対称空間の一般化と対蹠集合

東京都立大学・理学研究科　酒井 高司

Takashi Sakai
Department of Mathematical Sciences
Tokyo Metropolitan University

1　導入

Riemann 対称空間は，Riemann 多様体の重要なクラスとして精緻な研究が行われ，洗練された理論が構築されている．1988 年に Chen–Nagano [2] はコンパクト対称空間の極地と対蹠集合の構造および幾何学との関係について研究を行った．一方で，対称空間の拡張概念についても，様々な観点からの一般化が与えられ，研究が進められている．たとえば，Ledger [8], Ledger–Obata [9], Kowalski [7] らは，位数が一般の点対称を持つ空間として正則 s 多様体の研究を行っている．1981 年に Lutz [11] は各点において有限 abel 群 Γ の対称性を持つ空間として Γ 対称空間を定義した．我々は，対蹠集合に着目することで，Γ 対称空間の拡張として，有限 abel 群とは限らない一般の群 Γ の対称性を持つ空間を導入し，一般化された s 多様体と呼んだ．本稿では，まず一般化された s 多様体の定義を説明し，その極地と対蹠集合の構造と性質について述べる．また，一般化された s 多様体の具体例を与え，それらの極大対蹠集合を示す．これらの内容は大野晋司氏（日本大学）との共同研究に基づく．

Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現の軌道として与えられるコンパクト等質空間は R 空間と呼ばれる．特に，対称空間の構造を持つ R 空間は対称 R 空間と呼ばれ，顕著な幾何学的性質を持つことが知られている．第 4 節では，対称 R 空間の自然な一般化として，R 空間に入る Γ 対称空間の構造について述べる．後半の内容は，Peter Quast 氏（Augsburg 大学）との共著論文 [12] の解説である．

2　対称空間の一般化

連結 Riemann 多様体 M は，各点 $x \in M$ において点対称，すなわち x を通る測地線の向きを入れ替える等長変換 s_x が存在するとき Riemann 対称空間と呼ばれる．Loos [10]

本研究は JSPS 科研費 No. 17K05223, 21K03250 の助成を受けたものである．

および長野 [17] は Riemann 対称空間の点対称の集合 $\{s_x\}_{x\in M}$ が持つ代数構造に着目することで，Riemann 計量を用いずに次のように対称空間の定義を与えた．

定義 2.1. C^∞ 級多様体 M の各点 x に対し，M の微分同型写像 $s_x \in \mathrm{Diff}(M)$ で次の条件を満たすものが存在するとき，M を**対称空間**と呼ぶ．

(1) 写像 $\mu : M \times M \to M;\ (x, y) \mapsto s_x(y)$ は C^∞ 級，
(2) 各点 $x \in M$ について s_x は対合的，すなわち $(s_x)^2 = \mathrm{id}_M$，
(3) 各点 $x \in M$ は s_x による孤立固定点，すなわち x は s_x による固定点集合 $F(s_x, M) := \{y \in M \mid s_x(y) = y\}$ の孤立点，
(4) 任意の $x, y \in M$ について，$s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

このとき，s_x を M の点 x における**点対称**と呼ぶ．

この定義により対称空間は**カンドル**になる．定義 2.1 において条件 (2) を除いたものは**正則 s 多様体**と呼ばれ，特に s_x が位数 k のとき **k 対称空間**と呼ばれる．さらに，Lutz [11] は正則 s 多様体の拡張として次のように Γ 対称空間を定義した．

定義 2.2 (Lutz [11])**.** M を連結な C^∞ 級多様体とし，Γ を有限 abel 群とする．$\mu = \{\mu^\gamma : M \times M \to M : C^\infty \text{ 級} \mid \gamma \in \Gamma\}$ が次を満たすとき M 上の **Γ 対称構造**と呼び，(M, μ) を **Γ 対称空間**と呼ぶ．

(1) 各点 $x \in M$ において，$\Gamma \to \mathrm{Diff}(M);\ \gamma \mapsto \gamma_x := \mu^\gamma(x, \cdot)$ は単射準同型，すなわち $\Gamma_x := \{\gamma_x\}_{\gamma\in\Gamma}$ は Γ と同型な $\mathrm{Diff}(M)$ の部分群になる．
(2) 各点 $x \in M$ は Γ_x の孤立固定点，すなわち x は Γ_x による固定点集合 $F(\Gamma_x, M) := \{y \in M \mid \gamma_x(y) = y\ (\forall \gamma \in \Gamma)\}$ の孤立点．
(3) 任意の $x \in M$ と $\gamma \in \Gamma$ について，γ_x は μ の自己同型，i.e.
$$\mu^\delta\bigl(\gamma_x(y), \gamma_x(z)\bigr) = \gamma_x\bigl(\mu^\delta(y, z)\bigr) \quad (\forall y, z \in M,\ \forall \delta \in \Gamma).$$

$\Gamma = \mathbb{Z}_2$ のとき，Γ 対称空間 (M, μ) は定義 2.1 の対称空間になる．さらに，$\Gamma = \mathbb{Z}_k$ のとき (M, μ) は k 対称空間であり，$\Gamma = \mathbb{Z}$ のとき (M, μ) は正則 s 多様体になる．

