

ド・ジッター空間の空間的平均曲率 1 曲面の特異点

横浜国立大学・大学院工学研究院 本田 淳史*

Atsufumi Honda

Faculty of Engineering, Yokohama National University

概要

本稿では、3次元ド・ジッター空間 S_1^3 の空間的平均曲率 1 曲面に現れる非退化な特異点に対し、それらの分類および非退化特異点の間の双対性を紹介する。本稿の内容は、佐藤媛美氏との共同研究 [10] に基づく。

1 ミンコフスキー空間の極大曲面の特異点

3次元ミンコフスキー空間を $L^3 = (\mathbf{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle = dx^2 + dy^2 - dz^2)$ で表す。平均曲率が恒等的に消えている空間的曲面を(空間的)極大曲面という。局所的には極大曲面は3次元ユークリッド空間 E^3 の極小曲面と類似の性質を持つが、大域的には異なり、完備な極大曲面は平面に限ることが知られている (Calabi [4])。従って、極大曲面の大域的な性質を調べるには、特異点*1を許容した枠組みで極大曲面を考える必要がある。Umehara-Yamada [20] は極大面と呼ばれる、特異点を許容する極大曲面のクラスを導入し、Osseman 型不等式 ([20, Theorem 4.11]) などの様々な大域的性質を導いた。

定義 1.1 (Umehara-Yamada [20]). Riemann 面 M 上で定義された C^∞ 級写像 $f : M \rightarrow L^3$ が極大面であるとは、 M の開かつ稠密な部分集合 W が存在し、制限写像 $f|_W : W \rightarrow L^3$ が共形極大はめ込みを与え、さらに $df(p) = 0$ となる点 $p \in M$ が存在しないときをいう。

さて、極大面にはどのような特異点が現れるのであろうか。Fujimori-Saji-Umehara-

* 本研究は JSPS 科研費 19K14526, 20H01801 の助成を受けたものです。

*1 2次元 C^∞ 級多様体 M から 3次元 C^∞ 級多様体 N^3 への C^∞ 級写像 $f : M \rightarrow N^3$ に対して、 $p \in M$ が f の特異点であるとは、 f が p においてはめ込みでないときをいう。特異点でない点を正則点という。

Yamada [8] は極大面のジェネリックな特異点^{*2}は、カスプ辺、ツバメの尾、カスプ状交差帽子であることを示した。ここで、 M を 2 次元 C^∞ 級多様体、 N^3 を 3 次元 C^∞ 級多様体、 $f : M \rightarrow N^3$ を C^∞ 級写像とすると、点 $p \in M$ がカスプ辺であるとは、 f の p における写像芽が $f_{ce} : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ ($f_{ce}(u, v) = (u, v^2, v^3)$) と右左同値^{*3} であるときをいう。同様に、点 $p \in M$ がツバメの尾 (resp. カスプ状交差帽子) であるとは、 f の p における写像芽が f_{sw} (resp. f_{ccr}) の原点での写像芽と右左同値であるときをいう。ここで、 $f_{sw}(u, v) = (3u^4 + u^2v, -4u^3 - 2uv, v)$, $f_{ccr}(u, v) = (u, v^2, uv^3)$ とする。



図1 カスプ辺 (左), ツバメの尾 (中央), カスプ状交差帽子 (右)

一方、ジェネリックな特異点以外に極大面に現れる特異点として、錐状特異点、折り目特異点、カスプ状 S_1^- 特異点が知られている。

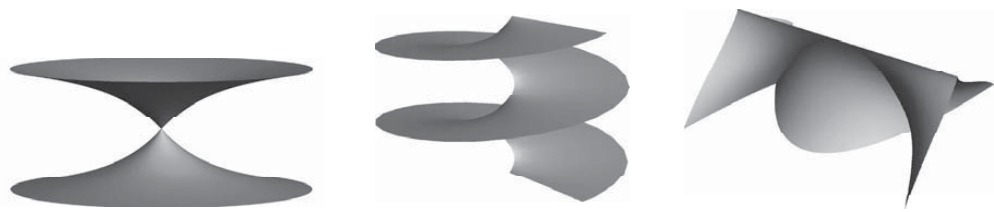


図2 左の図は極大カテナイドと呼ばれる極大面で、錐状特異点を持つ。中央の図は極大ヘリコイド極大面で、折り目特異点を持つ。右図はカスプ状 S_1^- 特異点の標準形。

