単調正規空間と特殊な空間の積の extent について

神奈川大学・工学部　平田　康史[*1]
Yasushi Hirata
Faculty of Engineering, Kanagawa University

神奈川大学，数学アートラボ　矢島　幸信
Yukinobu Yajima
Kanagawa University, Math Art Laboratory

1　はじめに

空間は正則な T_1-位相空間とする。最小の無限基数, 非可算基数をそれぞれ ω, ω_1 であらわす。無限基数 κ より大きい最小の基数を κ^+ であらわす。

空間 X の部分集合 D が**閉離散** (**closed discrete**) であるとは, X の各点が, D の点を高々 1 つしか含まないような近傍をもつことである。空間 X の **extent** とは,

X の任意の閉離散部分集合 D に対して, $|D| \leq \kappa$

という条件を満たす最小の無限基数 κ のことで, それを $e(X)$ であらわす。明らかに,

事実 1.1 (folklore)**.** 空間 X が可算コンパクトかリンデレーフならば, $e(X) = \omega$ である。

今後, $e(X)$ を考えるときは, 空間 X は空でないことを常に仮定しているものとする。従って, 不等式 $e(X) \cdot e(Y) \leq e(X \times Y)$ はいつも成り立っている。

疑問 1.2. どのような積空間 $X \times Y$ に対して, 等式 $e(X) \cdot e(Y) = e(X \times Y)$, あるいは, 不等式 $e(X) \cdot e(Y) < e(X \times Y)$ が成り立つか?

距離空間 M に対しては, extent $e(M)$ は weight $w(M)$ と一致するので, X, Y が距離

[*1] 本研究は科研費 (課題番号:19K03606) の助成を受けたものである.

空間ならば, 等式 $e(X)\cdot e(Y)=w(X)\cdot w(Y)=w(X\times Y)=e(X\times Y)$ が成り立つ。

任意の空間 X とコンパクト空間 K の積空間については, $e(X\times K)=e(X)$ であることがよく知られている。 従って, この場合も等式 $e(X)\cdot e(K)=e(X\times K)$ が成り立つ。

一方, リンデレーフ空間の積ではこのような等式が成り立たない例がある。例えば, Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ はリンデレーフであるが, よく知られているようにその積空間 $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ には連続体濃度の閉離散部分集合 $\{(r,-r):r\in\mathbb{S}\}$ があるので,

事実 1.3 (folklore)**.** Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ に対して, 不等式 $e(\mathbb{S})\cdot e(\mathbb{S})=\omega<2^{\omega}=e(\mathbb{S}\times\mathbb{S})$ が成り立つ。

可算コンパクト空間の積でも, extent の等式が成り立たない例が存在する。Novák の例 [9] ([2, Example 3.10.19] 参照) を modify することで, 次のような例を作ることができることを大田は指摘した。

事実 1.4 ([11])**.** 可算コンパクト Tychonoff 空間 X, Y の積空間 $X\times Y$ で, β-空間ではなく, $e(X\times Y)>\omega$ となるものが存在する。

2　順序数の部分空間の積の extent

積空間 $X\times Y$ における**長方形** (**rectangle**) とは, X の部分集合 E と, Y の部分集合 F の積の形をしているような $X\times Y$ の部分集合 $E\times F$ のことである。

順序数の部分空間の積空間の extent について, 2020 年に次のような結果を得た。

定理 2.1 ([4])**.** A, B は順序数の部分空間とする。

(1) $A\times B$ が可算パラコンパクトならば,
　(∗) $A\times B$ の任意の空でない閉長方形 $A'\times B'$ に対して, $e(A'\times B')=e(A')\cdot e(B')$ が成り立つ。

(2) (1) の逆が成り立つ (つまり, 条件 (∗) を満たす順序数の任意の部分空間 A, B の積 $A\times B$ は可算パラコンパクトである) ためには, 弱到達不可能基数が存在しないことが必要十分である。

特に,

系 2.2. 順序数の部分空間 A, B の積空間 $A\times B$ が可算パラコンパクトならば, 等式

$e(A \times B) = e(A) \cdot e(B)$ が成り立つ。

積の可算パラコンパクト性を仮定しなければ, 順序数の部分空間の積空間で extent の等式が成り立たない例を作ることができる。

定義 2.3. 空間 Y に非孤立点が高々 1 つしかないとき, Y はほとんど離散 (**almost discrete**) であるという。

例 **2.4.** λ は非可算基数とする。$e(\lambda) = \omega$ である。

(1) $\lambda + 1$ の可算コンパクトな部分空間 A_λ と, リンデレーフな部分空間 B_λ で, 次の不等式を満たすものがある。

$$e(A_\lambda) \cdot e(B_\lambda) = \omega < \lambda = e(A_\lambda \times B_\lambda)$$