次に Γ を有限 abel 群とは限らない一般の群として，次のように一般化された s 多様体の定義を与える．

定義 2.3 (Ohno–S.)**.** M を C^∞ 級多様体とし，Γ を (Lie) 群とする．M の各点 x に対して群の準同型 $\varphi_x : \Gamma \to \mathrm{Diff}(M)$ が与えられ，$\{\varphi_x\}_{x\in M}$ が次を満たすとき，$(\Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ を M 上の**一般化された s 構造**と呼び，$(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ を**一般化された s 多様体**と呼ぶ．

(1) 各 $\gamma \in \Gamma$ に対し，$M \times M \to M$; $(x,y) \mapsto \varphi_x(\gamma)(y)$ は C^∞ 級，
Γ が Lie 群の場合は，$\mu : \Gamma \times M \times M \to M$; $(\gamma, x, y) \mapsto \varphi_x(\gamma)(y)$ が C^∞ 級.

(2) x は $\Gamma_x := \varphi_x(\Gamma)$ の孤立固定点，すなわち x は Γ_x による固定点集合 $F(\Gamma_x, M) := \{y \in M \mid \varphi_x(\gamma)(y) = y \ (\forall \gamma \in \Gamma)\}$ の孤立点.

(3) 任意の $x, y \in M$ と $\gamma, \delta \in \Gamma$ について，

$$\varphi_x(\gamma) \circ \varphi_y(\delta) \circ \varphi_x(\gamma)^{-1} = \varphi_{\varphi_x(\gamma)(y)}(\gamma\delta\gamma^{-1}).$$

このとき，Diff(M) の部分群 $\Gamma_x := \varphi_x(\Gamma)$ を M の点 x における**対称変換群**と呼ぶ.

Γ が有限 abel 群であるとき，$\gamma \in \Gamma$ に対して，

$$\mu^\gamma(x,y) = \gamma_x(y) := \varphi_x(\gamma)(y) \quad (x, y \in M)$$

によって $\mu^\gamma : M \times M \to M$ を定めると，

$$\begin{aligned}
\varphi_x(\gamma)\big(\varphi_y(\delta)(z)\big) &= \varphi_{\varphi_x(\gamma)(y)}(\gamma\delta\gamma^{-1})\big(\varphi_x(\gamma)(z)\big) \\
\iff \quad & \gamma_x\big(\mu^\delta(y,z)\big) = \varphi_{\gamma_x(y)}(\delta)\big(\gamma_x(z)\big) \\
\iff \quad & \gamma_x\big(\mu^\delta(y,z)\big) = \mu^\delta\big(\gamma_x(y), \gamma_x(z)\big)
\end{aligned}$$

となる．したがって，Γ 対称空間は一般化された s 多様体である.

3　一般化された s 多様体の極地と対蹠集合

Chen–Nagano [2] によるコンパクト対称空間の極値と対蹠集合の概念は一般化された s 多様体 $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x \in M})$ に対して次のように拡張される.

定義 3.1. A を M の部分集合とする.

(1) 任意の $x, y \in A$, $\gamma \in \Gamma$ に対して，

$$\varphi_x(\gamma)y = y$$

が成り立つとき，すなわち $y \in F(\Gamma_x, M)$ となるとき，A を $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x \in M})$ の**対蹠集合**と呼ぶ.

(2) A が対蹠集合であって，A を含む任意の対蹠集合が A と一致するとき，A を**極大対蹠集合**と呼ぶ.

(3)
$$\#_\Gamma(M) := \sup\{\#(A) \mid A \text{ は } M \text{ の対蹠集合 }\}$$

と定義し，$\#_\Gamma(M)$ を $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ の**対蹠数**と呼ぶ．対蹠数 $\#_\Gamma(M)$ は無限大も許すこととする．

(4) $\#_\Gamma(M) = \#(A)$ を満たす極大対蹠集合 A を**大対蹠集合**と呼ぶ．

これらの定義は M がコンパクト対称空間である場合には Chen–Nagano による定義と一致する．特に，コンパクト対称空間 M の対蹠数は 2-number と呼ばれ，$\#_2 M$ と表される．対称 R 空間の 2-number に関して次の定理が知られている．

定理 3.2 (Takeuchi [13])**.** 対称 R 空間 M に対して，次が成り立つ．

$$\#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2).$$

例 3.3 (トーラス T^2 上の一般化された s 構造の例)**.** 2 次元トーラス $M = T^2 = S^1 \times S^1 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ に，次のように一般化された s 構造を与える．

$\mathbb{R}^2$ の線形変換で格子 $\mathbb{Z}^2$ を保つものは T^2 の変換を定める．次の (1)〜(5) で与える Γ_o は T^2 の原点 $o := [(0,0)]$ における対称変換群を定め，さらに平行移動により T^2 の各点での対称変換群を定めると，T^2 上の一般化された s 構造（Γ 対称構造）が得られる．これらの一般化された s 構造に対して $F(\Gamma_o, T^2)$ は離散的になり，それぞれ大対蹠集合になる．

(1) $\Gamma_o = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2$　対称空間

$$F(\Gamma_o, T^2) = \{[(0,0)],\ [(0,1/2)],\ [(1/2,0)],\ [(1/2,1/2)]\}$$

(2) $\Gamma_o = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$$F(\Gamma_o, T^2) = \{[(0,0)],\ [(0,1/2)],\ [(1/2,0)],\ [(1/2,1/2)]\}$$

