Boundedness of bundle diffeomorphism groups over a circle

京都工芸繊維大学・基盤科学系　　矢ヶ崎 達彦

Tatsuhiko Yagasaki

Faculty of Arts and Sciences

Kyoto Institute of Technology

1. Introduction

この論説では，ファイバー束の微分同相の成す群の有界性に関して 福井和彦 氏 との共同研究 において得られた結果のうち，興味ある重要例として，円周上のファイバー束の場合の結果を解説する [9].

微分同相群 (の単位連結成分) の有界性に関する研究では，閉多様体の微分同相群の一様完全性・一様単純性 に関して，D. Burago, S. Ivanov, L. Polterovich [3] (2008) による 群の 交換子長 や 共役生成ノルム に関する一般的な考察 と 3 次元閉多様体の微分同相群の一様完全性 に関する結果に続き，坪井先生の一連の論文 [14, 15, 16] (2008 - 2012) により，閉多様体 (次元 $\neq 2, 4$) の微分同相群の 一様完全性・一様単純性 に関する包括的な結果が得られている．また，向き付け可能な種数 ≥ 2 の閉曲面の微分同相群は一様完全でないことも知られている．さらに，坪井先生の議論を拡張して，境界を持つコンパクト多様体や 開多様体の微分同相群の 一様完全性・一様単純性 に関する結果が 福井, T. Rybicki 及び 筆者 の共同研究 [8] において得られている.

定理. ([8]) M を n 次元 連結 多様体 $(n \neq 2, 4)$ とし，$1 \leq r \leq \infty$, $r \neq n+1$ とする.

(1) M が コンパクト多様体 のとき，$\mathrm{Diff}^r(M, \partial)_0$ は 一様単純 となる.

- $n = 2m+1$ $(m \geq 0)$ のときには $cld\,\mathrm{Diff}^r(M, \partial)_0 \leq 4$ となる.

(2) M が 開多様体 のとき，次の各場合に

$\mathrm{Diff}^r(M)_0$ は 有界, 一様完全 かつ $\mathrm{Diff}^r_c(M)_0$ は 一様単純 となる.

(i) $n = 2m+1$ $(m \geq 0)$.

- このとき，$cld\,\mathrm{Diff}^r(M)_0 \leq 8$ かつ $cld\,\mathrm{Diff}^r_c(M)_0 \leq 4$ となる.

(ii) $n = 2m$ $(m \geq 3)$ で M が 次の条件の 1 つを満たす.

(a) M は n 次元 閉多様体 上の 被覆多様体 である.

(b) M は有限個の n 次元 コンパクト 多様体 の 適当な整合性をもつ (分枝を許す) 無限境界和 である.

微分同相群については，特に 高次元において 微分同相 や イソトピー の変形に制約が少ないことで，上の様な肯定的な結果が得られているが，多様体上で与えられた構造を保つ微分同相 の成す部分群においては，微分同相の変形は必ずしも可能ではない．その中で，BIP や 坪井先生 の議論が拡張できる 対象として ファイバー束の微分同相の成す群 が挙げられる．これらの微分同相群の (一様) 完全性 については，Lie 群の自由作用の下での同変微分同相群の場合が，阿部 - 福井 [1, 7] や J. Lech, I. Michalik and T. Rybicki [11] 等により考察されており，また，関連して，葉層を保つ微分同相の成す群 の場合に，坪井, T. Rybicki, 福井 等による研究 [6, 12, 13] がある．

ファイバー束の微分同相群 については，ファイバー方向にはファイバー束の構造群から定まる構造を保つための変形に関する制約が生じるが，底空間方向には制限が無いため，この底空間方向において 坪井先生の議論 が適用できることになる．この一般的な結果に関する紹介は次の機会とし，今回は 興味深い例として 底空間 が 円周 の場合について議論する [9]．この場合，底空間は単純な空間であるが，この 1 次元性により，ファイバー束におけるファイバーの捻りの効果が直接反映して，ファイバー束の接着写像が (連続変形を除いて) 非周期的であれば，ファイバー束の微分同相群は非有界になることがわかる．

