等積中心アファイン曲線と円周の微分同相群

関西大学システム理工学部　藤岡 敦

Atsushi Fujioka
Faculty of Engineering Science
Kansai University

1　序

等積中心アファイン平面閉曲線のなす空間は無限次元のシンプレクティック多様体とみなすことができる．実際，この空間は Virasoro-Bott 群とよばれる円周の微分同相群の中心拡大が作用し，Virasoro 代数の双対の余随伴軌道とみなすことができる ([2, 3])．この事実については，曲線の可積分流と関連が深く，例えば，[1, 4, 5] やそれらの参考文献をあたられたい．

ここでは，等積中心アファイン平面閉曲線を一般の等積中心アファイン閉曲線へと一般化し，それらのなす空間への円周の微分同相群の作用を考える．特に，これらの空間から平面曲線，或いは空間曲線のなす空間への同変な射影が得られることについて述べる．なお，以下の内容は黒瀬俊氏 (関西学院大学) と森吉仁志氏 (名古屋大学) との共同研究に基づいている．

2　等積中心アファイン曲線

$n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ とし，n 次元実数ベクトル空間を $\mathbf{R}^n$ と表す．区間 I から $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ への滑らかな写像 $\gamma : I \to \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ は，任意の $s \in I$ に対して

$$\det \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \gamma'(s) \\ \vdots \\ \gamma^{(n-1)}(s) \end{pmatrix} = 1 \tag{1}$$

となるとき，等積中心アファイン曲線という．$n = 2, 3$ のときは，γ をそれぞれ等積中心アファイン平面曲線，等積中心アファイン空間曲線ともいう．$\gamma : I \to \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ を等積中心アファイン曲線とすると，(1) より，ある関数 $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbf{R}$ が存在し，

$$\gamma^{(n)} + \kappa_1 \gamma^{(n-2)} + \kappa_2 \gamma^{(n-3)} + \cdots + \kappa_{n-1} \gamma = 0 \tag{2}$$

となる．このとき，κ_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ を γ の第 i 曲率という．$n = 2$ のときは，κ_1 を等積中心アファイン曲率ともいう．常微分方程式の解の存在定理より，等積中心アファイン曲線について，次がなりたつ．

命題 1 (等積中心アファイン曲線の基本定理)　$\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbf{R}$ を区間 I で定義された関数とする．このとき，各 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して第 i 曲率が κ_i となる等積中心

アファイン曲線 $\gamma : I \to \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ が原点を固定する等積アファイン変換, すなわち, 等積中心アファイン変換の合成を除いて一意的に存在する.

なお, 等積中心アファイン変換とは $\mathbf{R}^n$ の元に行列式 1 の n 次行列, すなわち, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ の元を掛けることに他ならない.

例 1　等積中心アファイン曲率が一定, すなわち, 定曲率の等積中心アファイン平面曲線について考えよう. $\gamma : I \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ を等積中心アファイン曲率 κ の等積中心アファイン平面曲線とする.

$\kappa \equiv 0$ のとき, γ は直線の一部であり,

$$\gamma(s) = (a + bs, c + ds) \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R},\ ad - bc = 1)$$

と表される.

κ が正の定数のとき, γ は楕円の一部であり,

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{ab}, b \sin \frac{s}{ab}\right) \quad \left(a, b > 0,\ \kappa = \frac{1}{a^2 b^2}\right)$$

と表される.

κ が負の定数のとき, γ は双曲線の一部であり,

$$\gamma(s) = \left(a \cosh \frac{s}{ab}, b \sinh \frac{s}{ab}\right) \quad \left(a, b > 0,\ \kappa = -\frac{1}{a^2 b^2}\right)$$

と表される.

3　等積中心アファイン閉曲線

以下では, 周期 2π の等積中心アファイン曲線を考え, これを等積中心アファイン閉曲線ということにする. $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ とおくと, S^1 は円周であり, 等積中心アファイン閉曲線は S^1 からの写像とみなすことができる. また, $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 内の等積中心アファイン閉曲線全体の集合を $\mathcal{M}_n$ と表す. 更に, $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 内の等積中心アファイン閉曲線の等積中心アファイン変換による合同類全体の集合を $\mathcal{M}_n/\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ と表す.

