リーマン計量の moduli 空間の極大元について — an introduction

Yuichiro Taketomi
Osaka City University Advanced Mathematical Institute

1 Introduction

X を連結な C^∞ 級多様体とする. X 上の C^∞ 級リーマン計量全体のなす集合を $\mathfrak{M}(X)$ とする. $\mathfrak{M}(X)$ を scaling で割った商空間

$$\mathbb{R}_{>0}\backslash\mathfrak{M}(X) := \{\mathbb{R}_{>0}g \mid g \in \mathfrak{M}(X)\}.$$

を考える. $\mathbb{R}_{>0}\backslash\mathfrak{M}(X)$ 上に前[*1]順序 $\prec$ を等長変換群の大小によって定める：

$$\mathbb{R}_{>0}g \prec \mathbb{R}_{>0}h \ :\Leftrightarrow\ \mathrm{Isom}(X, g) \subset \mathrm{Isom}(X, h).$$

このとき, 順序集合 $(\mathbb{R}_{>0}\backslash\mathfrak{M}(X), \prec)$ の極大元[*2] は何だろうか？これはつまり, 「リーマン計量の良し悪しを "等長変換群の大小" という価値基準ではかったとき, 極大に良い計量は何だろうか？」という問いである. この問いに対する解答は,

Proposition 1.1. *X 上の完備な計量 $g \in \mathfrak{M}(X)$ に対し, $\mathbb{R}_{>0}g \in \mathbb{R}_{>0}\backslash\mathfrak{M}(X)$ が順序集合 $(\mathbb{R}_{>0}\backslash\mathfrak{M}(X), \prec)$ の極大元であるための必要十分条件は (X, g) が isotropy 既約空間であることである.*

ここで, (X, g) が isotropy 既約空間であるとは, 各点 $p \in X$ に対し, p における線形 isotropy 表現 $\mathrm{Isom}(X, g)_p \curvearrowright T_pX$ が既約表現になることである. 完備な isotropy 既約空間はすでに分類が完成している ([10, 8]).

ここで, 今 $\mathfrak{M}(X)$ を scaling で割った空間に順序を考えたが, 代わりに $\mathfrak{M}(X)$ を scaling と "微分同相群 $\mathrm{Diff}(X)$ で" 割った空間で同様のことを考えてみよう. つまり, $\mathfrak{M}(X)$ 上に同値関係 $\sim$ を

$$g \sim h \ :\Leftrightarrow\ \begin{array}{l}\text{ある } \lambda > 0 \text{ に対し, } (X, \lambda g) \text{ と } (X, h) \text{ の間に}\\ \text{等長写像 } \varphi \in \mathrm{Diff}(X) \text{ が存在する}\end{array}$$

によって定め, 商空間 $\mathfrak{M}(X)/_\sim := \{[g] \mid g \in \mathfrak{M}(X)\}$ に順序 $\prec$ (先と同じ記号を使う) を

$$\begin{aligned}[g] \prec [h] \ &:\Leftrightarrow\ \text{ある } h' \in [h] \text{ が存在して, } \mathrm{Isom}(X, g) \subset \mathrm{Isom}(X, h')\\ &\Leftrightarrow\ \text{ある } \varphi \in \mathrm{Diff}(X) \text{ が存在して, } \varphi\mathrm{Isom}(X, g)\varphi^{-1} \subset \mathrm{Isom}(X, h)\end{aligned}$$

[*1] 反射律と推移律は満たすが, 反対称律は満たさない.
[*2] 順序集合 $(S, <)$ に対して, $s \in S$ が極大元であるとは, $s < t$ ならば $s = t$ が成り立つこと.