2. 相対的 一様単純性 と 擬準同型

微分同相群とは異なり，ファイバー束 $\pi : M \to B$ の 微分同相群 $\mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0$ は単純群にならない．実際，各 $f \in \mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0$ は 底空間の微分同相 $\underline{f} \in \mathrm{Diff}^r(B)_0$ を定め，これにより定義される 群準同型 $P : \mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0 \to \mathrm{Diff}^r(B)_0$, $P(f) = \underline{f}$, の 核 $\mathrm{Ker}\, P$ は $\mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0$ の 非自明な正規部分群を与える．このとき，さらに考察を続けると，$\mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0$ は $\mathrm{Ker}\, P$ に関して 以下で説明する意味において相対的に単純 になることがわかる．この節では，相対的な一様単純性 の概念の導入 及び 擬準同型に関する基本事項の整理を行う．

2.1. 共役生成ノルム と 相対的 一様単純性.

群 Γ において，拡張された 共役不変ノルム の 1 つの標準的な構成法 が次で与えられる：S を Γ の部分集合で，対称 ($S = S^{-1}$) かつ 共役不変 ($gSg^{-1} = S$ ($^\forall g \in \Gamma$)) とする．このとき，S で生成される Γ の正規部分群 $N(S)$ について $N(S) = \bigcup_{k=0}^{\infty} S^k$ が成り立つ．したがって，拡張された 共役不変ノルム $q_{(\Gamma,S)} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ を 次で定義することができる:

$$q_{(\Gamma,S)}(g) := \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid g = g_1 \cdots g_k \text{ for some } g_1, \cdots, g_k \in S\} & (g \in N(S)), \\ \infty \quad (g \in \Gamma - N(S)). \end{cases}$$

一般に，拡張された 共役不変ノルム q に対して，記号 $qd\,\Gamma$ は Γ の q に関する直径 $qd\,\Gamma := \sup\{q(g) \mid g \in \Gamma\}$ を表す．

各元 $g \in \Gamma$ に対して，共役生成ノルム ζ_g は次で定義される．元 g の 共役類を $C(g)$ で表し，$C_g := C(g) \cup C(g^{-1})$ とおく．$N(g) = N(C_g)$ であり，C_g は Γ において 対称 かつ 共役不変 であるから，Γ 上の 拡張された共役不変ノルム $q_{(\Gamma, C_g)}$ が定義される．このノルムを ζ_g で表し，g に関する 共役生成ノルム と呼ぶ．$\Gamma^\times := \Gamma - \{e\}$ とおく．群 Γ が 一様単純 であるとは，ζ_g $(g \in \Gamma^\times)$ が 一様有界 であること，すなわち，ある $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって，任意の $f, g \in \Gamma$, $g \neq e$ に対して，f は g あるいは g^{-1} の共役元 の 高々 k 個 の積としてかける ことである. 一様単純群 は 単純である．さらに，ある $g \in \Gamma^\times$ に対して ζ_g が有界ならば，Γ は有界である．実際，もし $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ かつ $\zeta_g \leq k$ ならば，Γ 上の 任意の 拡張された 共役不変ノルム q に対して $q \leq kq(g)$ が成り立つ．この様な考察から，次の様な条件を導入することは自然である．N を Γ の 正規部分群 とする．

定義． Γ が N に関して相対的に 一様単純 (uniformly simple relative to N) であるとは ζ_g $(g \in \Gamma - N)$ が 一様有界 となることである．

群 Γ が N に関して相対的に 一様単純 のとき, Γ の 任意の正規部分群 L に関して，$L \subset N$ or $L = \Gamma$ が成り立つ．

2.2. **擬準同型.**

この節では 群の非有界性 を判定する際に必要となる 擬準同型 に関する基本事項を整理する．群 Γ 上の関数 $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ は 次の条件を満たすとき 擬準同型 (quasimorphism) と呼ばれる．

$$D_\varphi := \sup_{a,b \in \Gamma} |\varphi(ab) - \varphi(a) - \varphi(b)| < \infty.$$

擬準同型 φ が さらに 次の条件を満たすとき，φ は 斉次 であると言う．

$$\varphi(a^n) = n\varphi(a) \quad (\forall\, a \in \Gamma, \forall\, n \in \mathbb{Z})$$

(1) φ が Γ 上の 擬準同型 のとき，関数 $\overline{\varphi} : \Gamma \to \mathbb{R}$: $\overline{\varphi}(a) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\varphi(a^n)}{n}$ は 斉次 擬準同型 となり $|\varphi(a) - \overline{\varphi}(a)| \leq D_\varphi \quad (a \in \Gamma)$ が成り立つ．