(3) $\Gamma_o = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cong D_4$

$$F(\Gamma_o, T^2) = \{[(0,0)],\ [(1/2,1/2)]\}$$

(4) $\Gamma_o = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$$F(\Gamma_o, T^2) = \{[(0,0)],\ [(1/2,1/2)]\}$$

(5) $\Gamma_o = \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \cong \mathbb{Z}_4$

$$F(\Gamma_o, T^2) = \{[(0,0)],\ [(1/2,1/2)]\}$$

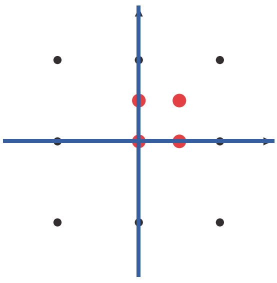

図 1　(2)

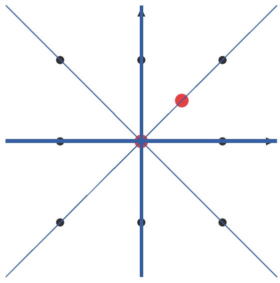

図 2　(3)

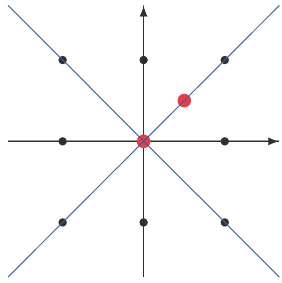

図 3　(4)

これらの例から，一般に対蹠集合および対蹠数は C^∞ 級多様体上に与えられた一般化された s 構造に依存することが分かる．

例 3.4 (球面 S^2 上の一般化された s 構造の例)**.** 2 次元球面 $M = S^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ は対称空間であり，さらに任意の $k \geq 2$ について k 対称空間の構造が定まることが知られている．

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong SO(2)$$

として，$\boldsymbol{x}_0 = (0,0,1) \in S^2$ と $\gamma \in \Gamma$ に対し，$\mathbb{R}\boldsymbol{x}_0$ を軸とする回転

$$\varphi_{\boldsymbol{x}_0}(\gamma)(\boldsymbol{y}) := \gamma \boldsymbol{y} \quad (\forall \boldsymbol{y} \in S^2)$$

によって $\varphi_{\boldsymbol{x}_0} : \Gamma \to \mathrm{Diff}(S^2)$ を定める．S^2 に推移的に作用する $SO(3)$ により，$\varphi_{\boldsymbol{x}_0}$ を各点 $\boldsymbol{x} \in S^2$ に移すことにより $\varphi_{\boldsymbol{x}}$ を定めると，$(\Gamma, \{\varphi_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x} \in S^2})$ は S^2 上の一般化された s 構造になる．このとき $F(\Gamma_{\boldsymbol{x}_0}, S^2) = \{\pm \boldsymbol{x}_0\}$ となり，これが大対蹠集合になる．

この例のように，Lie 群 Γ の対称性を持つ一般化された s 構造を考えることができる．

例 3.5 (旗多様体)**.** $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とする．$n_1 + \cdots + n_r < n$ を満たす $n, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ について，

$$F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n) := \left\{ x = (V_1, \ldots, V_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n \\ \dim V_i = n_1 + \cdots + n_i \ (i = 1, 2, \ldots, r) \end{array} \right\}$$

と与えられる旗多様体 $F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ を考える．各点 $x=(V_1,\dots,V_r)\in F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ に対して，

$$s_{V_i}=2P_{V_i}-\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n\quad (i=1,2,\dots,r)$$

と定める．ここで，$P_{V_i}:\mathbb{K}^n\to V_i$ は直交射影を表す．このとき，

$$s_{V_i}\in\mathrm{Diff}(M),\quad (s_{V_i})^2=\mathrm{id}_M,\quad s_{V_i}\circ s_{V_j}=s_{V_j}\circ s_{V_i}$$

であるから，

$$\Gamma_x=\langle s_{V_1},\dots s_{V_r}\rangle\subset\mathrm{Diff}(M)$$

は $F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ の点 x において $(\mathbb{Z}_2)^r$ と同型な対称変換群を定める．これにより，$F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ は $\Gamma=(\mathbb{Z}_2)^r$ とする一般化された s 多様体となる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \begin{matrix} F_{n_1,n_2,n_3}(\mathbb{K}^n) \\ (V_1,V_2,V_3) \end{matrix} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \\
\begin{matrix} F_{n_1,n_2}(\mathbb{K}^n) \\ (V_1,V_2) \end{matrix} \arrow[d] \arrow[dr] & \begin{matrix} F_{n_1,n_2+n_3}(\mathbb{K}^n) \\ (V_1,V_3) \end{matrix} \arrow[dl] \arrow[dr] & \begin{matrix} F_{n_1+n_2,n_3}(\mathbb{K}^n) \\ (V_2,V_3) \end{matrix} \arrow[dl] \arrow[d] & \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \\
\begin{matrix} F_{n_1}(\mathbb{K}^n) \\ V_1 \end{matrix} & \begin{matrix} F_{n_1+n_2}(\mathbb{K}^n) \\ V_2 \end{matrix} & \begin{matrix} F_{n_1+n_2+n_3}(\mathbb{K}^n) \\ V_3 \end{matrix} & \mathbb{Z}_2
\end{tikzcd}$$