ここで、錐状特異点 (resp. 折り目特異点) とは、 $f_{cone}(u, v) = (v, v \cos u, v \sin u)$ (resp. $f_{fold}(u, v) = (u, v^2, 0)$) と右左同値な特異点である。さらに、0 以上の整数 k に対し

^{*2} 正確な主張は [8, Theorem A] を参照せよ。
^{*3} C^∞ 級多様体間の C^∞ 級写像 $f_i : M_i \rightarrow N_i$ ($i = 1, 2$) の点 $p_i \in M_i$ ($i = 1, 2$) における写像芽 $f_i : (M_i, p_i) \rightarrow (N_i, f_i(p_i))$ ($i = 1, 2$) が右左同値であるとは、微分同相写像芽 $\varphi : (M_1, p_1) \rightarrow (M_2, p_2)$, $\psi : (N_1, f_1(p_1)) \rightarrow (N_2, f_2(p_2))$ が存在して $\psi \circ f_1 \circ \varphi^{-1} = f_2$ が成り立つときをいう。

$f_{cs_k^\pm}(u, v) = (u, v^2, v^3(u^{k+1} \pm v^2))$ と右左同値な特異点をカスプ状 S_k^\pm 特異点という。カスプ状 S_k^+ 特異点, カスプ状 S_k^- 特異点をまとめてカスプ状 S_k 特異点という。 k が偶数のとき, カスプ状 S_k^+ 特異点とカスプ状 S_k^- 特異点は右左同値である。また, $k = 0$ のとき, カスプ状 S_0 特異点はカスプ状交差帽子である。

定義 1.2 (波面, フロントル, 非退化な特異点). 2次元 C^∞ 級多様体 M 上で定義された C^∞ 級写像 $f: M \rightarrow \mathbf{R}^3$ がフロントルであるとは, 各点 $p \in M$ に対して, その開近傍 D と C^∞ 級写像 $\nu: D \rightarrow S^2$ で

$$df_q(\mathbf{v}) \cdot \nu(q) = 0 \quad (q \in D, \mathbf{v} \in T_q D)$$

をみたすものが存在するときをいう。ここで, S^2 は \mathbf{R}^3 の単位球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

とする。さらに, 写像 $L = (f, \nu)$ が $\mathbf{R}^3 \times S^2$ へのはめ込みを与えるとき, f を波面という。 C^∞ 級関数 λ を $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$ とするとき, $p \in D$ が f の特異点であることと $\lambda(p) = 0$ であることは同値である。特異点 $p \in D$ が

$$d\lambda(p) \neq 0$$

をみたすとき非退化な特異点という。このとき, 陰関数定理により正の数 ε と D 内の正則曲線 $\gamma(t)$ ($|t| < \varepsilon$) が存在して, $\gamma(0) = p$ かつ, f の特異点集合 $\Sigma(f)$ は p の近くで $\gamma(t)$ によりパラメトライズされる。 $\gamma(t)$ を p における特異曲線という。さらに, $\gamma(t)$ に沿う至る所消えないベクトル場 $\eta(t)$ で $df_{\gamma(t)}(\eta(t)) = \mathbf{0}$ をみたすものを退化ベクトル場という。

f が波面 (resp. フロントル) であることは, 値域の座標変換で不変である。したがって, 2次元 C^∞ 級多様体 M から 3次元 C^∞ 級多様体 N^3 への C^∞ 級写像 $f: M \rightarrow N^3$ が波面 (resp. フロントル) であることを N^3 の各座標近傍 (V, ψ) に対して $\psi \circ f: M \rightarrow \mathbf{R}^3$ が波面 (resp. フロントル) であることにより定めると well-defined である。特異点の非退化性, 特異曲線や退化曲線も同様に定義される。