例 2　$m \in \mathbf{N}$ に対して, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ を互いに異なる自然数とし, $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{2m-1} \in \mathbf{R}$ を t に関する恒等式

$$t^{2m} + \kappa_1 t^{2m-2} + \kappa_2 t^{2m-3} + \cdots + \kappa_{2m-1} = (t^2 + \lambda_1^2)(t^2 + \lambda_2^2) \cdots (t^2 + \lambda_m^2)$$

により定める. 特に, $\kappa_2 = \kappa_4 = \cdots = \kappa_{2m-2} = 0$ である. このとき, 定曲率等積中心アファイン閉曲線 $\gamma \in \mathcal{M}_{2m}$ を

$$\gamma(s) = (\cos \lambda_1 s, \sin \lambda_1 s, \cos \lambda_2 s, \sin \lambda_2 s, \ldots, \cos \lambda_m s, \mu \sin \lambda_m s) \quad (s \in S^1) \tag{3}$$

により定めることができる. ただし,

$$\frac{1}{\mu} = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i \prod_{i<j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2 \tag{4}$$

である. 実際, γ は (2) をみたし, (1) より, (4) が得られる.

例 3 $m \in \mathbf{N}$ に対して, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ を互いに異なる自然数とし, $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{2m} \in \mathbf{R}$ を t に関する恒等式

$$t^{2m+1} + \kappa_1 t^{2m-1} + \kappa_2 t^{2m-2} + \cdots + \kappa_{2m} = t(t^2 + \lambda_1^2)(t^2 + \lambda_2^2) \cdots (t^2 + \lambda_m^2)$$

により定める. 特に, $\kappa_2 = \kappa_4 = \cdots = \kappa_{2m} = 0$ である. このとき, 定曲率等積中心アファイン閉曲線 $\gamma \in \mathcal{M}_{2m+1}$ を

$$\gamma(s) = (\cos \lambda_1 s, \sin \lambda_1 s, \cos \lambda_2 s, \sin \lambda_2 s, \ldots, \cos \lambda_m s, \sin \lambda_m s, \mu) \quad (s \in S^1) \tag{5}$$

により定めることができる. ただし,

$$\frac{1}{\mu} = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^3 \prod_{i<j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2 \tag{6}$$

である. 実際, γ は (2) をみたし, (1) より, (6) が得られる.

向きを保つ S^1 の微分同相写像全体からなる群を $\mathrm{Diff}(S^1)$ と表す. このとき, $\mathrm{Diff}(S^1)$ の $\mathcal{M}_n$, 或いは $\mathcal{M}_n/\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ への右からの作用を

$$(\gamma \cdot g)(s) = (g'(s))^{\frac{1-n}{2}} (\gamma \circ g)(s) \quad (\gamma \in \mathcal{M}_n,\ g \in \mathrm{Diff}(S^1),\ s \in S^1) \tag{7}$$

により定めることができる. 実際, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ とすると,

$$(\gamma \cdot g)^{(k)} = (g')^{\frac{1-n}{2}+k} (\gamma^{(k)} \circ g) + \cdots$$

となるので, $\gamma \cdot g$ は (1) の条件をみたす.

4 平面曲線の場合

$l \in \mathbf{N}$ とし, 回転数 l の等積中心アファイン平面閉曲線全体の集合を $\mathcal{M}_{2,l}$ と表す. 更に, 回転数 l の等積中心アファイン平面閉曲線の等積中心アファイン変換による合同類全体の集合を $\mathcal{M}_{2,l}/\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ と表す. このとき, 直和分解

$$\mathcal{M}_2 = \bigsqcup_{l \in \mathbf{N}} \mathcal{M}_{2,l}, \quad \mathcal{M}_2/\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) = \bigsqcup_{l \in \mathbf{N}} (\mathcal{M}_{2,l}/\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})) \tag{8}$$

が得られる. 特に, $\mathrm{Diff}(S^1)$ の $\mathcal{M}_{2,l}/\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ への作用は推移的となることより, (8) の第 2 式は $\mathrm{Diff}(S^1)$ の $\mathcal{M}_2/\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ への作用による軌道分解である.

また, 等積中心アファイン曲率の変換則について, 次がなりたつことが分かる.

命題 2 $\gamma \in \mathcal{M}_2$, $g \in \mathrm{Diff}\,(S^1)$ とし, κ を γ の等積中心アファイン曲率とする. このとき, $\gamma \cdot g$ の等積中心アファイン曲率は

$$(g')^2 (\kappa \circ g) + \frac{1}{2} S(g)$$

である. ただし, $S(g)$ は g の Schwarz 微分, すなわち,

$$S(g) = \left(\frac{g''}{g'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{g''}{g'} \right)^2$$

である.