(2) φ が Γ 上の 斉次 擬準同型 のとき，次が成り立つ．

- (i) φ は 共役不変 である (i.e., $\varphi(aba^{-1}) = \varphi(b)$ $(\forall a, b \in \Gamma)$).
- (ii) (a) $\sup\limits_{a,b \in \Gamma} |\varphi([a,b])| = D_\varphi$ (b) $\ell := cld\,\Gamma < \infty \implies |\varphi| \leq (2\ell - 1)D_\varphi$
- (iii) 任意の $D \geq D_\varphi$ (かつ $D > 0$) をとり，次の関数 q を考える．

$$q : \Gamma \to [0, \infty) : \quad q(a) := \begin{cases} |\varphi(a)| + D & (a \in \Gamma^\times) \\ 0 & (a = e) \end{cases}$$

q は Γ 上の 共役不変ノルム となり，q : 有界 $\iff$ φ : 有界 が成り立つ．

(3) Γ が 非有界 擬準同型 を持てば，Γ は 非一様完全 かつ 非有界 である．

3. ファイバー束の微分同相群

3.1. 一般的な定義.

この論説では，ファイバー束における構造群は次の意味で用いられる．N を C^∞ 多様体とし，Γ を N の 微分同相群 $\mathrm{Diff}^\infty(N)$ の部分群とする．ファイバー N を持つ C^∞ 局所自明束 $\pi : M \to B$ に対して，π の Γ-atlas とは，π の局所自明化 の族 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ で次の条件を満たすものを意味する．

$$B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \quad \text{かつ} \quad (\varphi_\mu)_q(\varphi_\lambda)_q{}^{-1} \in \Gamma \quad (\forall\, \lambda, \mu \in \Lambda,\ \forall\, q \in U_\lambda \cap U_\mu).$$

ここで　$\varphi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \xrightarrow{\cong} U_\lambda \times N$, $\mathrm{pr}_{U_\lambda}\varphi_\lambda = \pi|_{\pi^{-1}(U_\lambda)}$,　$(\varphi_\lambda)_q : \pi^{-1}(q) \cong N$　である．ファイバー N，構造群 Γ を持つ ファイバー束 (or (N, Γ) ファイバー束) とは，ファイバー N を持つ C^∞ 局所自明束 $\pi : M \to B$ で 極大 Γ-atlas $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を付与されたものである．この 極大 Γ-atlas に属する局所自明化 を このファイバー束の局所自明化 と呼ぶ．各 $q \in B$ に対して, 族 $\Gamma_{\pi,q} := \{(\varphi_\lambda)_q \mid \lambda \in \Lambda, q \in U_\lambda\}$ は，ファイバー $\pi^{-1}(q)$ 上の (N, Γ)-構造 を定めている．

以下，$\pi : M \to B$ を ファイバー N，構造群 Γ を持つ C^∞ ファイバー束 とし，$r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ とする．π 上の C^r 微分同相 とは $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ で 次の条件を満たすものを意味する．

(i)　$\pi' f = \underline{f}\,\pi$ for some $\underline{f} \in \mathrm{Diff}^r(B)$,

(ii)　$(\varphi_\mu)_{\overline{f}(q)}\, f_q\, (\varphi_\lambda)_q^{-1} \in \Gamma$　$(\forall\, \lambda, \mu \in \Lambda,\ \forall\, q \in U_\lambda \cap \underline{f}^{-1}(U_\mu)$.

ここで，$f_q : \pi^{-1}(q) \cong \pi^{-1}(\underline{f}(q))$ は 条件 (i) より定まる ファイバーの間の C^r 微分同相 である．記号 $\mathrm{Diff}^r_\pi(M)$ で π 上の C^r 微分同相 全体の成す群を表す．

また，π 上の C^r イソトピー とは M 上の C^r イソトピー $F : M \times [0, 1] \to M$ であって $F_t \in \mathrm{Diff}^r_\pi(M)$ $(t \in [0, 1])$ となるものを意味する．記号 $\mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0$ は，π 上の C^r イソトピー F で $F_0 = \mathrm{id}_M$ となるもの全体の成す群を表す．このような設定では，$\mathrm{Diff}^r_\pi(M)$ における id_M の連結成分は (位相を用いずに) $\mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0 = \{F_1 \mid F \in \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0\}$ と定義される．定義より 写像 $R : \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0 \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0$, $R(F) = F_1$ は 全射 な 群準同型 であり，その核は次で与えられる: $\mathrm{Ker}\, R = \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_{\mathrm{id},\mathrm{id}} := \{F \in \mathrm{Isot}^r_\pi(M) \mid F_0 = F_1 = \mathrm{id}_M\}$.

