Full Projection Property について

島根大学・学術研究院理工学系　松橋　英市
Eiichi MATSUHASHI
Department of Mathematics,
Shimane University

日立インフォメーションエンジニアリング　山中　崇央
Takahiro Yamanaka
Hitachi Information Engineering

1　はじめに

本稿では, 逆写像が連続である upper semi-continuous bonding function をもつ inverse limit (これを generalized inverse limit という) の性質を紹介する．とくに, generalized inverse limit が full projection property を満たすための十分条件を紹介する．これまでの full projection property に関する先行結果は各 factor space が区間の場合において研究されていたものがほとんどである．しかし, 本稿で紹介する full projection property に関する結果は, 各 factor space が特に強い条件を必要とすることはない．2014 年に J.P.Kelly と J.Meddaugh によって示された定理によると, inverse limit が full projection property を満たすことは inverse limit が indecomposable continuum になることと密接な関係がある．その点において, full projection property は重要である．

本稿では [4] において得られたいくつかの結果のうち, full projection property に関する結果を紹介する．とくに，各 factor space が任意のコンパクト距離空間であるという条件の下で, upper semi-continuous bonding function をもつ inverse limit が full projection property を満たすための十分条件を紹介する．また，generalized inverse limit の直積の性質について紹介する．特に, generalized inverse limit の直積

が full projection property を満たすための十分条件を紹介する．さらに, generalized inverse limit の直積と full projection property の関係について自然に考えられる 4 つの問題を説明する．

2　Full projection property について

この章では各 factor space が任意のコンパクト距離空間である条件の下で, upper semi-continuous bonding function をもつ inverse limit が full projection property を満たすための十分条件を紹介する．

2.1　準備と基本的な結果

この節では, 本論文で用いられる定義や必要とする先行結果を紹介する．

定義 2.1.1. X が空でない連結なコンパクト距離空間であるとき, X を *continuum* と呼ぶ.

定義 2.1.2. X をコンパクト距離空間とする．このとき,

$2^X = \{A \subset X \mid \mathrm{A}$ は空でない閉集合である $\}$

とする．このとき 2^X には Hausdorff metric による位相が定義されているものとする．2^X を X の *hyperspace* という.

定義 2.1.3. X, Y をコンパクト距離空間とし, $f : X \to 2^Y$ とする．このとき, X の任意の元 x と $f(x)$ の任意の近傍 V に対して, 任意の $z \in U$ に対して $f(z)$ が V の部分集合となるという条件を満たす x の近傍 U が存在するとき, f は *upper semi-continuous (usc)* であるという.

定義 2.1.4. 任意の自然数 i に対して, X_i をコンパクト距離空間, $f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ を usc とする．このとき, $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を *inverse sequence* といい, 各 X_i を factor space、各 f_i を bonding function という.

また, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \mid$ 任意の自然数 i に対して, $x_i \in f_i(x_{i+1})\}$ を $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ の *inverse limit* という.

例 2.1.5. 任意の自然数 i に対して, $X_i = [0,1]$ とし, $f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ を以下のように定義する.

$$f_i(x) = \begin{cases} \{x\} \ (0 \leq x < 1) \\ X_i \ (x = 1) \end{cases} \qquad (x \in X_{i+1}) \text{ (図 1 参照)}.$$

このとき, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は図 2 のようになる.

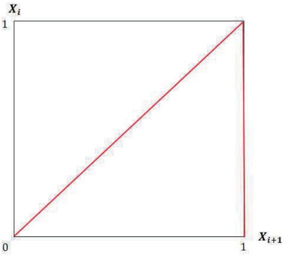

図1　f_i

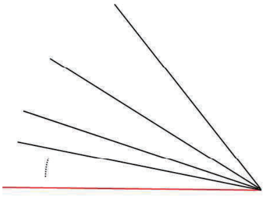

図2　$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$

定義 2.1.6. (X,d) をコンパクト距離空間とし, $A \subset X$ とする. このとき,
$\mathrm{diam}_d A = \sup\{d(x,y) \,|\, x,y \in A\}$ と定義する.

