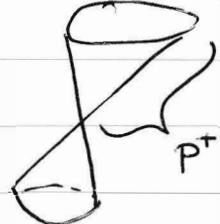
を考える。そこへの $W(S)$, $W(V)$ の作用の

基底生成元で P^+ の鏡映 (Cobleの場合は多くの鏡映) が現われる。

$$\text{Im}(\rho) \cap W(S) = \{1\} \text{ より}$$

$$[O(N_m(S)):W(S)] < \infty \Rightarrow |\text{Aut}(S)| < \infty$$

が得られる。



Vinberg は 口バケフスキー空間の鏡映群の研究において.

$[O(N_m(s)): W(s)] < \infty$ であるための十分条件 Σ

与えられた (Vinberg [24])。この条件は 総て可算的である。

(*) S 上の任意の genus 1 fibration の "Mordell-Weil" rank が 0 である。

と述べておかれています。別なり言い方をすると、genus 1 fibration は全て extremal である。

以上から、

有限自己同型群を持つ
Enriques, Calabi-Yau の分類

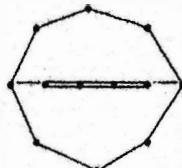
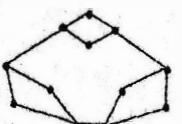
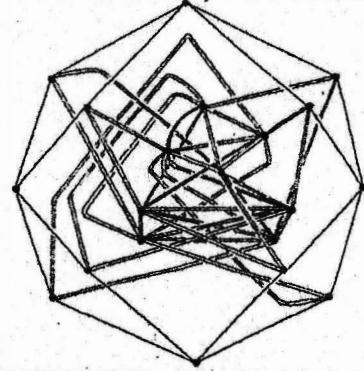
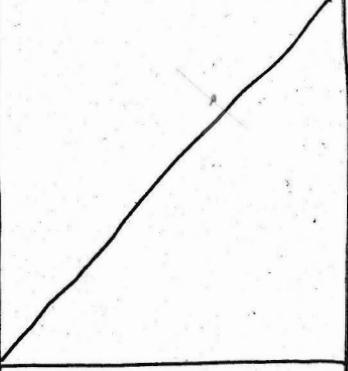
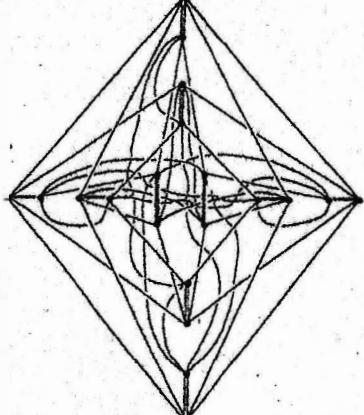
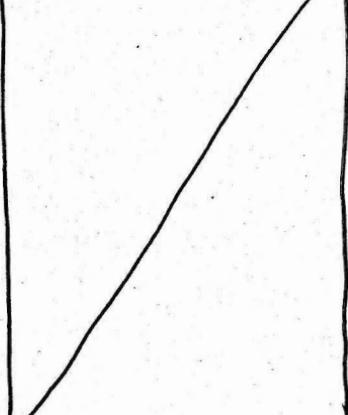


(*) を満たす単純率の
双対グラフの分類

と言うことがでます。存在は、具体的には構成することにて示す。

次の表が 千葉在 PGS の場合の分類を示します。

(5°) Classification ($P \neq 2$)

Type	Dual graph of (-2)-curves	Enriques	Coble
I		$P: \text{any}$ $12\mathbb{P}^1$ 1-dim. family	$P: \text{any}, n=2$ $10\mathbb{P}^1+2, \text{unique}$
II		"	$P: \text{any}, n=1$ $12\mathbb{P}^1, \text{unique}$
III		$P: \text{any}$ $20\mathbb{P}^1$ unique	
IV		"	

Nikulin - Kondo - Martin
 '84 '86 2019
 [21] [14] [17]

↑
 Kondo [15]
 (2021)

Conti:

