

# 超限漸近次元について

## (On transfinite asymptotic dimension)

愛媛大学大学院理工学研究科 山内 貴光

Takamitsu Yamauchi

Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

Gromov [7] によって導入された漸近次元は、幾何学的群論や粗幾何学で基本的な次元概念であり、その定義から、被覆次元の粗幾何学版とみなすことができる。被覆次元に関する(弱い)無限次元概念として Haver [8] の性質  $C$  がよく知られている。Dranishnikov [4] は、性質  $C$  の粗幾何学的類似概念として漸近的性質  $C$  を導入し、漸近的性質  $C$  をもつ(有界幾何)距離空間が Yu の性質  $A$  (property  $A$ ) をもつことを示した。ここで、性質  $A$  は coarse Baum-Connes 予想を成立させる十分条件として Yu [18] によって導入された粗幾何学における基本的概念である。漸近次元が有限な距離空間は、漸近的性質  $C$  をもつ。

一方、Haver の性質  $C$  をもつ空間を分類する概念として、Borst [2] による被覆次元の超限的(順序数への)拡張がある。この粗幾何学的概念として、Radul [13] は超限漸近次元を定義し、 $X$  が漸近的性質  $C$  をもつことと、 $X$  の超限漸近次元が存在することが、同値であることを証明した。

任意の可算群は、一様離散、左不変かつ固有な距離を、粗同値を除いて一意的にもつ(例えば [9, Examples 1.2.2 and 1.4.7])。以後、可算群はこの距離をもつ距離空間とする。漸近的性質  $C$  をもつ可算群からなる可算直和が漸近的性質  $C$  をもつかは未解決である。この問題に関して、Davila [3] は、漸近次元が有限な可算群からなる可算直和は漸近的性質  $C$  をもつことを証明した。また、Dydak [5] は、漸近的性質  $D$  を導入し、漸近次元が有限な距離空間が漸近的性質  $D$  をもつこと、漸近的性質  $D$  をもつ距離空間が漸近的性質  $C$  をもつこと、及び、漸近次元が有限な可算群からなる可算直和は漸近的性質  $D$  をもつことを証明した。さらに、Dydak [5] は問題「漸近的性質  $C$  をもち、漸近的性質  $D$  をもたない距離空間は存在するか」を提起した。Orzechowski [11] は、漸近的性質  $D$  と超限漸近次元を関連付けることにより、この Dydak の問題を肯定的に解決した。

本稿では、超限漸近次元について概説するとともに、Orzechowski の定理 [11] および関連する [17] の結果を紹介する。

## 1 漸近次元と漸近的性質 C

最小の無限順序数を  $\omega$  で表す.  $\omega$  は非負整数全体のなす集合ともみなす. 集合  $A$  の濃度を  $|A|$  で表す.  $(X, d)$  を距離空間とする.  $U, U' \subset X$  と  $X$  の部分集合族  $\mathcal{V}$  に対し,

$$\begin{aligned} \text{diam } U &= \sup\{d(x, x') : x, x' \in U\}, & d(U, U') &= \inf\{d(x, x') : x \in U, x' \in U'\}, \\ \text{mesh } \mathcal{V} &= \sup\{\text{diam } V : V \in \mathcal{V}\} \end{aligned}$$

とおく.  $R > 0$  に対し,  $X$  の部分集合族  $\mathcal{U}$  が  $R$ -disjoint であるとは, 任意の異なる  $U, U' \in \mathcal{U}$  に対して  $d(U, U') \geq R$  であるときをいう. また,  $\mathcal{U}$  が pairwise disjoint であるとは, 任意の異なる  $U, U' \in \mathcal{U}$  に対して  $U \cap U' = \emptyset$  であるときをいう.

**定義 1.1** ([7]). 次の条件をみたす最小の  $n \in \omega$  を  $X$  の漸近次元 (asymptotic dimension) といい,  $\text{asdim } X$  で表す: 任意の  $R > 0$  に対して, 次の (1)–(3) を満たす  $n + 1$  個の  $X$  の部分集合族  $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$  と  $S > 0$  が存在する.

- (1)  $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$  は  $X$  を被覆する.
- (2) 各  $\mathcal{U}_i$  は  $R$ -disjoint である.
- (3)  $\text{mesh } \bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i \leq S$  である.