(2) ある無限基数 κ に対して, $\lambda = \kappa^+$ であったとすると, $\lambda + 1$ のほとんど離散な部分空間 Y_λ で, 次の不等式を満たすものがある。

$$e(\lambda) \cdot e(Y_\lambda) = \kappa < \lambda = e(\lambda \times Y_\lambda)$$

実際, $\mathrm{Suc} = \{\eta + 1 : \eta < \lambda\}$ として, $A_\lambda = \{\alpha \in \lambda + 1 : \mathrm{cf}\, \alpha = \omega\} \cup \mathrm{Suc}$, $B_\lambda = \{\alpha \in \lambda + 1 : \mathrm{cf}\, \alpha > \omega\} \cup \mathrm{Suc}$, $Y_\lambda = \mathrm{Suc} \cup \{\lambda\}$ のようにとれば, これが条件をみたすものになっている。$\Delta = \{\langle \eta, \eta \rangle : \eta \in \mathrm{Suc}\}$ が $A_\lambda \times B_\lambda$ と $\lambda \times Y_\lambda$ の閉離散部分集合である。

3 ほとんど離散なファクターをもつ積空間の extent

X, Y がリンデレーフ空間ならば $e(X) = e(Y) = \omega$ であるが, 事実 1.3 で見たように, そのような X, Y で $e(X \times Y) = 2^\omega$ となるものが存在する。Shelah はリンデレーフ空間 X, Y で, $e(X \times Y) > 2^\omega$ となるものが存在するかどうかを問い, そのような X, Y の存在が ZFC と無矛盾であることを示した [13]。しかし, ZFC だけでそのような例の存在を証明できるかどうかは未解決である。 リンデレーフ空間以外についても, 次のような問題が考えられる。

疑問 3.1. 基数 κ に対して, $e(X) \cdot e(Y) = \kappa < e(X \times Y)$ となるような空間 X, Y を含むようなクラスがあるとき, そのクラス内のそのような空間 X, Y で, $e(X \times Y)$ はどのくらい大きくとることができるか?

例 2.4 (1) からわかるように, $e(A)\cdot e(B)=\omega$ となる順序数の部分空間 A,B で, $e(A\times B)$ はいくらでも大きくとることができる。一方, (2) では, 1 つのファクターをほとんど離散なものに限定しているが, そこで主張されているのは, $e(A)\cdot e(B)=\kappa$ に対して, $e(A\times B)=\kappa^+$ となるような A,B の存在である。このことから, 次のような疑問が生じる。

疑問 3.2. 空間 X とほとんど離散な空間 Y で, $e(X)\cdot e(Y)=\kappa<\kappa^{++}\le e(X\times Y)$ となるものは存在するか。

疑問 3.3. 順序数の部分空間 A,B で, B はほとんど離散であり, $e(A)\cdot e(B)=\kappa<\kappa^{++}\le e(A\times B)$ となるものは存在するか。

これに対し, ほとんど離散な空間との積空間の extent について, 次のようなことがわかった。

補題 3.4 ([5])**.** $\theta\le\lambda$ は無限基数とする。空間 X に対して, 次の条件 (a) が成り立てば, 条件 (b) も成り立つ。λ が正則基数 (つまり $\mathrm{cf}\,\lambda=\lambda$) ならば, 逆も成り立つ。

(a) X の部分集合 L があって, $|L|=\lambda$ であり, X の各点は, $|P\cap L|<\theta$ となるような近傍 P をもつ。
(b) ほとんど離散な空間 Y があって, ($|Y|=\lambda$ であり), Y には濃度 θ の閉離散部分集合は存在しないが, $X\times Y$ には濃度 λ の閉離散部分集合が存在する。

$\lambda=\theta=\kappa^+$ でこの補題を適用すると, 次の命題が得られる。

命題 3.5 ([5])**.** X は空間, κ は無限基数とする。不等式 $e(X)\cdot e(Y)=\kappa<e(X\times Y)$ を満たすほとんど離散な空間 Y が存在するためには, $e(X)\le\kappa$ であり, かつ, X には濃度 κ^+ の部分集合 L があって, X の各点が $|P\cap L|\le\kappa$ となる近傍 P をもつことが必要十分である。