V		$P \neq 3$ $20P^1$ unique	$P=3 \quad n=2$ $16P^1 + 4 = 20$ unique
VI		$P \neq 3, 5$ $20P^1$ unique	$P=3, n=5$ $10P^1 + 10 = 20$ unique
VII		$P \neq 5$ $20P^1$ unique	$P=5, n=1$ $20P^1$ unique
MI	$G_6 = \text{symm. group of } dy^6$ $(ij), (ij)(kl)(mn), (ijk)$ $15 + 15 + 10 = 40$		$P=5, n=1$ $20P^1$ unique
MII	dual of $16 + 12 + 12 = 40$		$P=3, n=2$ $15P^1 + 15P^1 + 10 = 40$ unique
			$P=3, n=8$ $16 + 12P^1 + 12P^1 = 40$ unique

MI, MII —— Mukai, Ohashi [20], Kondo [15]

Cov. K3 = s.s. K3 in char 3; $\sigma=1$ = Fermat quartic

次の種類2の場合を考える。まず種類2の Enriques 面から復習する。

(6°) 種類2の Enriques 面

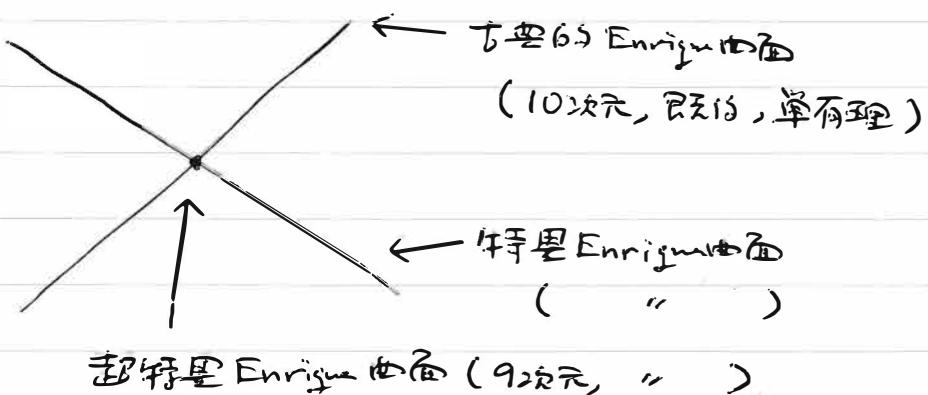
Bombieri-Mumford [1] は種類2の Enriques 面 Σ 3種類に分類した。

$P_{\text{rc}}^{\mathbb{C}}$	標準的 2重被覆 $\pi: X \rightarrow S$	
古典的	\mathbb{P}_{2R}	M_2 -被覆 (by $K_S \neq 0, 2K_S = 0$)
特異	M_2	$\mathbb{P}_{2R} - "$
超特異	α_2	$\alpha_2 - "$

} by $H^1(\mathcal{O}_S) \cong k$
 \curvearrowright : Frobenius.

さらには \mathbb{P}^5 の内の 3つの 2次超曲面の交叉への $\mathbb{P}_{2R}, M_2, \alpha_2$ の作用を考へ、それらの方程の解り方を示す。

その後、Liedtke [16] が次種4の Enriques 面のエジンライ空間と Bombieri-Mumford の例とを基にして構成した。2つの既約成分から成り次の1点の形である:



定義: Coble 面は古典的 Enriques 面の退化である。
 従って以下では断わりたい限り、Enriques 面は古典的とする。

(7) 標準被覆

標準被覆 $\pi: X \xrightarrow{2:1} S \text{ (or } V\text{)} \text{ の構成は以下で示されています。}$

K_S に対するコホーリル $\{f_{ij}\} \in \mathcal{Z}'(\{U_i\}, \Omega_S^1)$ を考えると。

$2K_S = 0$ すなはち $f_{ij}^2 = g_i/g_j$ ($g_i \in \Gamma(U_i, \Omega_S^1)$) と表せる。

$X \cong \mathbb{P}^1$

$$z_i^2 = g_i, \quad z_i/z_j = g_{ij} \quad (\text{張り合せ})$$

X が構成された。標準被覆 $\pi: X \rightarrow U_i$ 上の正則 1 形式 dg_i/g_i

は X 上の正則 1 形式 η を引玉張りなし。

$$P \in X \text{ 特異点} \iff \eta(\pi(p)) = 0$$

である。generic T_3 の場合、 X は 12 個の node を持つ。

Cubic曲面の場合、 $\eta \wedge (B_1 + \dots + B_n) \neq 0$ が成立する。

	Enriques	Cubic
因子(η)	$(\eta) = 2A$	$(\eta) = -(B_1 + \dots + B_n) + 2A$
孤立点	$A = \emptyset$ $\deg \langle \eta \rangle = 12$	$\deg \langle \eta \rangle + n = 12$
$\langle \eta \rangle$	$A \neq \emptyset$ $\deg \langle \eta \rangle = 4$	$\deg \langle \eta \rangle + n = 4$
X	$A = \emptyset$ 有理 2 重点を持つ特異 K3 曲面 \Rightarrow 唯一の標準型特異点 \Rightarrow 有理曲面	Cubic
	$A \neq \emptyset$ 非正規有理曲面	

A は conductrix と呼ばれる正因子で、 $A^2 = -2$ であり、成分は非特異有理曲面である（正規交叉）。Cubic曲面の場合。

$$A \cap (B_1 + \dots + B_n) = \emptyset$$

である。

上の表の積内型特異点を持つ場合は、Schröer [23] が存在の一意性を示した。松平雄也は具体的な構成を示している。松平はさらに有理2重点の詳細な研究を行っている。[10]参照。

Conductrix については Ekedahl - Shepherd-Barron [6] が、A の分類 (Enriques 曲面の場合) を示している。彼らの目的は、正則ベクトル場を持つ古典的 Enriques 曲面の決定にあつたが。

Coble 曲面の場合の Conductrix の研究は 程 [12] が行つた。

有限自己同型群の分類には、單純ルートで Vinberg の条件を満たす配置の分類に帰着することによって至つたが、Conductrix の分類が有用である。本講義の主結果が次の分類表である。

存在証明 (例の構成) には、Rudakov - Shafarevich [22] のペクトル場に対する高曲面の理論を用いる。

Theorem $P=2$ Classification

Ex. 1

Type	Dual Graph of (-2)-curves	Envelope	Cable
\tilde{E}_8		$10\mathbb{P}^1$ 1-dim	$n=1, 10\mathbb{P}^1$ unique
$\tilde{E}_7 + \tilde{A}_1^{(1)}$		$11\mathbb{P}^1$ 2-dim	$n=1, 11\mathbb{P}^1$ 1-dim
$\tilde{E}_7 + \tilde{A}_1^{(2)}$		$11\mathbb{P}^1$ 1-dim	$n=2, 10\mathbb{P}^1 + 1$ unique
$\tilde{E}_6 + \tilde{A}_2$		$13\mathbb{P}^1$ 1-dim	$n=1, 13\mathbb{P}^1$ unique
			$n=3, 10\mathbb{P}^1 + 3$ unique
		$10\mathbb{P}^1$ 2-dim	$n=1, 10\mathbb{P}^1$ 1-dim
\tilde{D}_8		$11\mathbb{P}^1$ 2-dim	
$\tilde{D}_4 + \tilde{D}_4$		$20\mathbb{P}^1$ 1-dim	
Ex. 2	VII		$n=2, 15\mathbb{P}^1 + 5 = 20$ unique
	VIII		$n=10, 5\mathbb{P}^1 + 15 = 20$ unique
		$16\mathbb{P}^1$ 1-dim	$n=4, 10\mathbb{P}^1 + 6 = 16$ unique



Katsura - K - Martin [13]
(2020)



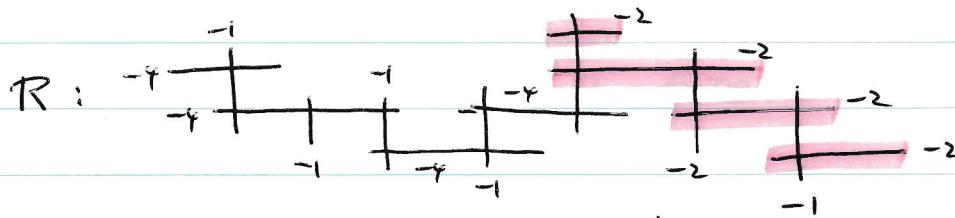
Katsura - Kundu [12]
(2021)

