射影直線上の力学系の モジュライと乗数について

後藤 倫
大阪大学大学院 博士後期課程 1 年
科研費 DC1, 課題番号 JP202122197

2021/10/27

標数 0 の基礎体 k を固定する. d は 2 以上の整数とする.

代数多様体の d 次射 $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を力学系と見て、反復 $f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \ldots$ を考える.

定義

f の (n 周期点の) 乗数集合とは、($d^n + 1$ 元) 多重集合

$$\{(f^n)'(x) \mid x \in \mathbb{P}^1,\ f^n(x) = x \text{ (重解は重複して数える)}\}.$$

等価な情報として、変数 t の多項式

$$\Lambda_n(f) := \prod_{f^n(x)=x} (1 + (f^n)'(x)t)$$

は力学系の他の性質とも関連する重要な不変量である.

問

$\Lambda_n(f)$ にはどのような性質があるか?

問題を言い換えるために
力学系のモジュライ Dyn_d を

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rat}_d &:= \{d \text{ 次射 } \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1\} \\
\subset_{open} \overline{\mathrm{Rat}_d} &:= \{(1,d) \text{ 次対応 } \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1\} \\
&= \{(1,d) \text{ 次サイクル } C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\} \simeq \mathbb{P}^{2d+1} \\
\mathrm{Dyn}_d &:= \overline{\mathrm{Rat}_d}(\mathcal{O}(1))^{ss} // \mathrm{PGL}_2
\end{aligned}$$

で定めると、乗数写像

$$\Lambda_n : \overline{\mathrm{Rat}_d} \dashrightarrow \mathbb{P}^{d^n+1},\ f \mapsto \Lambda_n(f)$$

が定まり、$\Lambda_n : \overline{\mathrm{Rat}_d} \dashrightarrow \mathbb{P}^{d^n+1}$ は PGL_2 不変で

$$\Lambda_n : \mathrm{Dyn}_d \dashrightarrow \mathbb{P}^{d^n+1}$$

が定まる.

問

$\Lambda_n, \mathrm{Dyn}_d$ にはどのような性質があるか?

例

(McMullen) $\prod_{n=1}^{\infty} \Lambda_n : \mathrm{Dyn}_d \to \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^{d^n+1}$ は d が平方数でなければ像への有限射.
(Woods Hole Formula) Λ_1 の像は超平面 $(\sum_{i=0}^{d+1}(-1)^i(d-i)x_i)$ に含まれる.
(Lévy) Dyn_d は有理的 (rational).

1. 乗数写像
2. 対応への一般化
3. 乗数写像の次数

$e \geq 1$ とする.

問

$$\overline{\mathrm{Rat}_d} := \{(1,d) \text{ 次対応 } \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1\}$$
$$\mathrm{Dyn}_d := \overline{\mathrm{Rat}_d}(\mathcal{O}(1))^{ss}//\mathrm{PGL}_2$$

を、

$$\mathrm{Corr}_{d,e} := \{(d,e) \text{ 次対応 } \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1\}$$
$$\mathrm{Dyn}_{d,e} := \overline{\mathrm{Corr}_{d,e}}(\mathcal{O}(1))^{ss}//\mathrm{PGL}_2$$

に一般化したらどうなるだろうか?

$\mathrm{Dyn}_d = \mathrm{Dyn}_{1,d}$, $\dim \mathrm{Dyn}_{d,e} = (d+1)(e+1) - 4$.

(d,e) 次対応

$$(f(x,y) = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{e} a_{i,j} x_0^{d-i} x_1^i y_0^{e-j} y_1^j) \subset \mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_y^1$$

に対して、その固定点集合は $f(z,z) \subset \mathbb{P}_z^1$ で定める.
$d+e$ 点集合になる. これによって、乗数写像の自然な一般化

$$\Lambda_n : \mathrm{Corr}_{d,e} \dashrightarrow \mathbb{P}^{d^n+e^n}$$

が定まり、PGL_2 不変となって

$$\Lambda_n : \mathrm{Dyn}_{d,e} \dashrightarrow \mathbb{P}^{d^n+e^n}$$

を導く.

定理 (G)

- $\mathrm{Dyn}_{d,e} \dashrightarrow \mathrm{Dyn}_{1,d+e-1} = \mathrm{Dyn}_{d+e-1}$ が存在して、*generic fiber* は射影空間である.
  特に、$\mathrm{Dyn}_{d,e}$ は有理的.
- 上の射について、次の図式を可換にする $A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{d+e}) = \mathrm{PGL}_{d+e}$ が存在する:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Dyn}_{d,e} \arrow[r, dashed, "\Lambda_1"] \arrow[d, dashed] & \mathbb{P}^{d+e} \arrow[d, "A"] \\ \mathrm{Dyn}_{1,d+e-1} \arrow[r, dashed, "\Lambda_1"] & \mathbb{P}^{d+e}. \end{tikzcd}$$

- (d, e) 次対応の *Woods Hole* 超平面と、$d+e-1$ 次力学系の *Woods Hole* 超平面は上の A で移りあう.