定義 2.1.7. X,Y をコンパクト距離空間とし, $B \subset Y$、$f : X \to 2^Y$ とする. このとき,
$G(f) = \{(x,y) \in X \times Y \,|\, y \in f(x)\}$ (f のグラフという)

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \cap B \neq \phi\}$
$A(f) = \{x \in X \mid f(x)$ が一点集合 $\}$
$A^{'}(f) = \{(x, y) \in G(f) \mid x \in A(f)\}$
と定義する．

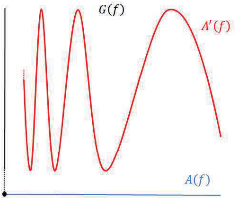

図3　$\sin\frac{1}{x}$-curve

定義 2.1.8. X, Y をコンパクト距離空間とし、$f : X \to 2^Y$ とする．このとき，任意の $y \in Y$ に対して，$y \in f(x)$ となる $x \in X$ が存在するとき，f は *surjective* であるという．

定義 2.1.9. $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を inverse sequence とする．
このとき，任意の自然数 i, j $(j > i+1)$ に対して $f_{i,j} = f_i \circ \cdots \circ f_{j-1} : X_j \to 2^{X_i}$ とする．また、$f_{i,i+1} = f_i$ と定義する．
次に，任意の自然数 i, j $(1 \leq i \leq j)$ に対して，
$G^{-1}(f_i, \ldots f_j) = \{(x_i, \ldots x_j, x_{j+1}) \in \prod_{k=i}^{j+1} X_k \mid i \leq k \leq j,\ x_k \in f_k(x_{k+1})\}$
とする．また，$i = j$ のとき，$G^{-1}(f_i, f_j)$ を $G^{-1}(f_i)$ と書く．
また，任意の自然数 i に対して，
$B(f_i) = \{x \in X_{i+1} \mid 1 \leq k \leq i,\ f_{i,i+1}(x)$ が 1 点集合 $\}$
$B^{'}(f_i) = \{(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}) \in G^{-1}(f_1, \ldots, f_i) \mid x_{i+1} \in B(f_i)\}$
とする．

定理 2.1.10. ［参考文献 [6], 定理 13.5］
X, Y をコンパクト距離空間とする．連続全射写像 $f : X \to Y :$ が open map であることの必要十分条件は，$f^{-1} : Y \to 2^X ; y \mapsto f^{-1}(y)$ が連続であることである．

定理 2.1.10を用いることで、以下の命題が成り立つ.

命題 2.1.11. X, Y をコンパクト距離空間とし, $f : X \to 2^Y$ を usc かつ surjective とする. また, $P : X \times Y \to Y$ を射影とする. このとき, 以下の 3 つは同値である.

(1) $f^{-1} : Y \to 2^X$ が連続である.

(2) $(P|_{G(f)})^{-1} : Y \to 2^{G(f)}$ が連続である.

(3) $P|_{G(f)} : G(f) \to Y$ が open map である.

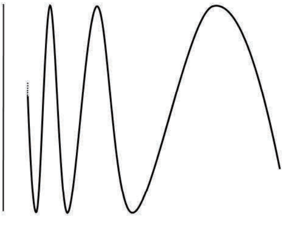

図4　$\sin \frac{1}{x}$-curve

定理 2.1.12. (Baire のカテゴリー定理)

完備距離空間 X の任意の稠密開集合の列 $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ に対して, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ はまた X で稠密である.

定義 2.1.13. X を位相空間とする. このとき, $A \subset X$ が X の G_δ-subset であるとは, $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ という条件を満たす X の可算個の開集合 U_i $(i \in \mathbb{N})$ が存在するときにいう.