以下で例1と2を述べる。一つは $A \neq \emptyset$ 、もう一つは $A = \emptyset$ の場合である。

Example 1: \widetilde{E}_8 型 ([11], [12]参照)

Conductrix 12 $A = \begin{smallmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & & & & & & & & & \end{smallmatrix}$ である。

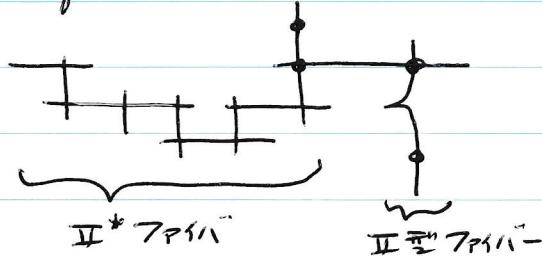
Enriqu S , Cable V の構成には E^8 カーレの 14 の有理曲面 R が用いられる：



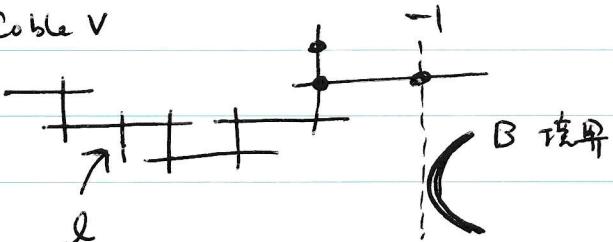
赤い4つ(-2)-柄は Contract して S の標準被覆, $3>\varepsilon$

Contract して残りの一つが境界成分に近づいた子の V のそれである。

Enriqu S



Cable V



R は $P^1 \times P^1$ のブローワフと呼ばれる。また $P^1 \times P^1 \ni (x, y)$ 上の

ベクトル場

$$D = \frac{1}{x^3 y^2} \left[x^4 y^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + ax^4 y^4 + y^4) \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

($a \in k$, $a \neq 0$... Enriqu, $a=0$... Cable)

考えよ。 D の孤立特異点 ($\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ の共通零点) を解消すれば

R 上の孤立特異点を持つ E_8 ベクトル場が得られる。

Cubic曲面 V の点は、(-1)-曲線から4重巻き。 $(B \cup l) \in \mathbb{P}^1$

(-2)-曲線 $\in \mathbb{P}^1$ -ターンで玉。 \mathbb{P}^2 に到達可。 l の像。

直角、 B の像は有理曲線である。 l に射影 B が

走る。座標変換 F で $l \subset B$ の点 P は

(6.2)