極大面はフロントルである [20]。カスプ辺, ツバメの尾, カスプ状交差帽子, 錐状特異点, 折り目特異点, カスプ状 S_k^\pm 特異点はフロントルに現れる特異点である。 C^∞ 級写像 $f: M \rightarrow N^3$ が $p \in M$ において錐状特異点を持つとき,

- (i) f は p の近傍で波面であり, p は非退化な特異点, かつ
- (ii) 十分小さい正の数 ε に対して, p を通る特異曲線 $\gamma(t)$ ($|t| < \varepsilon$) の像 $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon))$ は 1 点集合である。

そこで、 C^∞ 級写像 $f : M \rightarrow N^3$ の特異点 $p \in M$ が条件 (i), (ii) を満たすとき、 $p \in M$ を一般化された錐状特異点と呼ぶ。

極大面に現れる錐状特異点、折り目特異点、カスプ状 S_k^\pm 特異点に関して、以下のことが知られている：

- 極大面が一般化された錐状特異点を持つならば、極大面の像はその点に関して点対称性を持つ (Kim-Yang [13]).
- 極大面が折り目特異点を持つならば、極大面の像は特異点集合を越えて、時間的極小曲面に実解析的に延長される (Gu [9], Kim-Koh-Shin-Yang [12], Fujimori-Kim-Koh-Rossmann-Shin-Umehara-Yamada-Yang [6]).
- 極大面はカスプ状 S_1^+ 特異点とカスプ状 S_k^\pm 特異点 ($k \geq 2$) を許容しない (Ogata-Teramoto [18], Matsushita-Nakashima-Teramoto [17]).

2 ド・ジッター空間の空間的平均曲率 1 曲面の特異点

4次元ミンコフスキー空間 $L^4 = (\mathbf{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)$ の超曲面

$$S_1^3 = S_1^3(1) = \{\mathbf{x} \in L^4; \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$$

を3次元ド・ジッター空間という。 S_1^3 は測地的完備、連結かつ単連結な定曲率 1 をもつ3次元ローレンツ多様体としての特徴付けをもつ。

S_1^3 の空間的平均曲率 1 曲面 (空間的 CMC 1 曲面) と L^3 の極大曲面との間には Lawson 型の等長対応 (cf. [16]) が存在することが知られている (cf. [3, 20]). S_1^3 の完備な空間的 CMC 1 曲面は平坦で全臍的なものに限る (Akutagawa [1], Ramanathan [19]). Fujimori [5] は S_1^3 の特異点を許容する空間的 CMC 1 曲面である、CMC 1 面を導入した。CMC 1 面は、 L^3 の極大面に対応するクラスとみなされる。

定義 2.1 (Fujimori [5]). Riemann 面 M 上で定義された C^∞ 級写像 $f : M \rightarrow S_1^3$ が CMC 1 面であるとは、 M の開かつ稠密な部分集合 W が存在し、制限写像 $f|_W : W \rightarrow S_1^3$ が共形 CMC 1 はめ込みを与え、さらに $df(p) = 0$ となる点 $p \in M$ が存在しないときをいう。

Fujimori-Saji-Umehara-Yamada [8] は S_1^3 の CMC 1 面のジェネリックな特異点は、カスプ辺、ツバメの尾、カスプ状交差帽子であることを示した。一方で、CMC 1 面のジェネリックでない特異点についてはあまりわかっていない。そこで、CMC 1 面にはどのような特異点が現れるのか、という自然な問いが提起される。

著者は佐藤氏との共同研究 [10] において、次を得た。

定理 2.2 ([10]). S_1^3 の CMC 1 面に現れる非退化な特異点は次のいずれかである：

- (1) A_k 特異点 ($k = 2, 3, 4$),
- (2) 一般化された A_k 特異点 ($k \geq 5$),
- (3) 一般化された錐状特異点,
- (4) カスパ状 S_k 特異点 ($k \geq 0$),
- (5) $\operatorname{Re} \varphi = 0$, $\operatorname{Im}(D\varphi) = 0$, $\operatorname{Re}(D^2\varphi) = 12$ を満たす非退化特異点,
- (6) 5/2-カスパ辺.