定義

$f_1, f_2 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ が等スペクトルとは、

$$\forall n,\ \Lambda_n(f_1) = \Lambda_n(f_2).$$

問

一般の $d(\geq 2)$ 次射 $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ について、f と等スペクトルな射の共役類は、いくつあるだろうか?

定理 (McMullen)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \Lambda_n : \mathrm{Dyn}_d \to \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^{d^n+1}$$

は、Dyn_d 上の *Flexible Lattés* 写像を表す領域を除いて、像への有限射.

定理 (既知の結果)

$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ について、$\Lambda_i(f) = \Lambda_i(g)\ (\forall i \leq m)$ となる g の共役類の個数は、

f の範囲	m	個数	参照
任意の 2 次射	1	1	*(Silverman,Milnor)*
一般の $d \geq 3$ 次射	1	∞	次元の比較
一般の 3 次射	2	≤ 12	*(Hutz-Tepper)*
一般の d 次多項式 (g も多項式に限定)	1	$(d-2)!$	*(Fujimura)*
任意の d 次多項式	1		*(Sugiyama)*
一般の射	3	$< \infty$	*(Gorbovicki)*

McMullen,Gorbovicki の結果に対して、初の具体的な上界を与えた:

定理 (G)

d 次射 $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ について、$\Lambda_i(f) = \Lambda_i(g)$ $(\forall i \leq 3)$ となる g の共役類の個数は、

$$\frac{(2d^3 \cdot \frac{d^3-1}{d-1} + 2d)^{2d-1}(d-1)!^2 \gcd(d+1, 2)}{(d^2-1)(2d)!}$$

個以下.

これは $O(d^{10d-9})$ である.

- Rin Gotou, Dynamical Systems of Correspondences on the Projective Line I: Moduli Spaces and Multiplier Maps, arXiv: 2109.06394
- Rin Gotou, Dynamical Systems of Correspondences on the Projective Line, Master Thesis of Osaka Univercity

- Harm Derksen, Gregor Kemper, Computational invariant theory. Second enlarged edition. With two appendices by Vladimir L. Popov, and an addendum by Norbert A'Campo and Popov. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 130. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, VIII. Springer, Heidelberg, 2015. xxii+366 pp. ISBN: 978-3-662-48420-3; 978-3-662-48422-7
- Tien-Cuong Dinh, Lucas Kaufmann, Hao Wu, Dynamics of holomorphic correspondences on Riemann surfaces. (English summary) Internat. J. Math. 31 (2020), no. 5, 2050036, 21 pp.
- Masayo Fujimura, Projective moduli space for the polynomials. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 13 (2006), no. 6, 787-801.
- I. Gorbovickis, Algebraic Independence of Multipliers of Periodic Orbits in the Space of Rational Maps of the Riemann Sphere. Mosc. Math. J. 15 (2015), no. 1, 73-87.
- B. Hutz and M. Tepper, Multiplier Spectra and the Moduli Space of Degree 3 Morphisms on $\mathbb{P}^1$. JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications 29 (2013), no. 2, 189-206.
- Alon Levy, The space of morphisms on projective space. Acta Arith. 146 (2011), no. 1, 13-31.

- Curt McMullen, Families of rational maps and iterative root-finding algorithms, Ann. of Math. 125 (1987), 467-493.
- J. Milnor. Geometry and dynamics of quadratic rational maps. Experiment. Math. 2 (1993), 37-83. With an appendix by the author and Lei Tan
- D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, Geometric invariant theory. Third edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)], 34. Springer-Verlag, Berlin, 1994. xiv+292 pp. ISBN: 3-540-56963-4
- Joseph H. Silverman, The space of rational maps on $\mathbb{P}^1$, Duke Math. J. Volume 94, Number 1 (1998), 41-77.

- Joseph H. Silverman, The arithmetic of dynamical systems. Graduate Texts in Mathematics, 241. Springer, New York, 2007. x+511 pp. ISBN: 978-0-387-69903-5
- Joseph H. Silverman, Moduli spaces and arithmetic dynamics. CRM Monograph Series, 30. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. viii+140 pp. ISBN: 978-0-8218-7582-7
- Toshi Sugiyama, The moduli space of polynomial maps and their fixed-point multipliers. Adv. Math. 322 (2017), 132 – 185.
- Lloyd William West, The Moduli Space of Rational Maps. Thesis (Ph.D.) – City University of New York. 2015. 88 pp. ISBN: 978-1339-02142-3