$$P = (0:0:1), \quad l = \{x=0\}$$

とします。 P の直線は l を除く全て B と一点、
4重に交わる、このことから、 B の有理性が行き止る。

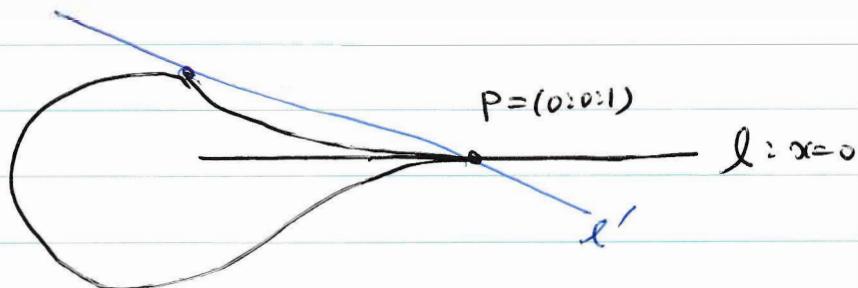
直接計算によって

$$B: y^6 + x^5y + x^2z^4 = 0$$

で z が角因子。射影変換

$$(x:y:z) \rightarrow (x:zy:z^5z) \quad (z^5=1)$$

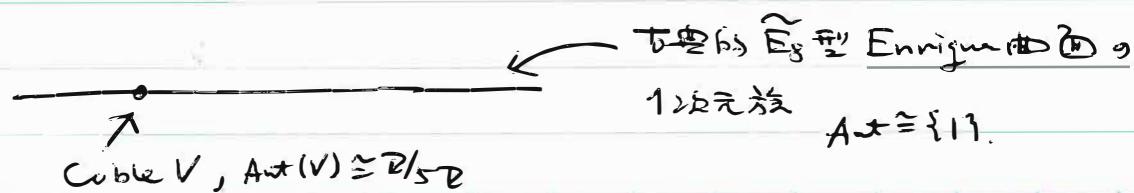
は B を保ち、 V の自己同型を引き起す。



V は II*ファイバーを持つ quasi-elliptic fibration の特徴
を持つ。6次曲線の pencil

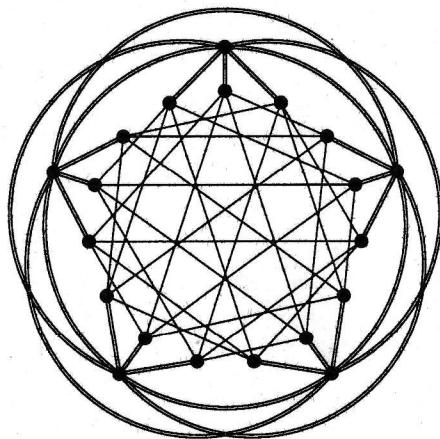
$$\left\{ s x^6 + t (y^6 + x^5y + x^2z^4) \right\}_{(s:t) \in \mathbb{P}^1}$$

から引き出されるものである。



Example 2 : VII型 Enriques, Cable曲面 ([13], [3]参照)