ここで, $\varphi, D\varphi, D^2\varphi$ は

$$\varphi := \frac{dg}{g^2\omega}, \quad D\varphi := g \frac{d\varphi}{dg}, \quad D^2\varphi := g \frac{d(D\varphi)}{dg}$$

により定まる有理型関数, (g, ω) を Weierstrass データとする (cf. 事実 3.2).

また, 波面 $f: M \rightarrow N^3$ に対し, 写像芽 $f_{A_k}: (u, v) \mapsto (u, -(k+1)v^k - 2uv, kv^{k+1} + uv^2)$ と右左同値である特異点 $p \in M$ を A_k 特異点という. $F(t, x, y, z) := t^{k+1} + xt^2 + yt + z$ と定めるとき, f_{A_k} の像は

$$\mathcal{D}_F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \exists t \in \mathbf{R} \text{ s.t. } F = F_t = 0\}$$

と一致する. さらに, A_2 特異点はカスパ辺, A_3 特異点はツバメの尾である. A_4 特異点はカスパ状バタフライと呼ばれる.

C^∞ 級写像 $f: M \rightarrow N^3$ が $p \in M$ において A_k 特異点を持つとき,

- (i) f は p の近傍で波面であり, p は非退化な特異点, かつ
- (ii) $\gamma(t)$ ($|t| < \varepsilon$) を $p = \gamma(0)$ を通る特異曲線, $\eta(t)$ を $\gamma(t)$ に沿う退化ベクトル場とするとき,

$$\delta(0) = \delta'(0) = \dots = \delta^{(k-3)}(0) = 0, \quad \delta^{(k-2)}(0) \neq 0$$

が成り立つ. ただし, $\delta(t) := \det(\gamma'(t), \eta(t))$ とする.

そこで, C^∞ 級写像 $f: M \rightarrow N^3$ の特異点 $p \in M$ が条件 (i), (ii) を満たすとき, $p \in M$ を一般化された A_k 特異点という.

A_k 特異点は一般化された A_k 特異点である. 逆に, $k = 2, 3, 4$ のとき, 一般化された A_k 特異点は A_k 特異点であることが知られている (Kokubu-Rossman-Saji-Umehara-Yamada [15], Izumiya-Saji [11]).

非退化な特異点の分類 (定理 2.2) の系として次を得る.

Corollary 2.3. S_1^3 の CMC1 面は折り目特異点を許容しない.

これまでの先行研究においては, S_1^3 の CMC1 面は, L^3 の極大面と Lawson 型の等長対応をもち, ジェネリックな特異点も同一であるという, 局所的な類似性が指摘されていた. 一方で, 本研究の結果, S_1^3 の CMC1 面と L^3 の極大面は, ジェネリックでない特異点において, 互いに異なる性質をもつことが明らかになった.

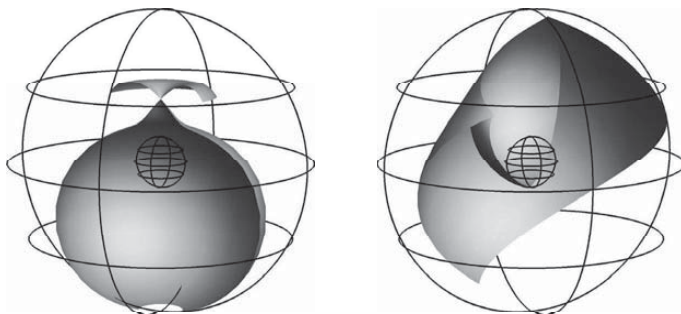


図3 左: S_1^3 の錐状特異点をもつ CMC1 面. 右: $5/2$ -カusp辺をもつ CMC1 面. それぞれ, 極大カタノイド, 極大ヘリコイドの Lawson 型等長対応物である.