によって定める．このとき, 順序集合 $(\mathfrak{M}(X)/_\sim, \prec)$ の極大元とは何であろうか？ということを改めて考えてみよう．

Definition 1.2 (T.)**.** 同値類 $[g] \in \mathfrak{M}(X)/_\sim$ が順序集合 $(\mathfrak{M}(X)/_\sim, \prec)$ の極大元であるとき, $g \in \mathfrak{M}(X)$ を極大計量と呼ぶ．

極大計量は, 「"等長変換群の Diff(X)-共役類の大小" という価値基準のもと, 極大の良さをもった計量」と解釈できる．計量 $g \in \mathfrak{M}(X)$ が極大計量であるための必要十分条件は

$$\mathrm{Isom}(X, g) \subset \mathrm{Isom}(X, h) \;\Rightarrow\; [g] = [h] \tag{$*$}$$

となることである．

完備な isotropy 既約計量 g (*i.e.* 順序集合 $(\mathbb{R}_{>0}\backslash\mathfrak{M}(X), \prec$ の極大元$)$ は極大計量になっていることが以下から分かる：

Proposition 1.3. 計量 $g \in \mathfrak{M}(X)$ を完備な計量, $G := \mathrm{Isom}(X, g)$ とし, $\mathfrak{M}_G(X)$ を G-不変なリーマン計量のなす集合とする．このとき, 以下は同値：

(1) (X, g) は *isotropy* 既約空間,
(2) $\mathfrak{M}_G(X) = \mathbb{R}_{>0}g$.

実は, 空間 X がコンパクトならば, 極大計量と isotropy 既約計量の概念は同値になってしまうことが分かる．一方, 空間 X が非コンパクトならば, isotropy 既約計量でない極大計量が豊富に存在する．

極大性の概念はリーマン計量に対してだけでなく, 擬リーマン計量や (概) シンプレクティック構造や (概) 複素構造に対しても同様に定義できる．他の極大幾何構造については今回はあまり触れないが, 後述のように, リーマンの場合特有で, 極大構造の具体例を作りやすい都合の良い状況がある (Remark 4.7 参照).

2　計量発展方程式の自己相似解と極大計量

極大計量を考えるモチベーションの 1 つに, 計量発展方程式の自己相似解の具体例の供給がある．$\mathfrak{S}(X)$ を X 上の C^∞ 級対称 $(0, 2)$-テンソルの集合とする．計量発展方程式とは, 写像 $\mathcal{R} : \mathfrak{M}(X) \to \mathfrak{S}(X)$ に対し定まる

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = \mathcal{R}(g_t) \quad (g_t \in \mathfrak{M}(X))$$

という形の微分方程式である．代表的なものに, Ricci flow $(\mathcal{R} = -2\mathrm{Ric})$, Yamabe flow $(\mathcal{R} = -\mathrm{sc}_g \cdot \mathrm{id}_{\mathfrak{M}(X)})$ などがある．計量発展方程式の解 $\{g_t\}_{t\in[0,T)}$ が自己相似解とは, 任意の $t \in [0, T)$ に対し, $g_t \in [g_0]$ となること．計量 g を初期計量とする自己相似解が存在するとき, g を計量発展方程式 $\partial_t g_t = \mathcal{R}(g_t)$ に対する soliton (*e.g.* Ricci soliton, Yamabe soliton ... etc) と呼ぶ．

極大計量の性質 $(*)$ から直ちに次が分かる：

Proposition 2.1. 計量発展方程式 $\partial_t g_t = \mathcal{R}(g_t)$ に対し, 極大計量 $g \in \mathfrak{M}(X)$ を初期計量とする解 $\{g_t\}$ が等長変換群を保つ *(i.e.* $\forall t,\ \mathrm{Isom}(X, g) \subset \mathrm{Isom}(X, g_t)$*)* ならば, 解 $\{g_t\}$ は自己相似解.

解 $\{g_t\}$ が等長変換群を保つ状況としては, 例えば,

(1) 写像 $\mathcal{R}$ が $\mathrm{Diff}(X)$-同変, すなわち

$$\mathcal{R}(\varphi^* g) = \varphi^* \mathcal{R}(g) \quad (g \in \mathfrak{M}(X),\ \varphi \in \mathrm{Diff}(X),\ \ ^* \text{は引き戻し})$$

(2) 計量 g を初期計量とする解 $\{g_t\}$ が存在し, なおかつ一意

の 2 つを満たす場合である場合である. このとき, 計量発展方程式 $\partial_t g_t = \mathcal{R}(g_t)$ の $g \in \mathfrak{M}(X)$ を初期計量とする解 $\{g_t\}$ は等長変換群を保つ. 例えば, 曲率が有界で完備な計量に対する Ricci flow はこの 2 つを満たす ([2]). よって, 曲率が有界で完備な極大計量は Ricci soliton である.