非可算基数 λ に対して, 濃度 λ の離散空間 $\mathbb{D}_\lambda$ の Čech-Stone コンパクト化 $\beta\mathbb{D}_\lambda$ の部分空間

$$X=\bigcup\{P : P \text{ は } \beta\mathbb{D}_\lambda \text{ の開集合で}, |P\cap\mathbb{D}_\lambda|\le\omega\}$$

をとると, $L=\mathbb{D}_\lambda$ と $\theta=\omega_1$ に対して, 補題 3.4 の条件 (a) が成り立つ。このことから, 次のような例が得られる。

例 3.6 ([5])**.** 任意の非可算基数 λ に対して, 可算コンパクトな Tychonoff 空間 X と,

ほとんど離散な空間 Y で, $e(X) \cdot e(Y) = \omega < \lambda = e(X \times Y)$ となるものが存在する。

この例は, 疑問 3.2 に対する肯定的な答えになっている。一方, 疑問 3.3 では空間を順序数の部分空間に限定しているが, それに対する答えは次節で述べる通り否定的となる。

4　単調正規空間とほとんど離散な空間の積の extent

空間が**単調正規（monotonically normal）**であるとは，交わらない閉集合の組 E, F に対して，ある開集合 $M(E, F)$ が対応して次の条件を満たすことである。

(i) $E \subset M(E, F) \subset \overline{M(E, F)} \subset X \setminus F$,

(ii) もし $E \subset E'$ かつ $F \supset F'$ ならば，$M(E, F) \subset M(E', F')$.

距離空間や一般順序空間が単調正規であることはよく知られている。1992 年に Balogh と Rudin によって証明された画期的な定理は, 単調正規空間の研究を進展させた。

定理 4.1 (Balogh-Rudin の定理 [1])**.** 単調正規空間 X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して, その σ-disjoint な開部分細分 $\mathcal{V}$ と, 正則非可算基数の定常集合 (stationary set) と同相な閉集合からなる離散な族 $\mathcal{D}$ が存在して, $X \setminus \bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{D}$ となる。

Balogh-Rudin の定理と補題 3.4 を応用して, 次のような結果が得られた。

定理 4.2 ([5])**.** X は単調正規空間, κ は無限基数とする。不等式 $e(X) \cdot e(Y) = \kappa < e(X \times Y)$ を満たすほとんど離散な空間 Y が存在するためには, $e(X) \leq \kappa$ であり, かつ, X が κ^+ の定常集合と同相な閉集合をもつことが必要十分である。

定理 4.3 ([5])**.** X は単調正規空間, Y はほとんど離散な空間とする。このとき, 不等式 $e(X \times Y) \leq e(X) \cdot (e(Y)^+)$ が成り立つ。

これは, 疑問 3.3 に対する否定的な答えになっている。一方, これに似た不等式で $e(X \times Y) \leq (e(X)^+) \cdot e(Y)$ は成り立つかというと, 例 2.4 (2) で κ を非可算にとれば, 成り立たない例を簡単に作ることができる。

系 4.4. 単調正規空間 X と, ほとんど離散な空間 Y で, $(e(X)^+) \cdot e(Y) < e(X \times Y)$ となるものが存在する。そのような X, Y を順序数の部分空間としてとることもできる。

5 正規な積空間と長方形的積空間

空間 X の部分集合 U が**コゼロ集合** (**cozero set**) であるとは, X から実数直線 $\mathbb{R}$ への連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ があって, $U = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ となることである。

積空間 $X \times Y$ が**長方形的** (**rectangular**) であるとは, $X \times Y$ の任意の有限コゼロ被覆が, コゼロ長方形からなら σ-局所有限な細分をもつことである。これは, 次元論の文脈から生じた概念であり, 1975 年に Pasynkov は, Tychonoff 空間の積空間 $X \times Y$ が長方形的ならば, $\dim(X \times Y) \leq \dim(X) + \dim(Y)$ が成り立つことを示した [12]。

順序数の部分空間 A, B の積空間 $A \times B$ については, 次のような関係が成り立つことが知られている [8], [7]。

$$\text{正規} \Rightarrow \text{可算パラコンパクト} \Leftrightarrow \text{長方形的}$$

このことと系 2.2 とから, 次のことが直ちに得られる。

系 5.1. 順序数の部分空間 A, B について,

(1) $A \times B$ が正規ならば, $e(A \times B) = e(A) \cdot e(B)$ である,
(2) $A \times B$ が長方形的ならば, $e(A \times B) = e(A) \cdot e(B)$ である。

一般の空間ではどうだろうか?