各 $F \in \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0$ は $\underline{F} = (\underline{F_t})_{t\in[0,1]} \in \mathrm{Isot}^r(B)_0$ を定め，ファイバー束における イソトピー の持ち上げ 定理 により，次の写像は 全射 な 群準同型 となる．

$$P : \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0 \longrightarrow \mathrm{Isot}^r(B)_0,\ P(F) = \underline{F}, \qquad P : \mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0 \to \mathrm{Diff}^r(B)_0,\ P(f) = \underline{f}.$$

必要に応じて イソトピー や 微分同相 の台を制限したい場合には，次の記号を用いる．

$C \subset B$ に対して　$\mathrm{Isot}^r_\pi(M, \mathrm{Supp}(C))_0 := \{F \in \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0 \mid F : (\natural)\}$:

($\natural$)　$\mathrm{Supp}\, F \subset \pi^{-1}(D)$ for some closed subset D of B with $D \subset \mathrm{Int}_B C$.

さらに，微分同相群については $\mathrm{Diff}^r_\pi(M, \mathrm{Supp}(C))_0 = R(\mathrm{Isot}^r_\pi(M, \mathrm{Supp}(C))_0)$ とおく．

3.2. 球体に台を持つ 交換子長.

微分同相群に対しては，球体に台を持つ交換子 を用いた 交換子長 を定義することができ，共役生成ノルム の評価に有効であった．その ファイバー束版 は，次の様に定義される．記号 $\mathcal{B}^r(B)$ で B の中の 余次元 0 の C^r 球体 全体の集合を表す．各 $D \in \mathcal{B}^r(B)$ に対して $\quad \mathrm{Diff}^r_\pi(M;\mathrm{Supp}(D))^c_0 := \{[a,b] \mid a,b \in \mathrm{Diff}^r_\pi(M;\mathrm{Supp}(D))_0\} \quad$ とおき，
各元 $[a,b]$ を D に台を持つ交換子と呼ぶ．$\mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0$ の部分集合

$$\mathcal{S}^r_\pi := \bigcup \left\{\mathrm{Diff}^r_\pi(M;\mathrm{Supp}(D))^c_0 \mid D \in \mathcal{B}^r(B)\right\}$$

は，対称 かつ 共役不変 だから，§2.1 で述べた構成法により $\mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0$ 上の 拡張された 共役不変ノルム が定義される．これを 記号 clb_π で表し，球体に台を持つ 交換子長 と呼ぶ．微分同相群の場合の議論の拡張として，次の命題が成り立つ．

命題.

(1) $\zeta_g \leq 4\, clb_\pi \ \text{ in } \mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0 \qquad (\forall\, g \in \mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0 - \mathrm{Ker}\, P)$

(2) $clb_\pi d\ \mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0 < \infty \implies \mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0 : \mathrm{Ker}\, P$ に対して相対的に 一様単純

4. 円周上の バンドル 微分同相群

4.1. 円周上の winding number.

円周 S^1 上で 被覆変換群 $\mathbb{Z}$ を持つ 普遍被覆 $\pi_{S^1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ をとる．$\mathcal{P}(S^1)$ で S^1 上の連続な道 $c : [0,1] \to S^1$ 全体の集合を表す．以後，簡単のため，$I = [0,1]$ とおく．道 $c \in \mathcal{P}(S^1)$ の winding number は次で定義される．

$$\lambda : \mathcal{P}(S^1) \longrightarrow \mathbb{R} : \ \lambda(c) := \widetilde{c}(1) - \widetilde{c}(0)$$

(ただし，$\widetilde{c} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ は π の下での c の 任意のリフト である.)