漸近次元は粗幾何学における不変量である (例えば [9, Theorem 2.2.5]). 次の Ostrand の定理 [10] により, 漸近次元は被覆次元の粗幾何学的類似概念とみなせる.

**定理 1.2** ([10, Theorem 2]). コンパクト距離空間  $X$  に対して, 次の条件をみたす最小の  $n \in \omega$  は  $X$  の被覆次元と等しい: 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, 次の (1)–(3) を満たす  $n + 1$  個の  $X$  の開集合族  $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$  が存在する:

- (1)  $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$  は  $X$  を被覆する.
- (2) 各  $\mathcal{U}_i$  は pairwise disjoint である.
- (3)  $\text{mesh } \bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i \leq \varepsilon$  である.

一方, (位相) 次元論では, 次の Haver [8] による性質 C がよく知られている.

**定義 1.3** ([8]). コンパクト距離空間  $X$  が (Haver の) 性質 C (property C) をもつとは, 任意の正の数の列  $\{\varepsilon_i\}_{i \in \omega}$  に対して,  $k \in \omega$  と次の (1)–(3) を満たす  $X$  の開集合族  $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$  が存在するときをいう:

- (1)  $\bigcup_{i=0}^k \mathcal{U}_i$  は  $X$  を被覆する.

- (2) 各  $\mathcal{U}_i$  は pairwise disjoint である。  
 (3) 任意の  $i \in \{0, \dots, k\}$  に対して  $\text{mesh } \mathcal{U}_i \leq \varepsilon_i$  である。

Dranishnikov [4] は, 性質 C の粗幾何学的類似概念として漸近的性質 C を定義した。

**定義 1.4** ([4]). 距離空間  $X$  が漸近的性質 C (asymptotic property C) をもつとは, 任意の正の数の列  $\{R_i\}_{i \in \omega}$  に対して,  $k \in \omega$  と次の (1)–(3) を満たす  $X$  の部分集合族  $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$  と  $S > 0$  が存在するときをいう:

- (1)  $\bigcup_{i=0}^k \mathcal{U}_i$  は  $X$  を被覆する。  
 (2) 各  $\mathcal{U}_i$  は  $R_i$ -disjoint である。  
 (3)  $\text{mesh } \bigcup_{i=0}^k \mathcal{U}_i \leq S$  である。

漸近次元が有限な距離空間は, 漸近的性質 C を満たす。

## 2 超限漸近次元

Radul [13] は, Borst [1], [2] による被覆次元の超限的拡張に基づいて超限漸近次元を定義し, 漸近次元を順序数へ拡張した。以下,  $\mathbb{N}$  は正の整数全体のなす集合を表す。  $L$  を集合とし,  $L$  の空でない有限部分集合全体のなす集合を  $\text{Fin } L$  で表す。

**定義 2.1** ([1]).  $M \subset \text{Fin } L$  と  $a \in L$  に対し,

$$M^a = \{\tau \in \text{Fin } L : \tau \cup \{a\} \in M \text{ and } a \notin \tau\}$$

とおく。

**例 2.2.**  $M = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 4\}\} \subset \text{Fin } \mathbb{N}$  に対し,  $M^1 = \{\{2\}, \{3, 4\}\}$ ,  $M^2 = \{\{1\}, \{4\}\}$ ,  $M^3 = \{\{1, 4\}\}$ ,  $M^4 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$ ,  $(M^1)^1 = \emptyset$ ,  $(M^1)^2 = \emptyset$ ,  $(M^1)^3 = \{\{4\}\}$ ,  $(M^1)^4 = \{\{3\}\}$  である。

**定義 2.3** ([1]).  $M \subset \text{Fin } L$  に対し, 順序数  $\text{Ord } M$  を帰納的に次で定める:

- $M = \emptyset$  のとき,  $\text{Ord } M = 0$  と定める;
- 任意の  $a \in L$  に対して  $\text{Ord } M^a < \alpha$  のとき,  $\text{Ord } M \leq \alpha$  と定める;
- $\text{Ord } M \leq \alpha$  かつ  $\text{Ord } M \not< \alpha$  のとき,  $\text{Ord } M = \alpha$  と定める。

ある順序数  $\alpha$  について  $\text{Ord } M \leq \alpha$  であるとき  $\text{Ord } M < \infty$  と表し,  $\text{Ord } M$  が存在するという。  $\text{Ord } M$  が存在しないとき  $\text{Ord } M = \infty$  と表す。

**事実 2.4** ([1, Lemma 2.1.4]).  $M \subset \text{Fin } L$  とし,  $n \in \omega$  とする. このとき,  $\text{Ord } M \leq n$  であるための必要十分条件は, 任意の  $\sigma \in M$  が  $|\sigma| \leq n$  を満たすことである.