定理 **3.6.** (Ohno–S.–Terauchi)

(1) $F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ の $\Gamma\cong(\mathbb{Z}_2)^r$ とする一般化された s 構造に関する極大対蹠集合は次と合同になる：

$$\begin{aligned}A=\{&(\langle \boldsymbol{e}_{i_1},\dots,\boldsymbol{e}_{i_{n_1}}\rangle_{\mathbb{K}},\langle \boldsymbol{e}_{i_1},\dots,\boldsymbol{e}_{i_{n_1+n_2}}\rangle_{\mathbb{K}},\dots,\langle \boldsymbol{e}_{i_1},\dots,\boldsymbol{e}_{i_{n_1+\cdots+n_r}}\rangle_{\mathbb{K}})\\
&\mid 1\le i_1<\cdots<i_{n_1}\le n,\ 1\le i_{n_1+1}<\cdots<i_{n_1+n_2}\le n,\dots,\\
&\quad 1\le i_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1}<\cdots<i_{n_1+\cdots+n_r}\le n,\\
&\quad \#\{i_1,\dots,i_{n_1+\cdots+n_r}\}=n_1+\cdots+n_r\}.\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{K}^n$ の標準基底である．

(2)

$$\#_\Gamma(F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!n_{r+1}!}$$
$$= \dim H_*(F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n); \mathbb{Z}_2),$$

$n_{r+1} := n - (n_1 + \cdots n_r)$.

定義 3.7 (Bahturin–Goze [1], Goze–Remm [4], 寺内 [16])**.** G を連結 Lie 群とし，Γ を G の自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ の有限 (abel) 部分群とする．K は G の閉部分群であり，次を満たすとする：

$$F(\Gamma, G)_0 \subset K \subset F(\Gamma, G).$$

このとき，(G, K, Γ) を Γ **対称対**と呼ぶ．ここで，$F(\Gamma, G) := \{g \in G \mid \gamma(g) = g\ (\forall\gamma \in \Gamma)\}$ であり，$F(\Gamma, G)_0$ はその単位連結成分を表す．

(G, K, Γ) が Γ 対称対であるとき，各点 $x = g_x K \in G/K$ と各 $\gamma \in \Gamma$ に対し，

$$\varphi_x(\gamma) : G/K \to G/K;\ gK \mapsto g_x\gamma(g_x^{-1}g)K$$

によって $\varphi_x : \Gamma \to \mathrm{Diff}(G/K)$ を定めると，$(\Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in G/K})$ は G/K 上の G 同変な一般化された s 構造になる．

G をコンパクト Lie 群とし，(G, K_1, σ_1) と (G, K_2, σ_2) が共にコンパクト対称対であるとする．このとき，(G, K_1, K_2) をコンパクト対称三対と呼ぶ．G の二つの対合 σ_1 と σ_2 で生成される $\mathrm{Aut}(G)$ の部分群を $\Gamma := \langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$ とすると，$(G, K_1 \cap K_2, \Gamma)$ は Γ 対称対となる．したがって，等質空間 $M := G/(K_1 \cap K_2)$ には G 同変な一般化された s 多様体の構造が定まる．

- $\sigma_1 = \sigma_2$ のとき，$\Gamma \cong \mathbb{Z}_2$ となり，$M = G/(K_1 \cap K_2) = G/K_1 = G/K_2$ は対称空間である．
- $\sigma_1 \neq \sigma_2$，$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ のとき，$\Gamma \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ となり，$M = G/(K_1 \cap K_2)$ は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間になる．等質な $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間は Bahturin–Goze [1], Kollross [6] により分類が与えられている．
- $\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$ のとき，$\Gamma = \langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$ は非可換群となり，$M = G/(K_1 \cap K_2)$ は一般化された s 多様体になる．

M は対称空間 G/K_1 および G/K_2 上のファイブレーションの構造を持ち（図 4），その射影を $\pi_i : M = G/(K_1 \cap K_2) \to G/K_i$ $(i = 1, 2)$ と表すと，M 上の対称変換 $\varphi_x(\sigma_1)$

(resp. $\varphi_x(\sigma_2)$) は π_1 (resp. π_2) によって G/K_1 (resp. G/K_2) の点対称 s_x^1 (resp. s_x^2) に写される．すなわち各点 $x \in M$ に対して $\pi_i \circ \varphi_x(\sigma_i) = s^i_{\pi_i(x)} \circ \pi_i$ $(i = 1, 2)$ が成り立つ．さらに，σ_1 と σ_2 が可換な場合は，$\varphi_x(\sigma_2)$ (resp. $\varphi_x(\sigma_1)$) も G/K_1 (resp. G/K_2) の対称変換を定め，G/K_1 (resp. G/K_2) に $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称構造が誘導される．つまり，G/K_1 (resp. G/K_2) は対称空間であるが，もう一つ対称変換が付加され，$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間になる．