$\pi : M \to S^1$ を ファイバー N，構造群 Γ を持つ C^∞ ファイバー束 とし，$r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ とする．点 $p \in S^1$ を固定する．各 $F \in \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0$ は $\underline{F} \in \mathrm{Isot}^r(B)_0$ を定め，道 $\underline{F}_p := \underline{F}(p,*) \in \mathcal{P}(S^1)$ を得る．これにより，次の関数が定義される．

$$\nu : \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0 \longrightarrow \mathbb{R} : \ \nu(F) = \lambda(\underline{F}_p)$$

$\nu(F)$ は イソトピー F の下での ファイバー $\pi^{-1}(p)$ の winding number を測っている．

関数 ν は 次の性質を持つ．

補題. $\nu(HG) = \nu(H_0G) + \nu(HG_1) = \nu(HG_0) + \nu(H_1G) \quad (\forall\, G,H \in \mathrm{Isot}^r_\pi(M))$

(1) $\nu(HG) = \nu(H) + \nu(G) \qquad (\forall\, H \in \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0,\ \forall\, G \in \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_{\mathrm{id,id}})$

$\nu(F\, \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_{\mathrm{id,id}}) = \nu(F) + \nu(\mathrm{Isot}^r_\pi(M)_{\mathrm{id,id}}) \qquad (\forall\, F \in \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0)$

(2) $|\nu(HG) - \nu(G) - \nu(H)| < 1 \quad (\forall\, G,H \in \mathrm{Isot}^0_\pi(M)_0)$

命題・定義.

(1) 関数 $\nu : \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ は 全射 擬準同型 である.

(2) ν の 部分群 $\mathrm{Isot}^r_\pi(M)_{\mathrm{id,id}}$ への制限は $\mathbb{Z}$ に値を持つ群準同型 となる.

(i) $\nu(\mathrm{Isot}^r_\pi(M)_{\mathrm{id,id}}) = k\mathbb{Z}$ を満たす $k = k(\pi, r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が一意に定まる.

(ii) $\nu : \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_{\mathrm{id,id}} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow k\mathbb{Z}$: 全射 群準同型

(3) 次の 完全列 を考える.

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_{\mathrm{id,id}} \subset \underset{F}{\mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0} \xrightarrow{R} \underset{F_1}{\mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0} \longrightarrow 0$$

$(\mathbb{R}_k, \mathbb{Z}_k) := (\mathbb{R}/k\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ とおくと，補題 (1) より 次の関数が得られる.

$$\widehat{\nu} : \mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0 \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}_k, \quad \widehat{\nu}(F_1) = [\nu(F)] \quad (F \in \mathrm{Isot}^r_\pi(M)_0)$$

(4) 関数 $\widehat{\nu}$ は，さらに次の関数を定める.

(i) $\widehat{\nu}|_{\mathrm{Ker}\,P} : \mathrm{Ker}\,P \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{Z}_k$: 群準同型

(ii) $(\widehat{\nu}|_{\mathrm{Ker}\,P})^\sim : (\mathrm{Ker}\,P)\big/(\mathrm{Ker}\,P)_0 \;\cong\; \mathbb{Z}_k$: 群同型

4.2. **主要定理.**

$\mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0$ の 有界性 に関して，$k \geq 1$ の場合 と $k = 0$ の場合では，まったく逆の結果になることがわかる.

[1] $k \geq 1$ **の場合**

(N, Γ, r) に関して次の条件を考える.

仮定 $(*)$ $\varrho : L \to \mathbb{R}$ が ファイバー N, 構造群 Γ を持つ 自明 な ファイバー束 ならば $\mathrm{Diff}^r_{\varrho,c}(L)_0$ は 完全群 になる.

例. $r \geq 1, r \neq 2$ のとき，主束 や 局所自明束 は この仮定を満たすことが知られている.

定理 1. $k \equiv k(\pi, r) \geq 1$ とし，(N, Γ, r) が 仮定 $(*)$ を満たすとする．このとき，次が成り立つ.

(1) $f \in \mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0,\ \widehat{\nu}(f) = [s] \in \mathbb{R}_k \ \ \big(s \in \big(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\big]\big) \implies clb_\pi f \leq 2[|s|] + 3 \leq k + 3$

(2) $clb_\pi d\,\mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0 \leq k + 3$.

(3) (i) $\mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0$ は $\mathrm{Ker}\,P$ に対して相対的に 一様単純 である.