**例 2.5.**  $M = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 4\}\} \subset \text{Fin } \mathbb{N}$  に対し,  $\text{Ord } M = 3$  である.

**事実 2.6** ([1, Lemma 2.1.3]).  $M \subset \text{Fin } L$  が条件 “ $\sigma \subset \tau \in M \Rightarrow \sigma \in M$ ” を満たすとする. このとき,  $\text{Ord } M = \infty$  であるための必要十分条件は, ある  $\{\tau_i : i \in \omega\} \subset M$  が存在して, 任意の  $i \in \omega$  に対して  $\tau_i \subsetneq \tau_{i+1}$  を満たすことである.

**例 2.7.** 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\sigma_n = \{1, 2, \dots, n\}$  とすると,  $\{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \text{Fin } \mathbb{N}$  かつ  $\text{Ord}\{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$  である.

**例 2.8.** 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\sigma_n = \{2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n - 2, 2^n - 1\}$  ( $\sigma_1 = \{1\}$ ,  $\sigma_2 = \{2, 3\}$ ,  $\sigma_3 = \{4, 5, 6, 7\}$ , ...) とすると,  $\{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \text{Fin } \mathbb{N}$  かつ  $\text{Ord}\{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\} = \omega$  である. より一般に,  $M \subset \text{Fin } L$  が pairwise disjoint であり, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $|\sigma_n| \geq n$  を満たす  $\sigma_n \in M$  が存在すれば,  $\text{Ord } M = \omega$  である.

Borst [1] は,  $\text{Ord } M$  を用いて弱い無限次元空間 (weakly infinite dimensional spaces) を分類する被覆次元の超限的な拡張を定義した. さらに Borst [2] は, Haver の性質 C を分類する被覆次元の超限的な拡張  $\text{dim}_C$  を定義した.

**定義 2.9** ([2]). コンパクト距離空間  $X$  に対して

$$M_K(X) = \left\{ \sigma \in \text{Fin } \mathbb{N} : \bigcup_{i \in \sigma} \mathcal{U}_i \text{ が } X \text{ を被覆し, かつ任意の } i \in \sigma \text{ に対し } \text{mesh } \mathcal{U}_i \leq \frac{1}{i} \text{ を満たすような } X \text{ の pairwise disjoint な開集合族 } \mathcal{U}_i (i \in \sigma) \text{ は存在しない} \right\}$$

とおき,  $\text{dim}_C X = \text{Ord } M_K(X)$  と定める.

**注意 2.10.** コンパクト距離空間  $X$  の被覆次元  $\text{dim } X$  が有限のとき,  $\text{dim}_C X = \text{dim } X$  である. 実際,  $n \in \omega$  とし,  $\text{dim}_C X \leq n$  とする. 定理 1.2 を用いて  $\text{dim } X \leq n$  を示すため, 任意に  $\varepsilon > 0$  をとる.  $\frac{1}{i_0} \leq \varepsilon$  を満たす  $i_0 \in \mathbb{N}$  をとり,  $\sigma = \{i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + n\}$  とおく. このとき  $|\sigma| = n + 1 > n$  かつ  $\text{Ord } M_K(X) = \text{dim}_C X \leq n$  と事実 2.4 より  $\sigma \in \text{Fin } \mathbb{N} \setminus M_K(X)$  である. 従って ( $M_K(X)$  の定め方から)  $\bigcup_{i \in \sigma} \mathcal{U}_i$  が  $X$  を被覆し, かつ任意の  $i \in \sigma$  に対し  $\text{mesh } \mathcal{U}_i \leq \frac{1}{i}$  を満たすような  $X$  の pairwise disjoint な開集合族  $\mathcal{U}_i (i \in \sigma)$  が存在する. このとき各  $i \in \sigma$  に対して  $\text{mesh } \mathcal{U}_i \leq \frac{1}{i} \leq \varepsilon$  ゆえ, 定理 1.2 より  $\text{dim } X \leq n$  を得る.