5　一般次元の場合

命題 2 を一般化し, (7) で定めた $\mathrm{Diff}(S^1)$ の作用による等積中心アファイン閉曲線の曲率の変換則を求める．以下, $\alpha = \frac{1-n}{2}$ とおく．また, $g \in \mathrm{Diff}(S^1)$ に対して, $h = \frac{g''}{g'}$ とおく．このとき, $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して, $h^{(k)}$ の次数を $(k+1)$ とすることにより, h の微分多項式 P の重み付き次数 $\deg_w P$ を定めることができる．まず, 等積中心アファイン閉曲線の微分の変換則について, 次がなりたつ．

補題 1　$\gamma \in \mathcal{M}_n$, $g \in \mathrm{Diff}(S^1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$(\gamma \cdot g)^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-1} P_{k,l}(\gamma \cdot g)^{(l)} + (g')^{\alpha+k}(\gamma^{(k)} \circ g) \tag{9}$$

がなりたつ．ただし, $P_{k,l}$ は $\deg_w P_{k,l} = k - l$ の h の同次微分多項式であり, 漸化式

$$P_{k+1,0} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\partial P_{k,0}}{\partial h^{(m)}} h^{(m+1)} - (\alpha + k)P_{k,0}h \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{10}$$

$$P_{k+1,l} = \sum_{m=0}^{k-l-1} \frac{\partial P_{k,l}}{\partial h^{(m)}} h^{(m+1)} + P_{k,l-1} - (\alpha + k)P_{k,l}h$$
$$(k = 2, 3, \ldots, n-1,\ l = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{11}$$

$$P_{k+1,k} = P_{k,k-1} + (\alpha + k)h \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{12}$$

をみたす．

証明　まず, (9) の両辺を微分すると,

$$(\gamma \cdot g)' = \alpha h(\gamma \cdot g) + (g')^{\alpha+1}(\gamma' \circ g)$$

となるから,

$$P_{1,0} = \alpha h \tag{13}$$

である．よって, $(\gamma \cdot g)'$ は (9) のように表される．また, $P_{1,0}$ は $\deg_w P_{1,0} = 1$ の h の同次微分多項式である．

次に, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ のとき, $(\gamma \cdot g)^{(k)}$ は (9) のように表され, $P_{k,l}$ は $\deg_w P_{k,l} = k - l$ の h の同次微分多項式であると仮定する．このとき, $P_{k,l}$ が h, h', $\ldots$, $h^{(k-l-1)}$ の多項式であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
(\gamma \cdot g)^{(k+1)} &= \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{k-l-1} \frac{\partial P_{k,l}}{\partial h^{(m)}} h^{(m+1)}(\gamma \cdot g)^{(l)} + \sum_{l=0}^{k-1} P_{k,l}(\gamma \cdot g)^{(l+1)} \\
&+ (\alpha + k)(g')^{\alpha+k-1}g''(\gamma^{(k)} \circ g) + (g')^{\alpha+k+1}(\gamma^{(k+1)} \circ g) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\partial P_{k,0}}{\partial h^{(m)}} h^{(m+1)}(\gamma \cdot g) \\
&+ \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=0}^{k-l-1} \frac{\partial P_{k,l}}{\partial h^{(m)}} h^{(m+1)}(\gamma \cdot g)^{(l)} + \sum_{l=1}^{k} P_{k,l-1}(\gamma \cdot g)^{(l)} + (\alpha + k)h(g')^{\alpha+k}(\gamma^{(k)} \circ g) \\
&+ (g')^{\alpha+k+1}(\gamma^{(k+1)} \circ g) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\partial P_{k,0}}{\partial h^{(m)}} h^{(m+1)}(\gamma \cdot g)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{l=1}^{k-1}\left(\sum_{m=0}^{k-l-1}\frac{\partial P_{k,l}}{\partial h^{(m)}}h^{(m+1)}+P_{k,l-1}\right)(\gamma\cdot g)^{(l)}+P_{k,k-1}(\gamma\cdot g)^{(k)}$$
$$+(\alpha+k)h\left((\gamma\cdot g)^{(k)}-\sum_{l=0}^{k-1}P_{k,l}(\gamma\cdot g)^{(l)}\right)+(g')^{\alpha+k+1}(\gamma^{(k+1)}\circ g)$$