この曲面は丁度 20 個の單純ルートを持ち、下図の双対グラフを



持っている。Aut $\cong \widetilde{G}_2 \cap$

2つの軌道から成る。

一つは 5 個の單純ルートか

二重線を凹に持つ完全グラフ、

残りは Petersen 図形の

双対に相当するグラフである。

また、 $P \neq 2$ の場合を考える。このとき $P=3, 5$ のときは

Enriques曲面が、 $P=3, 5$ のときは Coble曲面が現われる。

どちらも unique である。この例は Fano [7] が最初に

発見し、筆者 [14] が再考案した。構成は易しく T から T₀。

その後 大高 [19] が次の構成方法を与えた：

$$\mathbb{P}^4 \ni X = \sum x_i x_j = \sum \frac{1}{x_i x_j}$$

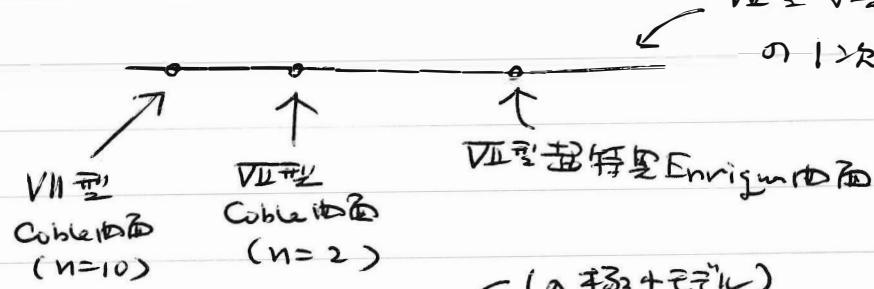
$$\sigma: (x_i) \rightarrow (1/x_i)$$

とすると、 $S = X / \langle \sigma \rangle$ で与えられる。 $P \neq 3, 5$ のときは σ は

固定点を持つ。 $P=3, 5$ の場合、固定点がない。

一方 $X / \langle \sigma \rangle$ の特異点解消が Coble曲面である。

$P=2$ の場合

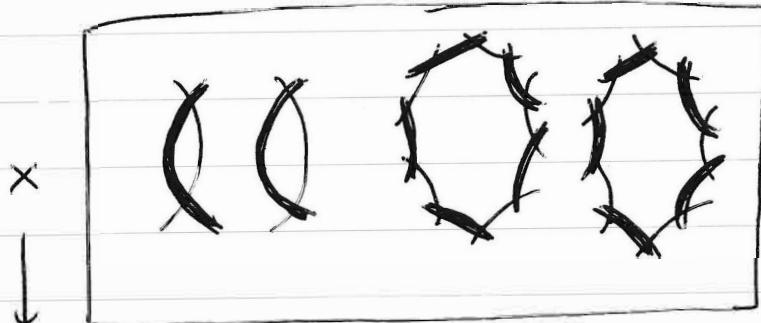


IV型 特異 Enriques 面の 1 次元方錐

が 分離結果である。標準被覆は全て 同型で Artin 不變量 1 の
五次特異 K3 面 X^2 、 $(12-n)$ 回の A_1 型 特異点を持つ
せんじのか 標準被覆である。 X は

$$y^2 + t^2 xy + y = x^3 + x^2 + t^2$$

の $t^3 + t^2 + t$ であります。10回の A_1 型 特異点を持つ K3 面である：



$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\quad} \omega \quad \omega^2 \quad 1 \quad \infty$$

$$\omega^3 = 1, \omega \neq 1$$

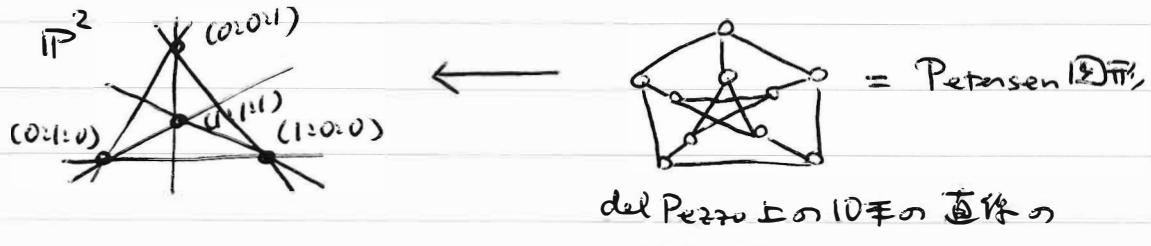
□ 12 回の \mathbb{P}^1 を contract した T_2 と $m=2$ の Enriques 面の 標準被覆、
左の 2 回（右の 10 回）を 強い T_2 contract した $m=2$ ($n=10$) の
Coble 面の 標準被覆である。ベクトル場 X

$$D = \frac{1}{t+1} \left[(t+\alpha)(t+\beta)(t+\gamma) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1+t^2 x}{t+1} \frac{\partial}{\partial x} \right] \quad z = \bar{z}$$

$\alpha, \beta, \gamma \in k$, $\alpha + \beta = \alpha \gamma$, $\alpha^3 = 1$, $\alpha \neq 0$ --- 五次特異 Enriques
面 --- " $\alpha = 0$ --- 五次特異 "

" $\alpha^3 = 1$, $\alpha \neq 1$ --- $m=2$ Coble 面 --- "
" $\alpha = 1$ --- $m=10$ "

最後に $n=2, 10$ の VII型 Cubic曲面の \mathbb{P}^2 の P_1-P_2, P_3-P_4 に対する構成と
計算。 \mathbb{P}^2 の 4 点 P_1-P_2, P_3-P_4 は 5 次 del Pezzo 曲面である。



$P=2$ の特徴性と 12, 2 次の

非特異有理曲面の存在が鍵となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 : x^2 + yz = 0 \\ K_2 : y^2 + zx = 0 \\ K_3 : z^2 + xy = 0 \\ K_4 : xy + yz + zx = 0 \\ K_5 : x + y + z = 0 \end{array} \right.$$