逆に  $\dim X \leq n$  とし,  $|\sigma| \geq n+1$  を満たす  $\sigma \in \text{Fin } \mathbb{N}$  を任意にとる. 定理 1.2 より,  $\bigcup_{i \in \sigma} U_i$  が  $X$  を被覆し, かつ任意の  $i \in \sigma$  に対し  $\text{mesh } U_i \leq \frac{1}{\max \sigma}$  を満たすような  $X$  の pairwise disjoint な開集合族  $U_i$  ( $i \in \sigma$ ) が存在する. このとき  $(M_K(X))$  の定め方から  $\sigma \notin M_K(X)$  である. 従って任意の  $\sigma \in M_K(X)$  に対して  $|\sigma| \leq n$  が成り立つ. ゆえに事実 2.4 より  $\dim_C X = \text{Ord } M_K(X) \leq n$  である.

$\dim_C$  は, 次の意味で性質  $C$  をもつコンパクト距離空間を分類する.

**定理 2.11** ([2, Theorem 4.8]). コンパクト距離空間  $X$  が性質  $C$  をもつための必要十分条件は,  $\dim_C X < \infty$  を満たすことである.

**事実 2.12** ([12, Corollary]). 任意の可算順序数  $\alpha$  と Smirnov の空間  $S_\alpha$  (cf. [6, Example 7.1.33]) について,  $\dim_C S_\alpha = \alpha$  が成り立つ.

Radul [13] は  $\dim_C$  の粗幾何学的類似概念として超限漸近次元  $\text{trasdim}$  を定義した. 距離空間  $X$  の部分集合族  $\mathcal{V}$  に対して  $\text{mesh } \mathcal{V}$  が有限であるとき,  $\mathcal{V}$  は一様有界 (**uniformly bounded**) であるという.

**定義 2.13** ([13]). 距離空間  $X$  に対して

$$A(X) = \left\{ \sigma \in \text{Fin } \mathbb{N} : \bigcup_{i \in \sigma} U_i \text{ が } X \text{ を被覆し, かつ任意の } i \in \sigma \text{ に対し } U_i \text{ が } i\text{-disjoint} \right. \\ \left. \text{であるような } X \text{ の一様有界な部分集合族 } U_i (i \in \sigma) \text{ は存在しない} \right\}$$

とおき,  $\text{trasdim } X = \text{Ord } A(X)$  と定める.

**注意 2.14.** 距離空間  $X$  の漸近次元  $\text{asdim } X$  が有限のとき,  $\text{trasdim } X = \text{asdim } X$  である. (注意 2.10 と同様に示せる.)

次の定理から,  $\text{trasdim}$  は漸近的性質  $C$  をもつ距離空間を分類することが分かる.

**定理 2.15** ([13, Proposition 1 and Theorem 4]). 距離空間  $X$  に対し, 次は同値である.

- (a)  $X$  は漸近的性質  $C$  をもつ.
- (b)  $\text{trasdim } X < \infty$  である.
- (c)  $\text{trasdim } X$  は可算順序数と等しい.

また, 次が知られている.

**定理 2.16** ([13, Theorem 3]).  $\text{trasdim } L_\infty = \infty$  を満たす距離空間  $L_\infty$  が存在する.

**定理 2.17** ([14, p.93]). 整数群  $\mathbb{Z}$  の可算無限直和  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$  に対して,  $\text{traskdim} \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} = \omega$  である.

**定理 2.18** ([15, Theorem 3.1]). 整数群  $\mathbb{Z}$  の輪積 (wreath product)  $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$  に対して,  $\text{traskdim} \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \leq \omega + 1$  である.

**定理 2.19** ([16, Theorem 3.3]). 任意の可算順序数  $\alpha$  に対して,  $\text{traskdim} X_\alpha = \alpha$  を満たす距離空間  $X_\alpha$  が存在する.

### 3 APD プロファイルと漸近的性質 D

Davila [3] は次を証明した.

**定理 3.1** ([3, Theorem 3.4]). 各  $i \in \mathbb{N}$  に対して  $G_i$  が漸近次元有限な可算群ならば, その可算直和  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i$  は漸近的性質 C をもつ.