一般に, 計量発展方程式に対して, 解の存在と一意性を確認するのは解析的に非常に難しい問題であり, 上記の (1), (2) を満たす計量発展方程式は Ricci flow 以外にはあまり知られていない.

もう 1 つ, 解が等長変換群を保つ状況としては, 写像 $\mathcal{R}$ が $\mathrm{Diff}(X)$-同変で, 初期計量が等質な計量である場合である. ここで, 計量 $g \in \mathfrak{M}(X)$ が等質であるとは, $\mathrm{Isom}(X, g)$ が X に推移的に作用することを言う.

等質な計量 $g \in \mathfrak{M}(X)$ を 1 つ固定し, 簡単のため, $G := \mathrm{Isom}(X, g)$ と書く. $\mathfrak{S}_G(X)$ を G-不変な対称 $(0,2)$-テンソルの集合, $\mathfrak{M}_G(X)$ を G-不変なリーマン計量の集合とする. このとき, $\mathfrak{S}_G(X)$ は有限次元ベクトル空間で, $\mathfrak{M}_G(X)$ は $\mathfrak{S}_G(X)$ の開集合なので, 自然に有限次元多様体の構造を持つ. $\mathrm{Diff}(X)$-同変な写像 $\mathcal{R} : \mathfrak{M}(X) \to \mathfrak{S}(X)$ は写像 $\mathcal{R}_G : \mathfrak{M}_G(X) \to \mathfrak{S}_G(X)$ を誘導する. $\mathcal{R}_G$ は $\mathfrak{M}_G(X)$ 上のベクトル場とみなせる. 写像 $\mathcal{R}_G : \mathfrak{M}_G(X) \to \mathfrak{S}_G(X)$ が連続ならば, $\mathcal{R}_G$ の g を出発する積分曲線 $\{g_t\} \subset \mathfrak{M}_G(X)$ が存在する. この $\{g_t\}$ は計量発展方程式 $\partial_t g_t = \mathcal{R}(g_t)$ の等長変換群を保つ解である. よって,

Proposition 2.2. 計量 $g \in \mathfrak{M}(X)$ を等質な極大計量とする. 計量発展方程式 $\partial_t g_t = \mathcal{R}(g_t)$ に対し, $\mathcal{R}$ が $\mathrm{Diff}(X)$-同変で, $\mathcal{R}_G : \mathfrak{M}_G(X) \to \mathfrak{S}_G$ が連続であるとする. このとき, g を初期計量とする $\mathcal{R}_G$ の積分曲線 $\{g_t\}$ は $\partial_t g_t = \mathcal{R}(g_t)$ の自己相似解. すなわち, g は $\partial_t g_t = \mathcal{R}(g_t)$ の *soliton.*

$\mathcal{R}$ がある種の曲率テンソルの組合せで書かれているとき, $\mathcal{R}$ は $\mathrm{Diff}(X)$-同変で, $\mathcal{R}_G$ は連続になる. 例えば,

$$\mathcal{R}(g) = -a\mathrm{Ric}_g - b\mathrm{sc}_g \cdot g - c\mathrm{Rm}_g^2 \quad (g \in \mathfrak{M}(X),\ a, b, c \in \mathbb{R})$$

という形である. ここで, Rm_g^2 は

$$\mathrm{Rm}_g^2(x, y) := -\mathrm{tr}(\mathrm{Rm}_g(x, \star) \circ \mathrm{Rm}_g(y, \star)),$$

で与えられる. Rm_g は g のリーマン曲率テンソル, $\star$ は g に関する縮約である. 計量発展方程式 $\partial g_t = \mathcal{R}(g_t)$ は

- $a = 2$, $b = c = 0$ のとき, Ricci flow
- $a = c = 0$, $b = 1$ のとき, Yamabe flow
- $a = 2$, $b \neq 0$, $c = 0$ のとき, Ricci-Bourguignon flow
- $a = 2$, $b = 0$, $c \neq 0$ のとき, 2-loop renormalization group flow

と呼ばれる. また, 近年, Bach flow([4]) と呼ばれる計量発展方程式も研究されている. Bach flow は

$$\mathcal{R}(g)(x,y) = \frac{1}{n-3}\nabla_\star\nabla_\bullet W_g(x,\star,y,\bullet) + \frac{1}{n-2}\mathrm{Ric}_g(\star,\bullet)W_g(x,\star,y,\bullet),$$