疑問 5.2. 積空間 $X \times Y$ が正規, かつ/または, 長方形的であるとき, 等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ は成り立つか?

「または」について, 一般的には答えは否定的である。大田は長方形的な積空間で, extent の等式が成り立たないような例を作った。

例 5.3 ([11]; [5] 参照)**.** $X = (\omega_1 + 1)^2 \setminus \{\omega_1\} \times \{\alpha \in \omega_1 : \alpha \text{ は極限順序数 }\}$, $Y = \omega_1$ について, $X \times Y$ は長方形的であるが, $e(X) \cdot e(Y) < e(X \times Y)$ である。

空間 Y に対して次のように定義されるゲーム $G(\mathbb{DC}, Y)$ において, Player I が必勝法をもつとき, Y は **$\mathbb{DC}$-like** であるという。

Player I		E_1		E_2		$\cdots$
Player II	$(F_0 = Y)$		F_1		F_2	$\cdots$

E_i:　F_{i-1} のコンパクト部分集合からなる離散な族の和集合,

F_i:　F_{i-1} の閉部分集合で $E_i \cap F_i = \emptyset$.

$\bigcap_{i\in\omega} F_i = \emptyset$ の場合は Player I の勝ち, それ以外の場合は Player II の勝ち。

このようなゲームは 1975 年に Telgársky により考案され, 研究されたものである [14]。コンパクトな空間やほとんど離散な空間は $\mathbb{DC}$-like である。

$\mathbb{DC}$-like なファクターをもつ積空間については, 疑問 5.2 に対して肯定的な結果が得られた。

定理 5.4 ([5])**.** 空間 X と $\mathbb{DC}$-like な空間 Y の積空間 $X \times Y$ が正規, かつ, 長方形的ならば, 等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つ。

しかし, 一般の場合は未解決である。

問題 5.5 ([5])**.** 積空間 $X \times Y$ が正規, かつ, 長方形的であるとき, 等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ は成り立つか?

単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y の積空間 $X \times Y$ については, 次のような関係が成り立つことがわかっている [3]。

$$\text{長方形的} \Rightarrow \text{正規}$$

このことと定理 5.4 とから, 次のことが直ちに得られる。

系 5.6. 単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y の積空間 $X \times Y$ について, $X \times Y$ が長方形的ならば, $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つ。

一方で, 単調正規空間とほとんど離散な空間の積空間が正規であっても, それが長方形的であるとは限らない [10] ので, 次のような疑問が生じる。

疑問 5.7 ([5])**.** 単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y の積空間 $X \times Y$ について, $X \times Y$ が正規ならば, $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つか?

6　正規な積空間の extent の等式

順序数の部分空間は一般順序空間であるから, 単調正規である。そこで, 疑問 5.7 の X を順序数の部分空間に限定したらどうなるだろうか?

疑問 6.1. 順序数の部分空間 A とほとんど離散な空間 Y の積空間 $A\times Y$ について, $A\times Y$ が正規ならば, $e(A\times Y)=e(A)\cdot e(Y)$ が成り立つか?

これに対する答えは, 肯定的であることがわかった。このことは, もう少し一般化することもできる。距離空間も一般順序空間も単調正規であるが, 前者がパラコンパクトなのに対して, 後者はかならずしもそうではない。実際, 正則非可算基数を全順序位相空間とみなすと, それはパラコンパクトでないことはよく知られている。しかしながら, パラコンパクトより少し弱いオーソコンパクト性については, 一般順序空間でもかならずもつということはよく知られている。念のため, 定義を確認しておく。

空間の開集合族 $\mathcal{U}$ が内部保存 **(interior preserving)** であるとは, その任意の部分族 $\mathcal{U}'$ に対して, $\bigcap\mathcal{U}'$ が開集合になることである。任意の開被覆が内部保存な開細分をもつとき, その空間は**オーソコンパクト (orthocompact)** であるという。

最近の研究で, 次の結果を得ることができた。

定理 6.2 ([6])**.** X はオーソコンパクトな単調正規空間で, Y はほとんど離散な空間とする。$X\times Y$ が正規ならば, $e(X\times Y)=e(X)\cdot e(Y)$ が成り立つ。

また, 系 4.4 のような例で, 積空間 $X\times Y$ が正規なものはとれないということもわかった。この結果は, X がオーソコンパクトでなくても成り立つ。