Dydak は論文 [5] において APD プロファイルと漸近的性質 D を導入し, 漸近次元が有限な可算群の可算直和について論じた. 距離空間  $(X, d)$  と  $U \subset X$ ,  $R > 0$  に対し,

$$B(U, R) = \{x \in X : \exists y \in U (d(x, y) \leq R)\}$$

とおく.

**定義 3.2** ([5, Definitions 3.2 and 3.6]).  $X$  を距離空間とし,  $R > 0$  とする.  $X$  の部分集合族  $\mathcal{U}$  が **scale- $R$ -disjoint** であるとは, 任意の異なる 2 つの  $U, U' \in \mathcal{U}$  に対して  $B(U, R) \cap B(U', R) = \emptyset$  が成り立つときをいう. また,  $n \in \omega$  と  $A \subset X$  に対し,  $A$  の **scale- $R$ -dimension** が  $n$  以下であるとは,  $n + 1$  個の  $X$  の部分集合族  $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n$  が存在して,  $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$  は  $A$  を被覆し, 各  $\mathcal{U}_i$  が scale- $R$ -disjoint かつ一様有界であるときをいう.

**注意 3.3.**  $n \in \omega$  に対し, 距離空間  $X$  が  $\text{asdim} X \leq n$  を満たすことと, 任意の  $R > 0$  に対して  $X$  の scale- $R$ -dimension が  $n$  以下であることは同値である.

**定義 3.4** ([5, Definitions 5.1, 5.6 and 5.13]).  $X$  を距離空間,  $\alpha_0 \in \mathbb{N}$  とし,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  を単調非減少関数とする. このとき, 組  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  が  $X$  の **APD プロファイル (APD profile)** であるとは,  $r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_k$  を満たす任意の  $(r_0, r_1, \dots, r_k) \in [0, \infty)^{k+1}$  に対し,  $X$  の被覆  $\{X_i\}_{i=0}^k$  が存在して,  $X_0$  の scale- $r_0$ -dimension が  $\alpha_0 - 1$  以下であり, かつ各  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  に対して  $X_i$  の scale- $r_i$ -

dimension が  $\alpha_i(r_{i-1}) - 1$  以下であるときをいう. 特に  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  が  $\mathbb{N}$  から  $\mathbb{N}$  への関数であるとき, 組  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  を  $X$  の**整数 APD プロファイル (integral APD profile)** という. また, 距離空間  $X$  が APD プロファイルをもつとき,  $X$  は**漸近的性質 D (asymptotic property D)** をもつという.

**注意 3.5** ([5, Proposition 5.7]). 距離空間  $X$  が APD プロファイルをもつことと整数 APD プロファイルをもつことは同値である.

**注意 3.6.** 距離空間  $X$  に対し,  $\text{asdim } X \leq n$  であることと  $n+1$  のみからなる組  $(n+1)$  が  $X$  の整数 APD プロファイルであることは同値である.

**定理 3.7** ([5, Proposition 5.14]). 漸近的性質 D をもつ距離空間は, 漸近的性質 C をもつ.

定理 3.1 について Dydak [5] は次を証明した.

**定理 3.8** (cf. [5, Theorem 6.3]). 各  $i \in \mathbb{N}$  に対して  $G_i$  が漸近次元有限な可算群ならば, ある単調非減少関数  $\alpha_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  が存在して,  $(1, \alpha_1)$  は  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i$  の整数 APD プロファイルである. 従って  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i$  は漸近的性質 D をもつ.

## 4 APD プロファイルと超限漸近次元

定理 3.7 に関して Dydak [5] は次の問題を提起した.

**問題 4.1** ([5, Question 5.15]). 漸近的性質 C をもち漸近的性質 D をもたない距離空間は存在するか.

Orzechowski [11] は, APD プロファイルと超限漸近次元を関連付ける次の定理を証明し, 問題 4.1 を肯定的に解決した.

**定理 4.2** ([11, Theorem 4.4]).  $X$  を距離空間とし,  $m \in \mathbb{N}, n \in \omega$  とする. このとき, ある単調非減少関数  $\alpha_1, \dots, \alpha_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  が存在して  $(n+1, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  が  $X$  の整数 APD プロファイルならば,  $\text{trasdim } X \leq \omega \cdot m + n$  である. 特に,  $X$  が漸近的性質 D をもつならば,  $\text{trasdim } X < \omega \cdot \omega$  である.