によって定義される計量発展方程式である．ここで, W_g は g の Weyl 曲率テンソル, $\star$ と $\bullet$ は計量 g に関する縮約である．等質な極大計量はこれらの計量発展方程式に対して自己相似解を与える．

3 コンパクト多様体上の極大計量

計量 $g \in \mathfrak{M}(X)$ が極大であるための必要十分条件は, 任意の $\mathrm{Isom}(X,g)$-不変計量 h に対し, (X,g) と (X,h) は scaling の差を除いて等長的 (*i.e.* $[g]=[h]$) となることであった．ここで, $\mathrm{Isom}(X,g)$-不変な X 上の C^∞ 級関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し, g と共形な計量 $e^f \cdot g \in \mathfrak{M}(X)$ も $\mathrm{Isom}(X,g)$-不変な計量である．よって, g が極大計量であるためには,

> 任意の $\mathrm{Isom}(X,g)$-不変な関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し, g と $e^f \cdot g$ は scaling の差を除いて等長的.

であることが必要になる．計量 g が完備なら, 作用 $\mathrm{Isom}(X,g) \curvearrowright X$ は proper な作用になり, さらに g が非等質なら, 定数関数でない $\mathrm{Isom}(X,g)$-不変な C^∞ 級関数が豊富に存在する．豊富にある定数でない f に対し, $e^f \cdot g$ と g の曲率の違いが常に定数倍になるなんてことはないはずなので, 完備非等質な極大計量は存在しないように思える．実際 X がコンパクトならば, このアイデアで g の等質性を示せる：

Proposition 3.1. 計量 $g \in \mathfrak{M}(X)$ が極大計量であるとする．X がコンパクトならば, g は等質な計量.

証明の概略. X がコンパクトならば, 各計量 $h \in \mathfrak{M}(X)$ に対し, リーマン曲率テンソルのノルム $|\mathrm{Rm}_h| : X \to \mathbb{R}$ に最大値が存在する．g が非等質ならば, $\mathrm{Isom}(X,g)$-不変な C^∞ 級関数 f をうまく選ぶと,「$(X, e^f \cdot g)$ と (X,g) の体積は等しいが, $e^f \cdot g$ の曲率の最大値は g の曲率の最大値より大きい」という状況が作れる．このとき, $e^f \cdot g$ は $\mathrm{Isom}(X,g)$-不変で, $[g] \neq [e^f \cdot g]$. よって, g は極大計量ではない. □

計量 $g \in \mathfrak{M}(X)$ を等質なリーマン計量, $G := \mathrm{Isom}(X,g)$ とする．点 $p \in X$ を 1 つ固定する．$\mathrm{Aut}_{G_p}(G) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \mid \varphi G_p \varphi^{-1} = G_p\}$ とする．このとき, 自然な単射準同型

$$\mathrm{Aut}_{G_p}(G) \to \mathrm{Diff}(X),\ \varphi \mapsto \tilde{\varphi},\ \tilde{\varphi}(g.p) := \varphi(g).p \quad (g \in G)$$

があり, 直積群 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}_{G_p}(G)$ は G-不変計量の集合 $\mathfrak{M}_G(X)$ に作用する：

$$\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}_{G_p}(G) \curvearrowright \mathfrak{M}_G(X),\ (c,\varphi).g := c \cdot g(d\tilde{\varphi}^{-1}.d\tilde{\varphi}^{-1})$$

このとき, 以下が成り立つ.

Proposition 3.2. 等質な計量 $g \in \mathfrak{M}(X)$ に対し, g が極大計量であるための必要十分条件は作用 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}_{G_p}(G) \curvearrowright \mathfrak{M}_G(X)$ が推移的になること.

以上のことを使うと, 以下が分かる：

Theorem 3.3 (T.)**.** (X, g) をコンパクトリーマン多様体とする. g が極大計量ならば, (X, g) は *isotropy* 既約空間.