となる. よって, $(\gamma\cdot g)^{(k+1)}$ も (9) のように表され, (10)∼(12) が得られる.
更に, $\deg_w P_{k,l}$ を計算することができる. □

例 4 $k=1,2,\dots,n-1$ とすると, (12), (13) より,

$$P_{k+1,k}=P_{1,0}+\sum_{l=1}^{k}(\alpha+l)h=(k+1)\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)h \qquad (14)$$

となる. 特に, (2) からも得られる

$$P_{n,n-1}=0 \qquad (15)$$

がなりたつが, $0\cdot h=0$ は重み付き次数 1 とみなす.

例 5 (10), (13) より,

$$P_{2,0}=\alpha h'-\alpha(\alpha+1)h^2 \qquad (16)$$

となる. 更に, $n\geq 3$ のとき,

$$P_{3,0}=\alpha h''-\alpha(3\alpha+4)hh'+\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)h^3 \qquad (17)$$

となる.

例 6 $n=2$ とし, このときに現れる多項式 $P_{1,0}$, $P_{2,0}$, $P_{2,1}$ を求める. まず, (13) より,

$$P_{1,0}=-\frac{1}{2}h$$

である. また, (15) より,

$$P_{2,1}=0$$

である. 更に, (16) より,

$$P_{2,0}=-\frac{1}{2}h'+\frac{1}{4}h^2=-\frac{1}{2}S(g)$$

である.

例 7 $n=3$ とし, このときに現れる多項式 $P_{1,0}$, $P_{2,0}$, $P_{2,1}$, $P_{3,0}$, $P_{3,1}$, $P_{3,2}$ を求める. まず, (13) より,

$$P_{1,0}=-h$$

である. また, (14), (15) より,

$$P_{2,1}=-h,\quad P_{3,2}=0$$

である. 更に, (16), (17) より,

$$P_{2,0} = -h', \quad P_{3,0} = -h'' + hh' = -(S(g))'$$

である. 最後に, (11) より,

$$P_{3,1} = \frac{\partial P_{2,1}}{\partial h}h' + P_{2,0} - P_{2,1}h = -h' - h' + h^2 = -2S(g)$$

である.

補題 1 を用いることにより, 等積中心アファイン閉曲線の曲率の変換則が次のように得られる.

定理 1 $\gamma \in \mathcal{M}_n$, $g \in \mathrm{Diff}(S^1)$ とし, κ_i, $\tilde{\kappa}_i$ をそれぞれ γ, $\gamma \cdot g$ の第 i 曲率とする. このとき,

$$\tilde{\kappa}_{n-l-1} = (g')^{n-l}(\kappa_{n-l-1} \circ g) - P_{n,l} - \sum_{k=l+1}^{n-2} (g')^{n-k}(\kappa_{n-k-1} \circ g)P_{k,l}$$

$$(l = 0, 1, 2, \ldots, n-3), \tag{18}$$

$$\tilde{\kappa}_1 = (g')^2(\kappa_1 \circ g) + \frac{n(n^2-1)}{12}S(g) \tag{19}$$

がなりたつ.

証明 補題 1 より,

$$\begin{aligned}
&(\gamma \cdot g)^{(n)} = \sum_{l=0}^{n-2} P_{n,l}(\gamma \cdot g)^{(l)} + (g')^{\alpha+n}(\gamma^{(n)} \circ g) = \sum_{l=0}^{n-2} P_{n,l}(\gamma \cdot g)^{(l)} \\
&- (g')^{\alpha+n} \sum_{k=0}^{n-2} (\kappa_{n-k-1} \circ g)(\gamma^{(k)} \circ g) = \sum_{l=0}^{n-2} P_{n,l}(\gamma \cdot g)^{(l)} - (g')^n(\kappa_{n-1} \circ g)(g')^{\alpha}(\gamma \circ g) \\
&- \sum_{k=1}^{n-2} (g')^{n-k}(\kappa_{n-k-1} \circ g)(g')^{\alpha+k}(\gamma^{(k)} \circ g) = \sum_{l=0}^{n-2} P_{n,l}(\gamma \cdot g)^{(l)} - (g')^n(\kappa_{n-1} \circ g)(\gamma \cdot g) \\
&- \sum_{k=1}^{n-2} (g')^{n-k}(\kappa_{n-k-1} \circ g)\left((\gamma \cdot g)^{(k)} - \sum_{l=0}^{k-1} P_{k,l}(\gamma \cdot g)^{(l)}\right)
\end{aligned}$$

である. よって, (18) および

$$\tilde{\kappa}_1 = (g')^2(\kappa_1 \circ g) - P_{n,n-2}$$

が得られる.