2.2　Full projection property について

この節では full projection property について紹介する. そして, 各 factor space が任意のコンパクト距離空間であるという条件の下で, upper semi-continuous bonding function をもつ inverse limit が full projection property を満たすための十分条件を紹介する。

定義 2.2.1. 任意の自然数 i に対して, X_i をコンパクト距離空間とし, $f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ とする. また, $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を inverse sequence とする. このとき,

$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ の閉集合 K が無限の自然数 i に対して $\pi_i(K) = X_i$ を満たすとき $K = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が成り立つ

ならば, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は *full prjection property (fpp)* を満たすという.

また, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が continuum のとき,

$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ の subcontinuum K が無限の自然数 i に対して $\pi_i(K) = X_i$ を満たすとき $K = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が成り立つ

ならば, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は *continuum full projection property (cfpp)* を満たすという.

$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が continuum のとき, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が fpp を満たすならば $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が cfpp を満たすことは明らかである.
次の例は, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が cfpp を満たすが $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が fpp は満たさないような例である.

例 2.2.2. 任意の自然数 i に対して, $X_i = [0, 1]$ とし、$f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ を以下のように定義する. (図 5 参照)

$$f_i(x) = \begin{cases} \{2x\} \ (0 \le x < \frac{1}{2}) \\ X_i \ (x = \frac{1}{2}) \\ \{2x - 1\} \ (\frac{1}{2} < x \le 1) \end{cases}$$

このとき, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は cfpp を満たすが fpp は満たさない.

次の結果が本節で紹介する主結果である. 本結果は各 bonding function のグラフから, inverse limit が full projection property をもつかどうか判定する際に有用である.

定理 2.2.3. $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を任意の自然数 i に対して bonding function f_i が surjective である inverse sequence とする. このとき, 任意の自然数 i に対して $f_i^{-1} : X_i \to 2^{X_{i+1}}$ が連続で $A'(f_i)$ が $G(f_i)$ で稠密ならば, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は full projection property を満たす.

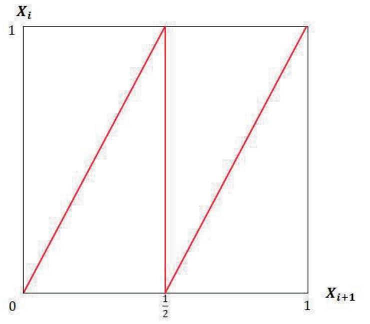

図5　f_i

Inverse limit が ful projection property を満たすための十分条件に関する先行結果は factor space が主に閉区間で考えられていたが, 定理 2.2.3では少なくとも factor space に特に強い条件を付すことはない. その結果, 例 4.0.1や例 4.0.2のように factor space が単純閉曲線である inverse limit についても full projection property を満たすかどうかの判定ができる.

3　Full projection property の直積について

この章では, generalized inverse limit の直積の性質について紹介する. 特に, generalized inverse limit の直積が fpp を満たすための十分条件を与える. また, generalized inverse limit の直積と fpp の関係について自然に考えることのできる 4 つの問題を提起し, そのうちの 1 つに対する反例を紹介する.

3.1　inverse limit の直積の定義と性質

この節では, generalized inverse limit の直積の定義とその性質について説明する.

定義 3.1.1. X_1, X_2, Y_1, Y_2 をコンパクト距離空間とし, $f : X_1 \to 2^{Y_1}$, $g : X_2 \to 2^{Y_2}$ を usc とする. このとき, usc function $f \times g : X_1 \times X_2 \to 2^{Y_1 \times Y_2}$ を以下のように定義する.

$$(f \times g)(x_1, x_2) = f(x_1) \times g(x_2).\ (\ (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2)\ )$$

定義 3.1.2. $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}, \{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ をそれぞれ inverse sequence とする．このとき，以下で定義されるような同相写像 $h : \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} \times \varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty} \to \varprojlim\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ がある．

$$h((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty})) = (x_i, y_i)_{i=1}^{\infty}.$$
$$((x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty})$$