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\pi"] & & \\ & G/(K_1 \cap K_2) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & & \text{一般化された } s \text{ 多様体} \\ G/K_1 & & G/K_2 & \text{対称空間} \end{tikzcd}$$

図 4

例 3.8. (大久保 [15]).　$G = SU(4)$ 上に

$$\sigma_1(g) = \overline{g}, \qquad \sigma_2(g) = sgs^{-1} \quad \left(s := \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}\right)$$

によって二つの対合 σ_1, σ_2 を与える．σ_1, σ_2 は可換であり，$K_1 = F(\sigma_1, G) = SO(4)$, $K_2 = F(\sigma_2, G) = S(U(2) \times U(2))$ であるから，$(G, K_1, K_2) = \big(SU(4), SO(4), S(U(2) \times U(2))\big)$ は可換なコンパクト対称三対となり，$G/(K_1 \cap K_2) = SU(4)/S\big(O(2) \times O(2)\big)$ は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間になる．二つのコンパクト対称空間 G/K_1 と G/K_2 は

$$\begin{aligned} G/K_1 &= SU(4)/SO(4) \cong \mathrm{SLag}\mathbb{C}^4 \\ G/K_2 &= SU(4)/S\big(U(2) \times U(2)\big) \cong G_2(\mathbb{C}^4) \end{aligned}$$

にように $\mathbb{C}^4$ 内の特殊 Lagrange 部分空間全体のなす Grassmann 多様体 $\mathrm{SLag}\mathbb{C}^4$，および $\mathbb{C}^2$ 内の複素 2 次元部分空間全体のなす複素 Grassmann 多様体 $G_2(\mathbb{C}^4)$ として幾何的に実現される．また，

$$G \times (G/K_1 \times G/K_2) \to G/K_1 \times G/K_2; \ \big(g, (x, y)\big) \mapsto (gx, gy)$$

によって二つの対称空間の直積空間 $G/K_1 \times G/K_2$ への G 作用を定めると，原点 $o := (eK_1, eK_2) \in G/K_1 \times G/K_2$ における固定部分群は $K_1 \cap K_2$ となる．したがって，

原点 o を通る G 軌道として $G/(K_1 \cap K_2)$ を $G/K_1 \times G/K_2 \cong \mathrm{SLag}\mathbb{C}^4 \times G_2(\mathbb{C}^4)$ に埋め込むことができる．このとき，$\mathrm{SLag}\mathbb{C}^4 \times G_2(\mathbb{C}^4)$ の部分集合

$$A_{48} = \left\{ \left(\langle \varepsilon_1 \boldsymbol{e}_1, \varepsilon_2 \boldsymbol{e}_2, \varepsilon_3 \boldsymbol{e}_3, \varepsilon_4 \boldsymbol{e}_4 \rangle_{\mathbb{R}}, \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k \rangle_{\mathbb{C}} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \left\{1, \sqrt{-1}\right\} \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = \pm 1 \\ 1 \leq j < k \leq 4 \end{array} \right\}$$

は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称空間 $G/(K_1 \cap K_2)$ の極大対蹠集合になる．

定義 3.9. 一般化された s 多様体 $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x \in M})$ の部分多様体 N が

$$\varphi_x(\gamma)(N) = N \quad (\forall x \in N, \gamma \in \Gamma)$$

を満たすとき M の**部分空間**と呼ぶ．

M の部分空間 N には一般化された s 構造が誘導され，このとき N の対蹠集合は M の対蹠集合になる．したがって次の命題を得る．

命題 3.10. $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x \in M})$ を一般化された s 多様体とし，N をその部分空間とする．各点 $x \in N$ において，各 $\gamma \in \Gamma$ に対して，$\widetilde{\varphi}_x(\gamma) := \varphi_x(\gamma)|_N$ と定めると，$\widetilde{\varphi}_x : \Gamma \to \mathrm{Diff}(N)$ は群の準同型となり，$(\Gamma, \{\widetilde{\varphi}_x\}_{x \in N})$ は N 上の一般化された s 構造になる．さらに，このとき

$$\#_\Gamma(M) \geq \#_\Gamma(N)$$

が成り立つ．

Chen–Nagano [2] によるコンパクト対称空間の極地の概念は，一般化された s 多様体に対しても次のように与えることができる．

定義 3.11. (1) $x \in M, \gamma \in \Gamma$ に対して，$\varphi_x(\gamma)$ の固定点集合

$$F(\varphi_x(\gamma), M) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda^\gamma$$

の各連結成分 M_λ^γ を M の x に対する γ **極地**と呼ぶ．

(2) $x \in M$ に対して，$\Gamma_x := \varphi_x(\Gamma)$ の固定点集合

$$F(\Gamma_x, M) = \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} M_{\lambda'}$$

の各連結成分 $M_{\lambda'}$ を M の x に対する**極地**と呼ぶ．特に，1 点からなる極地を**極**と呼ぶ．x は Γ_x の孤立固定点であるから，$\{x\}$ を**自明な極**と呼ぶ．

命題 3.12. Γ が有限 abel 群または可換なコンパクト Lie 群であるとする.

(1) 各 $x \in M, \gamma \in \Gamma$ に対して，x における γ 極地 M_λ^γ は M の部分空間である.
(2) 各 $x \in M$ に対して，x における極地 $M_{\lambda'}$ は M の部分空間である.