証明の概略. g が等質極大なので, 作用 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}_{G_p}(G) \curvearrowright \mathfrak{M}_G(X)$ が推移的になる. $\mathfrak{M}_G(X)$ は連結なので, $\mathrm{Aut}_{G_p}(G)$ の単位連結成分を $(\mathrm{Aut}_{G_p}(G))_0$ と書くと, $\mathbb{R}_{>0} \times (\mathrm{Aut}_{G_p}(G))_0 \curvearrowright \mathfrak{M}_G(X)$ が推移的になる. ここで, (X, g) がコンパクトリーマン多様体なので, $G := \mathrm{Isom}(X, g)$ はコンパクト Lie 群である. このことから, $\mathrm{Aut}(G)$ の単位連結成分 $(\mathrm{Aut}(G))_0$ もコンパクト Lie 群になる. よって $(\mathrm{Aut}(G))_0$ の閉部分群 $(\mathrm{Aut}_{G_p}(G))_0$ もコンパクト. ゆえに, Cartan の fixed point theorem により, 作用 $(\mathrm{Aut}_{G_p}(G))_0 \curvearrowright \mathfrak{M}_G(X)$ に固定点が存在する. ゆえに, $\mathbb{R}_{>0} \times (\mathrm{Aut}_{G_p}(G))_0 \curvearrowright \mathfrak{M}_G(X)$ に 1 次元の軌道が存在する. しかし, $\mathbb{R}_{>0} \times (\mathrm{Aut}_{G_p}(G))_0 \curvearrowright \mathfrak{M}_G(X)$ は推移的なはずなので, $\mathfrak{M}_G(X)$ は 1 次元の空間, すなわち $\mathfrak{M}_G(X) = \mathbb{R}_{>0} g$ でなければならない. これは (X, g) が isotropy 既約であることを意味する. □

4 ユークリッド空間上の極大計量

先述の通り, 等質な極大計量は Ricci flow の自己相似解を与える. すなわち Ricci soliton である. ごく最近, 長らく未解決だった以下の予想の解決が Böhm-Lafuente によってアナウンスされた ([1]):

Conjecture 4.1 (generalized Alekseevskii 予想)**.** 非コンパクト既約[*3]な等質 *Ricci soliton* 多様体はユークリッド空間に微分同相である.

よって, これまでの話をまとめると, isotropy 既約でない完備な極大計量はユークリッド空間上にしか存在しないと考えられる. 実際, ユークリッド空間上には isotropy 既約でない極大計量がいくつも存在する. ここでは, 単連結可解 Lie 群上の左不変計量であって, 極大計量であるものを豊富に与える.

4.1 Lie 群作用からの準備

ここで, 群作用の用語をいくつか準備する. Lie 群 H が多様体 Y に smooth に作用しているとする. このとき, 軌道空間 $H \backslash Y$ に前順序 $<$ を

$$H.p < H.q \ :\Leftrightarrow \ \text{ある } q' \in H.q \text{ が存在して, } H_p \subset H_{q'}$$

によって定める. 軌道 $H.p$ が順序 $<$ に関して極大であるとき, 極大軌道と呼ぶことにする. また, 軌道空間 $H \backslash Y$ に同値関係 $\sim$ を

$$H.p \sim H.q \ \Leftrightarrow \text{ある } q' \in H.q \text{ が存在して, } H_p = H_{q'}$$

によって定める. $\sim$ に関する $H.p$ の同値類を $[H.p]$ で表わす. $[H.p] = \{H.p\}$ であるとき, $H.p$ を孤独軌道と呼ぶことにする. また, $H \backslash Y$ の商位相に関して, $H.p \in H \backslash Y$ が部分集合 $[H.p] \subset H \backslash Y$

[*3] オリジナルの statement は「等質な expanding Ricci soliton 多様体はユークリッド空間に微分同相」であるが, 諸々の先行研究とあわせると, こう書いても同値であることが分かる.