(ii) $\mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0$ は 有界 である.

[2] $k = 0$ **の場合**

この場合，$(\mathbb{R}_k, \mathbb{Z}_k) = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ なので，§4.1 の命題 (3) より 次の結果 を得る.

定理 2. $k \equiv k(\pi, r) = 0$ のとき，次が成り立つ．

(1) $\widehat{\nu} : \mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0 \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ は 全射 擬準同型 である．

$\widehat{\nu} : \mathrm{Ker}\, P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ は 全射 群準同型 である．

(2) $\mathrm{Diff}^r_\pi(M)_0$ は 非有界 かつ 非一様完全 である．

4.3. **Attaching map.**

ファイバー N, 構造群 Γ を持つ ファイバー束 $\pi : M \to S^1$ は ある attaching map $\varphi \in \Gamma < \mathrm{Diff}^\infty(N)$ を用いて a mapping torus $\pi_\varphi : M_\varphi \to S^1$ として表される．このとき，次が成り立つ．

命題. $k = k(\pi_\varphi, r) \implies \varphi^k \simeq \mathrm{id}_N$ (a C^r isotopy)

これを用いて $k = 0$ となる例が得られる．

例. $N = T^2 \equiv \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (a torus) の場合：

各 $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ は 線形微分同相 $\varphi_A \in \mathrm{Diff}^\infty(N)$ を定める．

A として $A^n \neq E_2$ $(n \in \mathbb{Z} - \{0\})$ となるものを選べば，$k(\pi_{\varphi_A}, r) = 0$ となる．

一方，Γ が コンパクト Lie 群 の場合，任意の 主 Γ 束 $\pi : M \to S^1$ について $k(\pi, r) \geq 1$ となることがわかる．

References

[1] K. Abe and K. Fukui, *On commutators of equivariant diffeomorphisms*, Proc. Japan Acad., **54** (1978), 52-54.

[2] A. Banyaga, *The structure of classical diffeomorphisms*, Kluwer Akademic Publisher, Dordrecht, 1997.

[3] D. Burago, S. Ivanov and L. Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geomatric origin*, Advanced Studies in Pure Math. 52, (2008), Groups of diffeomorphisms, 221-250.

[4] D. B. A. Epstein, *The simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Compositio Math., **22** (1970), 165-173.

[5] K. Fujiwara, *Quasi-homomorphisms on mapping class groups*, Handbook of Teichmüller theory. Vol. II, 241-269, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 13, Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.

[6] K. Fukui, *Commutator length of leaf preserving diffeomorphisms*, Publ. Res. Inst. Math. Soc. Kyoto Univ., **48-3**, (2012), 615-622.

[7] K. Fukui, *On the uniform perfectness of equivariant diffeomorphism groups for principal G manifolds*, Opuscula Math. **37,3** (2017), 381-388.

[8] K. Fukui, T. Rybicki, T. Yagasaki, *The uniform perfectness of diffeomorphism groups of open manifolds*, arXiv math: 1905.07664.

[9] K. Fukui and T. Yagasaki, *Boundedness of bundle diffeomorphism groups over a circle*, preprint.

[10] J. M. Gambaudo and É. Ghys, Commutators and diffeomorphisms of surfaces, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **24-5** (1980), 1591-1617

[11] J. Lech, I. Michalik and T. Rybicki, *On the boundedness of equivariant homeomorphism groups*, Opuscula Math., **38-3** (2018), 395-408.

[12] T. Rybicki, *The identity component of the leaf preserving diffeomorphism group is perfect*, Monatsh. Math, **120 3-4** (1995), 289-305.

[13] T. Tsuboi, *On the group of foliation preserving diffeomorphisms*, Foliations 2005, ed. by P.Walczak et al., World scientific, Singapore, (2006), 411-430.

[14] T. Tsuboi, *On the uniform perfectness of diffeomorphism groups*, Advanced Studies in Pure Math. 52, (2008), Groups of diffeomorphisms, 505-524.

[15] T. Tsuboi, *On the uniform simplicity of diffeomorphism groups*, In Differential Geometry, World scientific Publ., Hackensack, N.J., , (2009), 43-55.

[16] T. Tsuboi, *On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphism groups of even-dimensional manifolds*, Comm. Math. Helv., **87**(2012), 141-185.