このとき，inverse sequence $\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ と $\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ の直積といい，$\varprojlim\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ と $\varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ の直積という．

命題 3.1.3. X_1, X_2, Y_1, Y_2 をコンパクト距離空間とし，$f : X_1 \to 2^{Y_1}$, $g : X_2 \to 2^{Y_2}$ を usc, surjective とする．このとき，$f^{-1} : Y_1 \to 2^{X_1}$, $g^{-1} : Y_2 \to 2^{X_2}$ が連続ならば，$(f \times g)^{-1} : Y_1 \times Y_2 \to 2^{X_1 \times X_2}$ も連続である．

命題 3.1.4. X_1, X_2, Y_1, Y_2 をコンパクト距離空間とし，$f : X_1 \to 2^{Y_1}$, $g : X_2 \to 2^{Y_2}$ を usc とする．このとき，$A'(f)$ が $G(f)$ で稠密で $A'(g)$ が $G(g)$ で稠密ならば，$A'(f \times g)$ は $G(f \times g)$ で稠密である．

3.2 Inverse limit の直積と full projection property について

この節では，generalized inverse limit の直積が fpp を満たすための十分条件を与える．まず，定理 2.2.3と命題 3.1.3から，次の系が成り立つ．

系 3.2.1. $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}, \{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ を任意の自然数 i に対して bonding function f_i, g_i が surjective である inverse sequence とする．このとき，任意の自然数 i に対して

(1) $f_i^{-1} : X_i \to 2^{X_{i+1}}$ と $g_i^{-1} : Y_i \to 2^{Y_{i+1}}$ が連続.

(2) $A'(f_i)$ が $G(f_i)$ で稠密かつ $A'(g_i)$ が $G(g_i)$ で稠密.

が成り立つならば，$\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ は fpp を満たす．

次に，系 3.2.1を用いて full projection property を満たす inverse limit の例を紹介する．

例 3.2.2. 任意の自然数 i に対して，$Y_i = [0, 2]$ とし，usc function $g_i : Y_{i+1} \to 2^{Y_i}$ を以下のように定義する．

$$g_i(x) = \begin{cases} \{1+\sin\frac{\pi}{x}\}\ (0 < x \leq 2) \\ Y_i\ (x=0) \end{cases} . \ (x \in Y_{i+1})$$

このとき, [参考文献 [1], 定理 4.7] から $\varprojlim\{Y_i \times Y_i, g_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ は continuum である. また, 任意の自然数 i に対して $g_i^{-1} : Y_i \to 2^{Y_{i+1}}$ が連続なことは明らかである. 更に, $A'(g_i)$ は $G(g_i)$ から $\{(x,y) \in G(g_i) \mid x = 0\}$ を取り除いた部分であることから, $A'(g_i)$ は $G(g_i)$ で稠密である. ゆえに, 系 3.2.1から, $\varprojlim\{Y_i \times Y_i, g_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ は fpp を満たす.

3.3 Inverse limit の直積と full projection property に関する問題

この節では, generalized inverse limit の直積と fpp, cfpp について自然に考えられる 4 つの問題を紹介する。

Problem 3.3.1.

(1) $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ と $\varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ が fpp を満たすならば, $\varprojlim\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ も fpp を満たすか?

(2) $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ と $\varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ が cfpp を満たすならば, $\varprojlim\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ も cfpp を満たすか?

(3) $\varprojlim\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ が fpp を満たすならば, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ と $\varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ も fpp を満たすか?

(4) $\varprojlim\{X_i \times Y_i, f_i \times g_i\}_{i=1}^{\infty}$ が cfpp を満たすならば, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ と $\varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ も cfpp を満たすか?

実は図 5 のグラフを持つ inverse sequence の inverse limit が (2) への反例となることがわかる（証明は参考文献 [4] 参照）. (1), (3), (4) についての解答はまだ発見できていない.