A が一般化された s 多様体の大対蹠集合であるとすると，A は $F(\varphi_x(\gamma), M)$ および $F(\Gamma_x, M)$ に含まれ，定義 3.11 にある極地分解により，$A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A \cap M_\lambda^\gamma) = \bigcup_{\lambda'\in\Lambda'}(A \cap M_{\lambda'})$ と非交和に分解される．このとき，$A \cap M_\lambda^\gamma$ と $A \cap M_{\lambda'}$ はそれぞれ M_λ^γ と $M_{\lambda'}$ の対蹠集合になる．よって M の対蹠数について次の不等式を得る.

定理 3.13 (Ohno–S.)**.** Γ が有限 abel 群または可換なコンパクト Lie 群であるとし，A が $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ の大対蹠集合であるとする.

(1) $x \in A$ と $\gamma \in \Gamma$ について，$F(\varphi_x(\gamma), M)$ が x における有限個の γ 極地の非交和 $F(\varphi_x(\gamma), M) = \bigcup_{i=0}^r M_i^\gamma$ となるとき，次が成り立つ.

$$\#_\Gamma(M) \leq \sum_{i=0}^r \#_\Gamma(M_i^\gamma).$$

(2) $x \in A$ について，$F(\Gamma_x, M)$ が x における有限個の極地の非交和 $F(\Gamma_x, M) = \bigcup_{i=0}^r M_i$ となるとき，次が成り立つ.

$$\#_\Gamma(M) \leq \sum_{i=0}^r \#_\Gamma(M_i).$$

4　R 空間上の自然な Γ 対称構造

本節では，対称 R 空間の自然な拡張として，R 空間上に Γ が $\mathbb{Z}_2$ の冪となる Γ 対称構造を考える．詳しくは [12] を参照されたい.

$P = G/K$ を単連結なコンパクト Riemann 対称空間とし，G は P の等長変換群の単位連結成分であるとする．P の点対称から定まる G の対合 σ の微分 σ_* によって，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と標準分解され，σ_* の (-1) 固有空間 $\mathfrak{p}$ は射影 $\pi : G \to G/K$ の微分により $P = G/K$ の原点 $o = eK$ における接空間 T_oP と同一視される．このとき，K の T_oP への線形イソトロピー表現は G の随伴表現 Ad_G による K の $\mathfrak{p}$ への表現と同値になる.

$\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる．$\mathfrak{a}$ の双対空間 $\mathfrak{a}^*$ のベクトル $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対して，$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$

の部分空間 $\mathfrak{g}_\alpha$ を

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{Y \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \mid [H, Y] = \sqrt{-1}\alpha(H)Y \ (\forall H \in \mathfrak{a})\}$$

と定める．これにより，$P = G/K$ の制限ルート系

$$\mathcal{R} := \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$$

が定まる．$\mathcal{R}$ の基本系 $\Sigma := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset \mathfrak{a}^*$ をとり，Σ に関する正ルートの集合を $\mathcal{R}^+$ と表す．このとき，$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{k}$ はそれぞれ次のようにルート空間に分解される．

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \mathfrak{p}_\alpha, \qquad \mathfrak{p}_\alpha := (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{p},$$
$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \mathfrak{k}_\alpha, \qquad \mathfrak{k}_\alpha := (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{k}_0 := \{Y \in \mathfrak{k} \mid [\mathfrak{a}, Y] = 0\}.$$

Σ の双対基底を $\{\xi_1, \ldots, \xi_r\} \subset \mathfrak{a}$ と表す．$I_{\mathrm{reg}} := \{1, 2, \ldots, r\}$ の空でない部分集合 I に対して，$\xi_I := \sum_{i \in I} \xi_i \in \mathfrak{a}$ を定め，ξ_I を基点とする $\mathrm{Ad}_G(K)$ 軌道を

$$X_I := \mathrm{Ad}_G(K)\xi_I \subset \mathfrak{p}$$

と表す．ξ_I を固定する K のイソトロピー部分群を H_I と表すと，X_I は商多様体 K/H_I と微分同型になり R **空間**と呼ばれる．ここで，R 空間の基点を ξ_I としたが，すべての R 空間はある $I \subset I_{\mathrm{reg}}$ に対する X_I と K 同変な微分同型となるため，R 空間として X_I を考えれば十分である．このとき，$\emptyset \neq \tilde{I} \subset I \subset I_{\mathrm{reg}}$ ならば $H_I \subset H_{\tilde{I}}$ となることが示される．すなわち，$I \subset I_{\mathrm{reg}}$ は包含関係により R 空間の軌道型の階層を与える．

次に，X_I 上に Γ 対称構造を定めるための準備として，$i \in I_{\mathrm{reg}}$ に対して

$$g_i := \exp(\pi\xi_i) \in G$$

と定める．このとき，g_i による G の内部自己同型 $\mathrm{Int}_G(g_i)$ は K を不変に保つため，$\gamma^i := \mathrm{Int}_G(g_i)\big|_K$ は K の自己同型となる．g_i の定義から，γ_i $(i \in I_{\mathrm{reg}})$ は互いに可換な対合であるため，$\Gamma^{I_{\mathrm{reg}}} := \langle \gamma^i : i \in I_{\mathrm{reg}} \rangle$ は $(\mathbb{Z}_2)^r$ と同型な $\mathrm{Aut}(K)$ の部分群になる．また，$I \subset I_{\mathrm{reg}}$ に対して $\Gamma^I := \langle \gamma^i : i \in I \rangle$ と定めると，Γ^I は $(\mathbb{Z}_2)^{|I|}$ と同型な $\mathrm{Aut}(K)$ の部分群になる．