K_1, \dots, K_5 は全で 2 点

$$Q(\omega) = (1 : \omega : \omega^2), \quad \omega^3 = 1, \quad \omega \neq 1$$

Σ 面, 213。

5 次 del Pezzo の 10 点の直線の交点 (15 点) で P_1-P_2, P_3-P_4 にする。

$n=10$ の Cubic曲面 V_{10} が得られる。10 点の直線の引玉を

で 10 回の境界成分に分けて 3 つ 3 つ 11 つ 20 回の單純ルート + 13

5 回の (-2)-曲線 (K_1, \dots, K_5 の引玉) と 15 回の

$2E + \sum B_i + \sum B_j$ 型の單純ルートからなる。ここで

E は 15 回の 3:1 外曲線の一つである。

注意: $K=0$ のときは V_{10} の $B_1 + \dots + B_{10}$ で分岐する 2 重被覆は

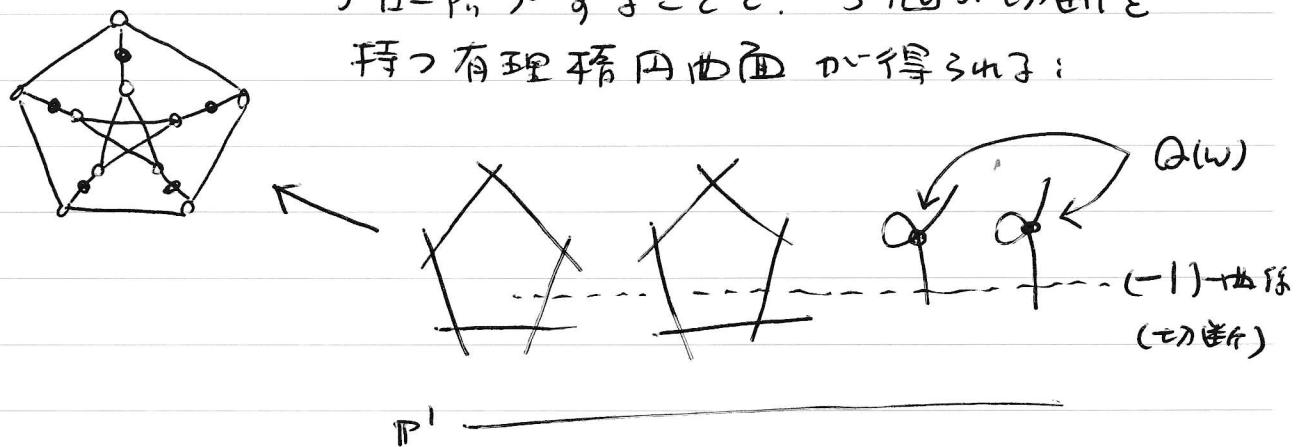
Vinberg [25] が研究した。超球形子 $[2^0 0^2]$ の $K3$ 曲面である。

この $K3$ 曲面の自己同型は無限群であるか。Vinberg が生成元を
与えている。これが 5 回の Cremona 变換から引玉を作られて
いることを示すのが階連 LT。
この場合 単純ルート K_1, \dots, K_5 は

effective で $r=2$ 、 $k=4$ 代入すると Cremona 变換が現われ
無限群と分子のか、カラクリである。

次に $m=2$ の Coble 曲面の構成を述べる。Petersen 四形の
5個の五角形の組を考え、組同士の 5個の交点で

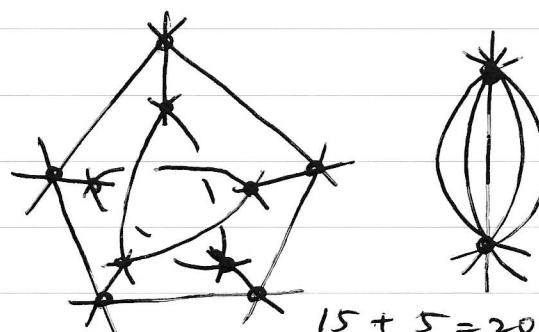
ブローリー線を引くこととする。5個の切断を持った有理平面曲面が得られる：



この平面曲面は I₅型ファイバー 2個の他 12. I₁型ファイバー 2つ
を持つが、これらの特異点は 5角形の邊 12 方向
からなる $Q(w)$ である。この 2点 $Q(w)$ をブローリー線
を引くことで $m=2$ の Coble 曲面が得られる。20個の
単純ルートは 15個の P^1 ($\star + \star + k_1, \dots, k_5$) と 5本の切断
から作られる 5個の単純ルートから成る。