4 Factor space が単純閉曲線の場合の inverse limit

この章では, 各 factor space が単純閉曲線である inverse sequence で, その inverse limit が indecomposable continuum となる例を紹介する.

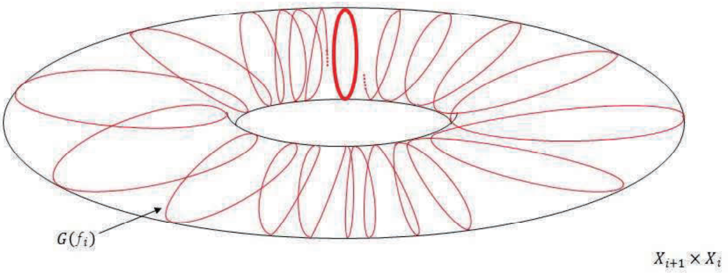

図6　例 4.0.1

例 4.0.1. 任意の自然数 i に対して, $X_i = S^1$ とし, usc function $f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ をグラフが図 6 のようになるものと定義する．このとき, 任意の自然数 i に対して, f_i が indecomposable であり f_i^{-1} が連続であることは明らかである．更に, $A'(f_i)$ は図 6 の細い線の部分で, $G(f_i)$ は図 6 の太い線の部分と細い線の部分を合わせたものであることから, $A'(f_i)$ は $G(f_i)$ で稠密であることがわかる．以上のことと 2 章の結果と [4] の結果を用いると $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は indecomposable continuum であることが簡単にわかる．

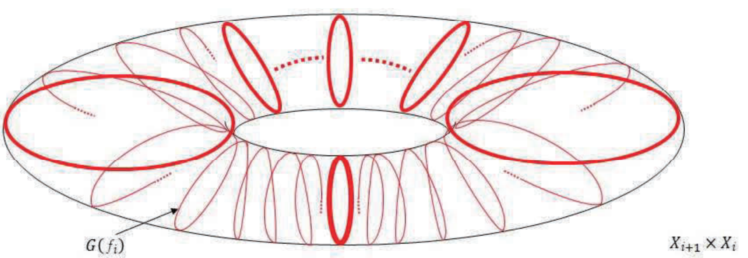

図7　例 4.0.2

例 4.0.2. 任意の自然数 i に対して, $X_i = S^1$ とし, usc function $f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$ をグラフが図 7 ($f_i(a) = X_i$ となる $a \in X_{i+1}$ が無限個存在する) のようになるものと定義する. このとき, 任意の自然数 i に対して, f_i が indecomposable であり f_i^{-1} が連続であることは明らかである. 更に, $A'(f_i)$ は図 7 の細い線の部分で, $G(f_i)$ は図 7 の太い線の部分と細い線の部分を合わせたものであることから, $A'(f_i)$ は $G(f_i)$ で稠密であることがわかる. 以上のことと 2 章の結果と [4] の結果を用いると $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は indecomposable continuum であることが簡単にわかる.

参考文献

[1] W. T. Ingram and W. Mahavier, *Inverse limits of upper semi-continuous set valued functions*, Houston J. Math. **32** (2006) , no.1, 119-130.

[2] W. T. Ingram, *An introduction to inverse limits with set-valued functions*, Springer Briefs in Mathematics. Springer, New York, 2012.

[3] J. P. Kelly and J. Meddaugh, *Indecomposability in inverse limits with set-valued functions*, Topology. Appl., **160** (2013) . no13, 1720-1731.

[4] E. Matsuhashi and T. Yamanaka, *Inverse limits with upper semi-continuous bonding functions whose inverse functions are continuous*, Mediterr. J. Math., **17** (2020) . no.3, 19pp.

[5] J. van Mill, *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces*, North-Hollarnd, Amsterdam, 2001.

[6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory : An introduction*, Pure Appl. Math. Ser., vol. **158**, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1992.