普遍的双有理不変量と $\mathbb{A}^1$ ホモロジー

清水祐利（東京工業大学）
qingshuiyouli27@gmail.com

2021 年 10 月 27 日

記号の導入

- k ： 特異点解消を持つ体
- $\mathcal{S}m_k$ ： k 上滑らかかつ有限型なスキームの圏
- $\mathcal{S}m_k^{prop}$ ： 固有なものの成す $\mathcal{S}m_k$ の充満部分圏
- $\mathbb{H}_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ ： X の 0 次 $\mathbb{A}^1$ ホモロジー（$\mathcal{S}m_k$ 上の前層である）

Definition

$\mathcal{S}m_k$ 上の前層 $\mathcal{F}$ が双有理層（birational sheaf）である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
(1) $\mathcal{F}(X \sqcup Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y), \forall X, Y \in \mathcal{S}m_k$,
(2) $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U)$, $\forall$ 稠密開埋め込み $U \hookrightarrow X$.

- $\mathcal{A}b_k^{br}$ ： $\mathcal{S}m_k$ 上のアーベル群の双有理層の圏

$\mathbb{A}^1$ ホモトピーと $\mathbb{A}^1$ ホモロジーの概要

$\mathbb{A}^1$ ホモトピーとは

滑らかな代数多様体のホモトピー論であり、Morel-Voevodsky により 1999 年に導入された。アフィン直線 $\mathbb{A}^1$ を単位閉区間に見立てることで、直線を潰しても変化しない性質（代数的 K 理論、モチヴィックコホモロジー等）を取り扱うことができる。別名モチヴィックホモトピー論。

$\mathbb{A}^1$ ホモロジーとは

$\mathbb{A}^1$ ホモトピー論において特異ホモロジーの役割を果たす不変量である。ただし群ではなくある種の層となる。0 次の $\mathbb{A}^1$ ホモロジーは滑らかかつ完備な代数多様体の双有理不変量であることが知られている（Asok, 2013）。

これらの定義には準備が必要なのでここでは割愛する。

主定理 1 （0 次 $\mathbb{A}^1$ ホモロジーの普遍的双有理不変性）

以下の補題により、対応 $X \mapsto \mathbb{H}_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ は関手 $\mathcal{S}m_k^{prop} \to \mathcal{A}b_k^{br}$ を与える。これを単に $\mathbb{H}_0^{\mathbb{A}^1}$ と書く。

Lemma (S)

任意の $X \in \mathcal{S}m_k$ に対し、$\mathbb{H}_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ は $\mathcal{S}m_k$ 上の双有理層。

関手 $\mathbb{H}_0^{\mathbb{A}^1}$ が双有理不変量としてあるいみ普遍的である、というのが第一の主定理である。

Theorem (S)

$\mathcal{A}$ ： Ab 豊穣余完備圏（例えば加群圏）
F ： 関手 $\mathcal{S}m_k^{prop} \to \mathcal{A}$、双有理射 f に対し $F(f)$ は同型
このとき F は $\mathbb{H}_0^{\mathbb{A}^1}$ を（自然同値を除いて）一意に経由する。

主定理 2（0 次 $\mathbb{A}^1$ ホモロジーの構造定理）

Asok-Morel は 2011 年に、双有理 $\mathbb{A}^1$ 連結成分の層と呼ばれる集合の双有理層 $\pi_0^{b\mathbb{A}^1}(X)$ を、各 $X \in \mathcal{S}m_k^{prop}$ に対して構成した。これを使えば、$\mathbb{H}_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ は以下の様に表せる。

Theorem (S)

$X \in \mathcal{S}m_k^{prop}$ に対し、$\mathbb{H}_0^{\mathbb{A}^1}(X)$ は $\pi_0^{b\mathbb{A}^1}(X)$ で生成される自由アーベル群の前層に同型。

一つ目の主定理（とその補題）はこの定理からの帰結である。また系として以下が言える。

Corollary (S)

各 $X \in \mathcal{S}m_k^{prop}$ に対し、$\mathbb{H}_0^{\mathbb{A}^1}(X)(\mathrm{Spec}\, k)$ は $X(k)/R$ で生成される自由アーベル群に同型（R は R 同値）。とくに
$\mathbb{H}_0^{\mathbb{A}^1}(X)(\mathrm{Spec}\, k) = 0 \Leftrightarrow X(k) = \emptyset$。