の孤立点になっているとき, 軌道 $H.p$ は孤立軌道と呼ばれる．一般に,

$$\text{極大軌道} \Rightarrow \text{孤独軌道} \Rightarrow \text{孤立軌道}$$

という関係がある．この 3 つは一般に異なる．しかし, 以下のケースではこれらの概念は一致する．

Proposition 4.2. *Y をアダマール多様体*[*4], *$H \subset \mathrm{Isom}(Y)$ を閉部分群とする．H-作用において, $H.p \in H\backslash Y$ が孤立軌道ならば, $H.p$ は極大軌道．特に, 上記の 3 つの概念は一致する．*

一般に, 軌道 $H.p$ が極大軌道, 孤独軌道であることは軌道空間 $H\backslash Y$ における global な条件である．すなわち, $H.p$ の近傍だけ見ても, 極大, 孤独かは分からない．一方, 軌道 $H.p$ が孤立軌道であることは local な条件である．実際, (proper な) 等長作用の軌道 $H.p$ が孤立軌道かどうかをチェックするには, 以下のように slice 表現を通して軌道の無限小の近傍を調べればよい．

Proposition 4.3 (T.)**.** *Y を完備連結リーマン多様体, $H \subset \mathrm{Isom}(Y)$ の閉部分群とする．軌道 $H.p$ が孤立軌道であるための必要十分条件は, slice 表現 $H_p \curvearrowright (T_pH.p)^{\perp}$ が 0 以外の固定法ベクトルを持たないこと．*

4.2 $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用と極大な左不変計量

等質な極大計量の特徴付けが Proposition 3.2 により得られている．しかし, 極大計量の例の構成に使うには, やや使い勝手が悪い．これを使うには, 左不変計量 g の等長変換群 $G := \mathrm{Isom}(X, g)$ やその自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ がある程度分かっていないといけないが, 左不変計量であっても, 等長変換群 G の決定は一部の場合を除き難しい問題である．ましてや $\mathrm{Aut}(G)$ はもっと難しい．ここでは, 左不変計量が極大計量になるための扱いやすい十分条件を与える．

n 次元 Lie 群 G 上の左不変計量は Lie 代数 $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ 上の内積と自然に同一視される．$\mathfrak{m}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ 上の内積のなす集合とする．$\mathfrak{m}(\mathfrak{g})$ には $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ が自然に作用する．よって, $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ の閉部分群

$$\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{c\varphi \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \mid c > 0,\ \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\} \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

が $\mathfrak{m}(\mathfrak{g})$ に作用している．この作用 $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \mathfrak{m}(\mathfrak{g})$ に対して, 以下が成り立つ：

Proposition 4.4. *G を単連結 Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする．このとき, 左不変計量 $g, h \in \mathfrak{m}(\mathfrak{g})$ に対し, g と h が同じ $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-軌道上に存在すれば, $[g] = [h]$, すなわち (G, g) と (G, h) は scaling の差を除いて等長的である．*

よって, 軌道空間 $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\mathfrak{m}(\mathfrak{g})$ は左不変計量のある種の分類を与えており, $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用を研究することで, G 上の左不変計量の分類や, G 上のよい左不変計量の発見に役立つことがある (*e.g.* [5]).

$\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用の $g \in \mathfrak{m}(\mathfrak{g})$ における固定部分群は

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cap O(g) \cong \mathrm{Aut}(G) \cap \mathrm{Isom}(G, g)$$

である．ここで, $O(g)$ は内積 g に関する直交群．このことと Proposition 4.4 から, 以下が分かる：

[*4] より一般に, 各点の指数写像が全単射な完備リーマン多様体でも ok

Proposition 4.5. *G を単連結 Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする. このとき, 左不変計量 $g \in \mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ に対し, 軌道 $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).g$ が極大軌道ならば, g は極大計量.*

しかし, 先述の通り, 軌道が極大であるということは, その軌道の近傍のみで解決する話ではない. ゆえにある程度 $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用の軌道空間と向き合わなければならない. 一般に, $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用の軌道空間はそこまで簡単ではない.

使い勝手のよい十分条件を得るために, 先程準備した, Lie 群作用の一般論を使う.

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/O(n) \cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/SO(n)$$

で, $\mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ はアダマール多様体になっており, $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ の等長変換群の閉部分群になっている. すなわち, 先程準備した Proposition 4.2 を適用することができ, 以下を得る.

Theorem 4.6 (T.)**.** *G を単連結 Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする. このとき, 左不変計量 $g \in \mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ に対し, 軌道 $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).g$ が孤立軌道ならば, 計量 g は極大計量.*

すなわち, 軌道の極大性というチェックがやや面倒な global condition から, 軌道の孤立性という slice 表現を調べることでチェックできる local condition に話がおちてくれた.