以上の設定の下で，(K, H_I, Γ^I) が Γ^I 対称対になるとき，すなわち

$$F(\Gamma^I, K)_0 \subset H_I \subset F(\Gamma^I, K) \tag{4.1}$$

が成り立つとき，I_{reg} の部分集合 I は **admissible** であるといい，このとき $X_I \cong K/H_I$ に Γ^I 対称構造が定まる．条件 (4.1) において，$H_I \subset F(\Gamma^I, K)$ は一般に成り立つことが示される．ゆえに，さらに $F(\Gamma^I, K)_0 \subset H_I$ が成り立つための必要十分条件は H_I の Lie 環 $\mathfrak{h}_I$ と $F(\Gamma^I, K)_0$ の Lie 環 $\mathfrak{f}(\Gamma^I, K)$ が一致することである．ここで $\mathfrak{h}_I$ は制限ルート系 $\mathcal{R}$ を用いて

$$\mathfrak{h}_I = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, \xi_I] = 0\} = \mathfrak{k}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_I^0} \mathfrak{k}_\alpha,$$

$$\mathcal{R}_I^0 := \{\alpha \in \mathcal{R}^+ \mid \alpha(\xi_I) = 0\} = \{\alpha \in \mathcal{R}^+ \mid \alpha(\xi_i) = 0\ (\forall i \in I)\}$$

と表され，一方 $\mathfrak{f}(\Gamma^I, K)$ は

$$\mathfrak{f}(\Gamma^I, K) = \mathfrak{k}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_I^{\mathrm{ev}}} \mathfrak{k}_\alpha,$$

$$\mathcal{R}_I^{\mathrm{ev}} := \{\alpha \in \mathcal{R}^+ \mid \forall i \in I \text{ について} \alpha(\xi_i) \text{ が偶数 } \}$$

と表される．よって，admissible な I の判定法として定理 4.1 を得る．ここで，$\mathcal{R}$ の基本系 Σ を基底として，各正ルート $\alpha \in \mathcal{R}^+$ を $\alpha = \sum_{j=1}^r c_j^\alpha \alpha_j$ と表したときの係数を $c_j^\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,（$j \in I_{\mathrm{reg}}$）と表す．すなわち $\alpha(\xi_j) = c_j^\alpha$ である．

定理 4.1 (Quast–S. [12])**.** $I_{\mathrm{reg}} = \{1, \ldots, r\}$ の空でない部分集合 I が admissible であるための必要十分条件は $\mathcal{R}_I^0 = \mathcal{R}_I^{\mathrm{ev}}$ となることである．さらにこの条件は，すべての $\alpha \in \mathcal{R}^+$ について

$$\big(\forall i \in I:\ c_i^\alpha \text{ 偶数 }\big) \implies \big(\forall i \in I : c_i^\alpha = 0\big)$$

となることと同値である．

注意 4.2. (1) 定理 4.1 の判定法により，G がコンパクト単純 Lie 群である場合に，自然な Γ 対称構造を持つ R 空間の分類が得られる．詳細は [12] を参照．

(2) $I = \{i\}$ がただ一つの要素からなるとき，すなわち X_I が孤立軌道となるとき，I が admissible となるための必要十分条件は $\mathcal{R}$ の最高ルート δ の i の係数が $c_i^\delta = 1$ となることである．このとき $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ であるから，X_I として対称 R 空間が得られる．

命題 4.3. 制限ルート系 $\mathcal{R}$ が被約 (reduced) であるとき，すなわち $\mathcal{R}$ が BC_r 型の成分を持たないとき，I_{reg} は admissible である．したがって，主軌道 $X_{I_{\mathrm{reg}}}$ は自然な $\Gamma^{I_{\mathrm{reg}}}$ 対称構造を持つ．

注意 4.4. $\mathcal{R}$ の階数が $r=2$ であるとき，すなわち $I_{\mathrm{reg}}=\{1,2\}$ のとき，主軌道 $X_{I_{\mathrm{reg}}}$ は $\mathfrak{p}$ の単位球面内の等質超曲面となる．逆に，球面内のすべての等質超曲面は階数 2 のコンパクト対称空間 P による R 空間の主軌道 $X_{I_{\mathrm{reg}}}$ として得られることが知られている（[5]）．よって命題 4.3 より，BC_2 型以外の階数 2 のコンパクト対称空間 P の線形イソトロピー表現の主軌道として与えられる球面内の等質超曲面は $\Gamma=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ となる自然な Γ 対称構造を持つ．

系 4.5. $I_1,\dots I_k\subset I_{\mathrm{reg}}$ がすべて admissible であるならば, $I=I_1\cup\cdots\cup I_k$ も admissible である．特に，すべての $i\in I$ について $X_{\{i\}}$ が対称 R 空間であるならば，X_I は自然な Γ 対称構造を持つ．