3 特異点の双対性

ミンコフスキー空間 L^3 の極大面はユークリッド空間 E^3 の極小曲面と類似の Weierstrass 型表現公式をもつ.

事実 3.1 ([20, 14]). 複素平面 C の単連結領域 D に対し, g を D 上の有理型関数, ω を D 上の正則 1 次微分で, $(1 + |g|^2)^2 |\omega|^2$ が D 上のリーマン計量を与え, $(1 - |g|^2)^2$ が恒等的に消えないものとする. このとき,

$$f(z) := \operatorname{Re} F(z) \quad \left(z \in D, F(z) := \int_{z_0}^z (1 + g^2, \sqrt{-1}(1 - g^2), -2g)\omega \right)$$

により定まる $f : D \rightarrow L^3$ は極大面を与える. ただし $z_0 \in D$ を基点とする. 逆に, 任意の極大面は局所的にこの方法で与えられる.

ペア (g, ω) を **Weierstrass データ** と呼ぶ. E^3 の極小曲面の場合と同様に

$$f^\sharp(z) := \text{Im } F(z) \quad (z \in D)$$

により定まる極大面 $f^\sharp : D \rightarrow L^3$ を f の **共役極大面** と呼ぶ. 対応する Weierstrass データは $(g, -\sqrt{-1}\omega)$ である.

極大面が **X 型の特異点** と **Y 型の特異点** との間に **双対性をもつ** とは,

- 極大面 f が $p \in D$ において X 型の特異点をもつことと, 共役極大面 f^\sharp が $p \in D$ において Y 型の特異点をもつことが同値であり,
- 極大面 f が $p \in D$ において Y 型の特異点をもつことと, 共役極大面 f^\sharp が $p \in D$ において X 型の特異点をもつことが同値である,

が成り立つときをいう. 同じ X 型の特異点の間に双対性をもつとき, 極大面は **X 型の特異点に自己双対性をもつ** という.

以下のような双対性 (I)–(III) が知られている ([21, 8, 13, 7, 6, 18]):

- (I) 極大面はカスプ辺に自己双対性を持ち, ツバメの尾とカスプ状交差帽子との間に双対性をもつ ([21, 8]).
- (II) 極大面は一般化された錐状特異点と折り目特異点との間に双対性をもつ ([13, 7, 6]).
- (III) 極大面はカスプ状 S_1^- 特異点とカスプ状バタフライとの間に双対性をもつ ([18]).

双対性 (I)–(III) に現れる特異点の型は, 極大面のジェネリックな特異点の分類 [8] や, Kim-Yang [13] による鏡像の原理など, 重要な性質を持つことが知られている.

事実 3.2 ([5, 2]). 複素平面 C の単連結領域 D に対し, g を D 上の有理型関数, ω を D 上の正則 1 次微分で, $(1 + |g|^2)|\omega|^2$ が D 上のリーマン計量を与え, $(1 - |g|^2)^2$ が恒等的に消えないものとする. $z_0 \in D$ を固定する. $F : D \rightarrow \text{SL}(2, C)$ を

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega, \quad F(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の解とするとき, $f = Fe_3F^* : D \rightarrow S_1^3$ は CMC 1 面である. 逆に, 任意の CMC 1 面は局所的にこの方法で与えられる.

S_1^3 の CMC 1 面に対しても, 極大面の場合と同様に, 共役 CMC 1 面を定義することが

でき、次が成り立つ：

CMC 1 面はカस्प辺において自己双対性をもち、ツバメの尾とカस्प状交差帽子との間に双対性をもつ ([8]).