定理 2.19 より,  $\text{trasdim } X_{\omega \cdot \omega} = \omega \cdot \omega$  を満たす距離空間  $X_{\omega \cdot \omega}$  が存在する. このとき定理 2.15 より  $X_{\omega \cdot \omega}$  は漸近的性質 C をもつが, 定理 4.2 より  $X_{\omega \cdot \omega}$  は漸近的性質 D をもたない.

また, 定理 3.8 と 4.2 より次が成り立つ.

**系 4.3.** 各  $i \in \mathbb{N}$  に対して  $G_i$  が漸近次元有限な可算群ならば,  $\text{trdim} \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i \leq \omega$  である.

定理 4.2 に関して, Orzechowski [11] は次の問題を提起した.

**問題 4.4** ([11, Question 4.6]).  $\text{trdim} X < \omega \cdot \omega$  を満たし漸近的性質 D をもたない距離空間  $X$  は存在するか.

この問題に対して次が成り立つ.

**定理 4.5** ([17, Theorem 1.3]).  $X$  を距離空間とし,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \omega$  とする. このとき,  $\text{trdim} X \leq \omega \cdot m + n$  ならば, ある単調非減少関数  $\alpha_1, \dots, \alpha_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  が存在して  $(n+1, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  は  $X$  の整数 APD プロファイルである. 特に,  $\text{trdim} X < \omega \cdot \omega$  ならば,  $X$  は漸近的性質 D をもつ.

定理 4.2 と 4.5 より次を得る.

**系 4.6.**  $X$  を距離空間とし,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \omega$  とする. このとき, ある単調非減少関数  $\alpha_1, \dots, \alpha_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  が存在して  $(n+1, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  が  $X$  の整数 APD プロファイルであることと,  $\text{trdim} X \leq \omega \cdot m + n$  であることは同値である. 特に,  $X$  が漸近的性質 D をもつための必要十分条件は  $\text{trdim} X < \omega \cdot \omega$  を満たすことである.

## 参考文献

- [1] P. Borst, *Classification of weakly infinite-dimensional spaces. I. A transfinite extension of the covering dimension*, Fund. Math. **130** (1988), no. 1, 1–25.
- [2] P. Borst, *Some remarks concerning C-spaces*, Topology Appl. **154** (2007), no. 3, 665–674.
- [3] T. Davila *On asymptotic property C*, arXiv:1611.05988v1 (2016).
- [4] A. Dranishnikov, *Asymptotic Topology*, Russian Math. Surveys **55** (2000), 1085–1129.
- [5] J. Dydak, *Matrix algebra of sets and variants of decomposition complexity*, Rev. Mat. Complut. **33**, (2020), 373–388.
- [6] R. Engelking, *Theory of dimensions, finite and infinite*, Sigma Series in Pure



- Mathematics, 10, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.
- [7] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [8] W. E. Haver, *A covering property for metric spaces*, Topology Conference (Virginia Polytech. Inst. and State Univ., Blacksburg, Va., 1973), pp. 108–113, Lecture Notes in Math., Vol. 375, Springer, Berlin, 1974.
- [9] P. Nowak and G. Yu, *Large scale geometry*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, Zürich, 2012.
- [10] P. A. Ostrand, *Dimension of metric spaces and Hilbert’s problem 13*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 619–622.
- [11] K. Orzechowski, *APD profiles and transfinite asymptotic dimension*, Topology Appl. **283** (2020), Paper No. 107394, 6pp.
- [12] T. Radul, *On universal spaces and absorbing sets related to a transfinite extension of covering dimension*, Topology Appl. **154** (2007), 1794–1798.
- [13] T. Radul, *On transfinite extension of asymptotic dimension*, Topology Appl. **157** (2010), 2292–2296.
- [14] Y. Wu and J. Zhu, *Classification of metric spaces with infinite asymptotic dimension*, Topology Appl. **238** (2018), 90–101.
- [15] Y. Wu and J. Zhu, *Asymptotic property  $C$  of the wreath product  $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$* , arXiv:1607.07599v4 (2020).
- [16] Y. Wu, J. Zhu and T. Radul, *On metric spaces with given transfinite asymptotic dimensions*, arXiv:2007.07416v2 (2020).
- [17] T. Yamauchi, *Transfinite asymptotic dimension and APD profiles*, Topology Appl. **295** (2021), Paper No. 107675, 7pp.
- [18] G. Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), 201–204.