5T3M+12. $P=2$ の VII型 Enriques 曲面の 20個の
 P^1 の図を書いて終りとする。([11]参照)

$P=2$
VII型
Enriques
上の
20本の P^1



12個の支点上で 12個の
A₁ 特異点が現われる。
もちろん左と右の曲線は
VII型四形の通りに
支かれている。

参考文献

- [1] E. Bombieri, D. Mumford, *Enriques' classification of surfaces in char. p*, III, Invent. math., **35** (1976), 197–232.
- [2] A. Coble, *The ten nodes of the rational sextic and of the Cayley symmetroid*, Amer. J. Math., **41** (1919), 243–265.
- [3] I. Dolgachev, S. Kondō, *Enriques surfaces II*. <http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/EnriquesTwo.pdf>.
- [4] I. Dolgachev, S. Kondō, *The rationality of the moduli spaces of Coble surfaces and of nodal Enriques surfaces*, Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya **77**, No.3 (2013), 77–92.
- [5] I. Dolgachev, De-Qi Zhang, *Coble rational surfaces*, Amer. J. Math., **123** (2001), 79–114.
- [6] T. Ekedahl, N. Shepherd-Barron, *On exceptional Enriques surfaces*. math/0405510.
- [7] G. Fano, *Superficie algebriche di genere zero bigenere uno e loro casi particolari*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **29** (1910), 98–118.
- [8] E. Horikawa, *On the periods of Enriques surfaces, I*. Math. Ann. **234** (1978), 73–108.
- [9] E. Horikawa, *On the periods of Enriques surfaces, II*. Math. Ann. **235** (1978), 217–246.
- [10] L. Illusie, Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline, Ann. Sci. École Norm. Sup., **12** (1979), 501–661.
- [11] T. Katsura and S. Kondō, *On Enriques surfaces in characteristic 2 with a finite group of automorphisms*, J. Algebraic Geometry **27** (2018), 173–202.
- [12] T. Katsura, S. Kondō, *Coble surfaces in characteristic two*, arxiv:2107.14537.
- [13] T. Katsura, S. Kondō, G. Martin, *Classification of Enriques surfaces with finite automorphism group in characteristic 2*, Algebraic Geometry **7** (2020), 390–459.
- [14] S. Kondō, *Enriques surfaces with finite automorphism groups*, Japan. J. Math., **12** (1986), 191–282.
- [15] S. Kondō, *Coble surfaces with finite automorphism group*, to appear in Rend. Circ. Mat. Palermo; arxiv:2102.00591.
- [16] C. Liedtke, *Arithmetic moduli and lifting of Enriques surfaces*, J. reine angew. Math. **706** (2015), 35–65.
- [17] G. Martin, *Enriques surfaces with finite automorphism group in positive characteristic*, Algebraic Geometry **6** (2019), 592–649.
- [18] Y. Matsumoto, *Canonical coverings of Enriques surfaces in characteristic 2*, arXiv:1812.06914v1.

- [19] S. Mukai, H. Ohashi, *Finite groups of automorphisms of Enriques surfaces and the Mathieu group M_{12}* , arXiv:1410.7535, 2014.
- [20] S. Mukai, H. Ohashi, *Automorphisms of two rational surfaces in characteristic 3*, in preparation.
- [21] V. Nikulin, *On a description of the automorphism groups of Enriques surfaces*, Soviet Math. Dokl., **30** (1984), 282–285.
- [22] A. Rudakov, I. Shafarevich, *Inseparable morphisms of algebraic surfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math., **40** (1976), 1269–1307.
- [23] S. Schröer, *Enriques surfaces with normal K3-like coverings*, J. Math. Soc. Japan **73** (2021), 433–496.
- [24] E. B. Vinberg, *Some arithmetic discrete groups in Lobachevskii spaces*, in "Discrete subgroups of Lie groups and applications to Moduli", Tata-Oxford (1975), 323–348.
- [25] E. Vinberg, *The two most algebraic K3-surfaces*, Math Ann. **26** (1983), 1–21.