したがって、極大面における (II) や (III) に対応する双対性が S_1^3 の CMC 1 面においても成り立つか、という問いが自然に考えられる。

定理 3.3 ([10]). S_1^3 の CMC 1 面は一般化された錐状特異点と $5/2$ -カस्प辺との間に双対性をもつ。

定理 3.4 ([10]). 次が成り立つ：

- (1) S_1^3 の CMC 1 面は許容的なカस्प状 S_1 特異点と許容的な A_4 特異点との間に双対性をもつ。
- (2) k を 2 以上の整数とする. S_1^3 の CMC 1 面はカस्प状 S_k 特異点と一般化 A_{k+3} 特異点との間に双対性をもつ。

ここで‘許容的’であることは、特異点における不変量を用いて定義される。詳しくは [10] を参照せよ。定理 3.3 は極大面における双対性 (II)、定理 3.4 (1) は双対性 (III) に対応する結果とみなされる。 L^3 の極大面はカस्प状 S_k 特異点 ($k \geq 2$) を許容しないため ([17])、定理 3.4 (2) に対応するような結果は極大面の場合には成り立たず、定理 3.4 (2) のような現象は S_1^3 の CMC 1 面特有のものといえる。

参考文献

- [1] K. Akutagawa, *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space*, Math. Z. **196** (1987), 13–19.
- [2] R. Aiyama, K. Akutagawa, *Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^3(-c^2)$ and $S_1^3(c^2)$* , Ann. Global Anal. Geom. **17** (1999), 49–75.
- [3] R. L. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Théorie des variétés minimales et applications, Sémin. Palaiseau/France, 1983/1984, Astérisque 154-155, 321–347 (1988).
- [4] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. 15, 223–230 (1970).
- [5] S. Fujimori, *Spacelike CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 289–320.
- [6] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in ミンコフスキー 3-space and 2-dimensional fluid mechanics*, Math. J. Okayama Univ. **57** (2015), 173–200.
- [7] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *New maximal surfaces in Minkowski 3-space with arbitrary genus and their cousins in de Sitter 3-space*, Result. Math. **56** (2009), 41–82.

- [8] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.
- [9] C. Gu, *The extremal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space*, Acta. Math. Sinica. **1** (1985), 173–180.
- [10] A. Honda and H. Sato, *Singularities of spacelike mean curvature one surfaces in de Sitter space*, preprint (arXiv:2103.13849).
- [11] S. Izumiya and K. Saji, *The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and “flat” spacelike surfaces*, J. Singul. **2** (2010), 92–127.
- [12] Y.W. Kim, S.-E. Koh, H. Shin and S.-D. Yang, *Spacelike maximal surfaces, timelike minimal surfaces, and Björling representation formulae*, J. Korean Math. Soc. **48** (2011), 1083–1100.
- [13] Y.W. Kim and S.-D. Yang, *Prescribing singularities of maximal surfaces via a singular Björling representation formula*, J. Geom. Phys. **57** (2007), 2167–2177.
- [14] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3* , Tokyo J. Math. **6** (1983), 297–309.
- [15] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351; addendum **294** (2018), 505–509.
- [16] B. Lawson, *Complete minimal surfaces in S^3* , Ann. of Math. (2) **92** (1970), 335–374.
- [17] Y. Matsushita, T. Nakashima and K. Teramoto, *Geometric properties near singular points of surfaces given by certain representation formulae*, preprint (arXiv:2003.10635).
- [18] Y. Ogata, and K. Teramoto, *Duality between cuspidal butterflies and cuspidal S_1^- singularities on maximal surfaces*, Note Mat. **38** (2018), 115–130.
- [19] J. Ramanathan, *Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter space*, Indiana Univ. Math. J. (2) **36** (1987), 349–359.
- [20] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. (2) **137** (1993), 611–638.
- [21] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.