例 4.6 (旗多様体)**.** $\mathcal{R}$ が A_r 型であるとき，R 空間 X_I として，例 3.5 で与えた旗多様体が得られる．このとき，孤立軌道は Grassmann 多様体であり，すべて対称 R 空間である．したがって系 4.5 より，このときすべての $I\subset I_{\mathrm{reg}}$ が admissible になる．ここで，X_I に定まる自然な Γ^I 対称構造は例 3.5 で与えたものと一致する．

$I\subset I_{\mathrm{reg}}$ が admissible であるとき，K/H_I 上の Γ^I 対称構造を

$$K/H_I\to X_I;\quad kH_I\mapsto \mathrm{Ad}_G(k)\xi_I$$

によって，X_I に移すと

$$\gamma^i_{\xi_I}(\mathrm{Ad}_G(k)\xi_I)=\mathrm{Ad}_G(g_i)\mathrm{Ad}_G(k)\xi_I$$

と表される．したがって，$\gamma^i_{\xi_I}$ は $\mathfrak{p}$ の線形変換 $\mathrm{Ad}_G(g_i)|_{\mathfrak{p}}$ に延長される．このとき

$$F(\Gamma^I_{\xi_I},\mathfrak{p})=\{Y\in\mathfrak{p}\mid[Y,\xi_I]=0\}\tag{4.2}$$

となり，この空間は $\mathfrak{p}$ 内における X_I の法空間 $T^{\perp}_{\xi_I}(X_I)$ と一致する．すなわち，$\mathfrak{p}$ の線形変換に延長された対称変換群は X_I の法空間を固定するということであり，ここで定めた自然な Γ 対称構造を持つ R 空間は，対称 R 空間が持つ外的対称空間の性質を引き継いでいることを意味している（cf. [3]）．また，(4.2) より，$x,y\in X_I$ について $y\in F(\Gamma^I_x,X_I)$ となるための必要十分条件は $[x,y]=0$ であることが示される．したがって，X_I の対蹠集合 A の要素によって張られる $\mathfrak{p}$ の部分空間は可換になる．これにより，R 空間の自然な Γ 対称構造の対蹠集合に関して次の定理を得る．

定理 4.7 (Quast–S. [12])**.** $I\subset I_{\mathrm{reg}}$ が admissible であるとする．このとき，X_I 上の自然な Γ 対称構造に対する極大対蹠集合 A に対し，$\mathfrak{p}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{a}'$ が存在して，

$$A=X_I\cap\mathfrak{a}'=W(P,\mathfrak{a}')\xi_I$$

となる．ここで，$W(P,\mathfrak{a}')$ は $\mathfrak{a}'$ に関する (G,K) の Weyl 群である．したがって，X_I のすべての極大対蹠集合は互いに K 共役であり，

$$\#_\Gamma(X_I) = |A| = \left|W(P,\mathfrak{a}')\xi_I\right| = \dim H_*(X_I,\mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ．

定理 4.7 は，対称 R 空間の極大対蹠集合と 2-number に関する Tanaka–Tasaki [14] および Takeuchi [13] の結果の拡張となる．

参考文献

[1] Y. Bahturin and M. Goze, *$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$-symmetric spaces*, Pac. J. Math. **236** (2008), 1–21.

[2] B.-Y. Chen, T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Am. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[3] D. Ferus, *Symmetric submanifolds of Euclidean space*, Math. Ann. 247 (1980), 81–93.

[4] M. Goze and E. Remm, *Riemannian Γ-symmetric spaces*, Differential geometry, 195–206, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009.

[5] W.-Y. Hsiang and H. B. Lawson, Jr, *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Differential Geometry **5** (1971), 1–38.

[6] A. Kollross, *Exceptional $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$-symmetric spaces*, Pac. J. Math. **242** (2009), 113–130.

[7] O. Kowalski, *Generalized symmetric spaces*, Lecture Notes in Mathematics, **805**, Springer-Verlag, 1980.

[8] A. J. Ledger, *Espaces de Riemann symétriques généralisés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **264**, (1967), A947–A948.

[9] A. J. Ledger and M. Obata, *Affine and Riemannian s-manifolds*, J. Differential Geometry 2 (1968), 451–459.

[10] O. Loos, *Symmetric spaces I, II*, W. A. Benjamin, 1969.

[11] R. Lutz, *Sur la géométrie des espaces Γ-symétriques*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **293** (1981), 55–58.

[12] P. Quast and T. Sakai, *Natural Γ-symmetric structures on R-spaces*, J. Math. Pures Appl. **141** (2020), 371–383.

[13] M. Takeuchi, *Two-number of symmetric R-spaces*, Nagoya Math. J. **115** (1989), 43–46.

[14] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *Antipodal sets of symmetric R-spaces*, Osaka J. Math. **50** (2013), 161–169.

[15] 大久保博希，Γ 対称空間の極地と対蹠集合，首都大学東京理工学研究科修士論文，2018 年度.

[16] 寺内泰紀，Γ 対称空間の対蹠集合，首都大学東京理工学研究科修士論文，2017 年度.

[17] 長野正, 対称空間の幾何理論, 数理解析研究所講究録 **1206** (2001), 55–82.