定理 6.3 ([6])**.** X は単調正規空間で, Y はほとんど離散な空間とする。$X\times Y$ が正規ならば, $e(X\times Y)\leq(e(X)^+)\cdot e(Y)$ が成り立つ。

7　$\mathbb{DC}$-like なファクターをもつ積空間の extent

空間 Y の **tightness** とは,

> Y の任意の部分集合 A と $y\in\mathrm{Cl}_Y A$ に対して, $y\in\mathrm{Cl}_Y T$, $|T|\leq\kappa$ であるような A の部分集合 T が存在する

という条件を満たす最小の無限基数 κ のことで, それを $t(Y)$ であらわす。

ほとんど離散な空間 Y を, 定理 6.2, 6.3 において $\mathbb{DC}$-like な空間 Y に一般化する代わりに, その tightness $t(Y)$ を使って次の結果も得られた。 これには, $X\times Y$ の正規性は不要である。

定理 7.1 ([6])**.** X は単調正規空間で, Y は $\mathbb{DC}$-like な空間とする。このとき, 不等式 $e(X \times Y) \leq (e(X)^{+}) \cdot e(Y) \cdot t(Y)$ が成り立つ。更に, X がオーソコンパクトならば, 不等式 $e(X \times Y) \leq e(X) \cdot e(Y) \cdot t(Y)$ が成り立つ。

8　正規な積空間の extent の不等式

定理 6.2 より, 疑問 6.1 は肯定的な答えをもつ。それでは, 疑問 5.7 もまた肯定的な答えをもつだろうか? 実は, 定理 6.2 におけるオーソコンパクト性の仮定の効力は大きい。ZFC が無矛盾である限り, 「疑問 5.7 が肯定的な答えをもつ」 ということは ZFC から証明することは不可能なのである。われわれは次のような結果を得ることができた。

定理 8.1 ([6])**.** $V = L$ を仮定する。任意の無限基数 κ に対して, $e(X) \cdot e(Y) = \kappa < e(X \times Y)$ となる単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y が存在する。

それでは, $V = L$ の仮定なしで, そのような X, Y の存在を ZFC だけから証明できるかというと, $\kappa = \omega$ に対してはそれもまた不可能であるということがわかった。

定理 8.2 ([6])**.** ZFC が無矛盾ならば, $e(X) \cdot e(Y) = \omega < e(X \times Y)$ となる単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y が存在するかどうかは, ZFC だけでは決定できない。

参考文献

[1] Z. Balogh and M .E. Rudin, *Monotone normality*, Topology Appl. **47** (1992), 115–127.

[2] R. Engelking, *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[3] Y. Hirata, N. Kemoto and Y. Yajima, *Products of monotonically normal spaces with various special factors*, Topology and Appl. **164** (2014), 45–86.

[4] Y. Hirata and Y. Yajima, *A characterization of the countable paracompactness for products of ordinals*, Topology Appl. **282** (2020), 107325 (10 pages).

[5] Y. Hirata and Y. Yajima, *Inequality and equality for the extent of products with a special factor*, Topology Proc. **59** (2022), 223–241.

[6] Y. Hirata and Y. Yajima, *Undecidability for the extent of products of a monotonically normal space and a special factor*, preprint.

[7] N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, *Products of spaces of ordinal numbers*, Topology Appl. **45** (1992), 245–260.

[8] N. Kemoto and Y. Yajima, *Rectangular products with ordinal factors*, Topology Appl. **154** (2007), 758–770.
Math. Ann. **154** (1964), 365–382.

[9] J. Novák, *On the Cartesian product of two compact spaces*, Fund. Math. **40** (1953), 106–112.

[10] H. Ohta, *On normal, non-rectangular products*, Quart. J. Math. **32** (1981), 339–344.
[11] H. Ohta, Private communications.
[12] B. A. Pasynkov, *On the dimension of rectangular products*, Soviet Math. Dokl. **16** (1975), 344–347.
[13] S. Shelah, On some problems in general topology, Contempt. Math. **192**, (1996), 91–101.
[14] R. Telgársky, *Spaces defined by topological games*, Fund. Math. **88** (1975), 193–223.

Faculty of Engineering, Kanagawa University
Yokohama 221-8686, JAPAN
E-mail address: hirata-y@kanagawa-u.ac.jp

Kanagawa University
Yokohama 221-8686, JAPAN
E-mail address: yajimy01@kanagawa-u.ac.jp, mathartlab@gmail.com