Remark 4.7. 実は, Proposition 4.5 は他の極大な幾何構造に対しても同様に成り立つ. 例えば, 左不変擬リーマン計量のなす集合への $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用を考えたとき, $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-軌道が極大なら, その軌道上の左不変擬リーマン計量は極大な擬リーマン計量である. しかし, 他の幾何構造に関しては, 左不変幾何構造の集合はアダマール多様体になるようなことはないので, リーマンの場合のように, 軌道の孤立性という local condition に帰着されるかは分からない.

Theorem 4.6 の逆, すなわち「極大計量 $\Rightarrow$ 孤立軌道」は一般には成り立たない. 例えば, 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ 上の標準計量 g_0 (これは isotropy 既約だから極大計量) は, 然るべき単連結可解 Lie 群 G 上の左不変計量として実現できるが, 軌道 $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).g_0$ は孤立軌道にはなっていない. しかし, 一部の G に対しては逆が成り立つ：

Theorem 4.8 (T.)**.** *G が単連結べき零[*5] Lie 群ならば, (1) の逆も成り立つ. すなわち, 左不変計量 g が極大計量であるための必要十分条件は, 軌道 $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).g$ が孤立軌道であること.*

4.3 極大計量の例

Theorem 4.9 (T.)**.** *$n \geq 2$ とする. $w = (w_2, w_3, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対し, $\mathbb{R}^n$ 上のリーマン計量 g_w を*

$$g_w := (dx_1)^2 + e^{-2w_2x_1}(dx_2)^2 + \cdots + e^{-2w_nx_1}(dx_n)^2.$$

によって定義すると, g_w は $\mathbb{R}^n$ 上の極大計量になる. $w = (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$ の形ならば, g_w は定曲率計量であり, $w \neq (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$ ならば, g_w は isotropy 既約でない.

これにより, ユークリッド空間上の極大計量の例が連続的に得られる. g_w は

$$(x_1, x_2, \ldots x_n) * (y_1, y_2, \ldots y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + e^{w_2x_1}y_2, \ldots, x_n + e^{w_nx_1}y_n).$$

[*5] より一般に unimodular 完全可解

によって定義される単連結可解 Lie 群 $(\mathbb{R}^n, *)$ 上の左不変計量である．この左不変計量 g_w に対して, 先の十分条件 Theorem 4.6 を適用することで, g_w が極大計量であることを示せる．

もう 1 つ, グラフ理論を経由して, 極大計量の例を構成する方法がある．$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ を頂点集合 $\mathcal{V}$ ($\sharp\mathcal{V} = p < \infty$), 辺集合 $\mathcal{E} \subset \{e \subset \mathcal{V} \mid \sharp e = 2\}$ ($\sharp\mathcal{E} = q$) の単純グラフとする．$\mathcal{G}$ に辺の向き d を与え, 有向単純グラフ $(\mathcal{G}, d)$ を考える．ここで辺の向きとは, 写像 $d : \mathcal{E} \to \mathcal{V}$ であって, $d(e) \subset e$ を満たすもの．すなわち, d により辺 e の始点 $d(e)$ を定めている．対して, 辺 e の向き d に関する終点を $d^*(e)$ と書くことにする ($i.e.$ $e = \{d(e), d^*(e)\}$).

$\mathcal{V} \cup \mathcal{E}$ 上の実数関数の集合 $\mathcal{F}(\mathcal{V} \cup \mathcal{E}) := \{f : \mathcal{V} \cup \mathcal{E} \to \mathbb{R}\}$ を考える．$\mathcal{F}(\mathcal{V} \cup \mathcal{E})$ 上の群構造 $\diamond$ を

$$
\begin{aligned}
(f \diamond g)(v) &:= f(v) + g(v) \quad (v \in \mathcal{V}) \\
(f \diamond g)(e) &:= f(e) + g(e) + \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} f(d(e)) & f(d^*(e)) \\ g(d(e)) & g(d^*(e)) \end{pmatrix} \quad (e \in \mathcal{E})
\end{aligned}
$$

によって定める．すなわち, 通常の関数の和 $+$ から, 有向グラフの情報によって定まる det の項の分だけ歪んだ群構造になっている．$\mathcal{F}(\mathcal{V} \cup \mathcal{E})$ は集合としては $\mathbb{R}^{p+q}$ と自然に同一視されるので, $\diamond$ は $\mathbb{R}^{p+q}$ 上に可換でない Lie 群構造を定める．Lie 群としては, $(\mathbb{R}^{p+q}, \diamond)$ は (2-step) べき零 Lie 群である．

この有向グラフから構成されるべき零 Lie 群 $(\mathbb{R}^{p+q}, \diamond)$ は Dani-Mainkar によって導入[*6]され ([3]), 様々な研究がある．例えば $(\mathbb{R}^{p+q}, \diamond)$ が左不変な Ricci soliton を許容するようなグラフの特徴付けなどか分かっている ([6]).

$T_0\mathbb{R}^{p+q} \cong \mathbb{R}^{p+q}$ の標準内積を群構造 $\diamond$ に関する左移動で各点の接空間にコピーしてできる $(\mathbb{R}^{p+q}, \diamond)$ 上の左不変計量 $g_{(\mathcal{G},d)}$ を考える．加法群の構造 $+$ で標準内積をばらまいてできる計量が $\mathbb{R}^{p+q}$ の標準計量であるから, $g_{(\mathcal{G},d)}$ は有向グラフの情報分だけ, 標準計量からある種歪んだ計量になっている．

Theorem 4.10 (T.)**.** *$(\mathcal{G}, d)$ を有向単純グラフとする．(向きを忘れた) 無向グラフ $\mathcal{G}$ が辺推移的グラフならば, 計量 $g_{(\mathcal{G},d)}$ は $\mathbb{R}^{p+q}$ 上の極大計量である．*

ここで, 無向グラフ $\mathcal{G}$ が辺推移的であるとは, $\mathcal{G}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ が辺の集合 $\mathcal{E}$ に推移的に作用することである．Theorem 4.10 の証明も, 先の十分条件 Theorem 4.6 を適用することでできる．ここで, 先行研究により以下が知られている：

Theorem 4.11 ([7, 9])**.** *2 つの有向グラフ $(\mathcal{G}, d)$ と $(\mathcal{G}', d')$ に対して, 計量 $g_{(\mathcal{G},d)}$ と計量 $g_{(\mathcal{G}',d')}$ が等長的であるための必要十分条件は 2 つの (向きを忘れた) 無向グラフ $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ が互いに同型であること．*

よって, 辺推移的グラフの数だけ, ユークリッド空間上の極大計量が存在する．

[*6] 実際には, 彼らは「有向グラフから構成されるべき零 Lie 代数」を定義している．その Lie 代数に対応する単連結 Lie 群がここで定義した $(\mathbb{R}^{p+q}, \diamond)$ である．

参考文献

[1] Christoph Böhm and Ramiro A. Lafuente. Non-compact einstein manifolds with symmetry, 2021. ArXiv:2107.04210v1.

[2] Bing-Long Chen and Xi-Ping Zhu. Uniqueness of the Ricci flow on complete noncompact manifolds. *J. Differential Geom.*, 74(1):119–154, 2006.

[3] S. G. Dani and Meera G. Mainkar. Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(6):2235–2251, 2005.

[4] Sanjit Das and Sayan Kar. Bach flows of product manifolds. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 9(5):1250039, 18, 2012.

[5] Takahiro Hashinaga, Hiroshi Tamaru, and Kazuhiro Terada. Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups. *J. Math. Soc. Japan*, 68(2):669–684, 2016.

[6] Jorge Lauret and Cynthia Will. Einstein solvmanifolds: existence and non-existence questions. *Math. Ann.*, 350(1):199–225, 2011.

[7] Meera G. Mainkar. Graphs and two-step nilpotent Lie algebras. *Groups Geom. Dyn.*, 9(1):55–65, 2015.

[8] McKenzie Wang and Wolfgang Ziller. On isotropy irreducible Riemannian manifolds. *Acta Math.*, 166(3-4):223–261, 1991.

[9] Edward N. Wilson. Isometry groups on homogeneous nilmanifolds. *Geom. Dedicata*, 12(3):337–346, 1982.

[10] Joseph A. Wolf. The goemetry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces. *Acta Math.*, 120:59–148, 1968.