ここで, (11), (14) より,

$$\begin{aligned}
&P_{k+1,k-1} - P_{k,k-2} = \frac{\partial P_{k,k-1}}{\partial h}h' - (\alpha+k)P_{k,k-1}h = k\left(\alpha + \frac{k-1}{2}\right)h' \\
&- (\alpha+k)k\left(\alpha + \frac{k-1}{2}\right)h^2
\end{aligned}$$

である．更に, (16) を用いて直接計算すると,

$$P_{n,n-2} = -\frac{n(n^2-1)}{12}S(g)$$

となる． □

6　平面への射影

定理 1 の応用として, 等積中心アファイン閉曲線を平面曲線として射影することを考える．$n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ とし, $\gamma \in \mathcal{M}_n$ とする．更に, κ_1 を γ の第 1 曲率とし, $\bar{\gamma} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ を等積中心アファイン曲率が $\frac{6}{n(n^2-1)}\kappa_1$ の等積中心アファイン平面曲線とする．次の定理は本質的には [3, 定理 2.4.1] として得られている．

定理 2　$\bar{\gamma} \in \mathcal{M}_2$ ならば, γ から $\bar{\gamma}$ への対応は γ の軌道から $\bar{\gamma}$ の軌道, 或いは γ の合同類の軌道から $\bar{\gamma}$ の合同類の軌道への, $\mathrm{Diff}(S^1)$ の作用により同変な写像を定める．

証明　$\bar{\kappa}_1$, $\bar{\bar{\kappa}}_1$ をそれぞれ $\bar{\gamma}$, $\overline{\gamma \cdot g}$ の等積中心アファイン曲率とすると, 第 1 曲率の変換則 (19) より,

$$\bar{\bar{\kappa}}_1 = (g')^2(\bar{\kappa}_1 \circ g) + \frac{1}{2}S(g)$$

となる．これは $n = 2$ のときの等積中心アファイン曲率の変換則である． □

例 8　$m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$ とし, $\gamma \in \mathcal{M}_{2m}$ を (3) によりあたえられる定曲率等積中心アファイン閉曲線とする．このとき,

$$\kappa_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_m^2 \tag{20}$$

である．ここで,

$$\lambda_1 = l, \quad \lambda_2 = 3l, \quad \ldots, \quad \lambda_m = (2m-1)l \quad (l \in \mathbf{N}) \tag{21}$$

とすると,

$$\frac{6}{2m\{(2m)^2-1\}}\kappa_1 = l^2$$

となる．よって, γ に対応する等積中心アファイン平面曲線 $\bar{\gamma}$ は

$$\bar{\gamma}(s) = \left(\cos ls, \frac{1}{l}\sin ls\right) \quad (s \in \mathbf{R})$$

によりあたえられ, $\bar{\gamma} \in \mathcal{M}_{2,l}$ となる．したがって, γ から $\bar{\gamma}$ への対応は γ の軌道から $\mathcal{M}_{2,l}$ への, $\mathrm{Diff}(S^1)$ の作用により同変な写像を定める．

例 9　$m \in \mathbf{N}$ とし, $\gamma \in \mathcal{M}_{2m+1}$ を (5) によりあたえられる定曲率等積中心アファイン閉曲線とする．このとき, (20) がなりたつ．ここで,

$$\lambda_1 = 2l, \quad \lambda_2 = 4l, \quad \ldots, \quad \lambda_m = 2ml \quad (l \in \mathbf{N})$$

とすると,

$$\frac{6}{(2m+1)\{(2m+1)^2-1\}}\kappa_1 = l^2$$

となる．よって, γ に対応する等積中心アファイン平面曲線 $\bar{\gamma}$ は

$$\bar{\gamma}(s) = \left(\cos ls, \frac{1}{l}\sin ls\right) \quad (s \in \mathbf{R})$$

によりあたえられ, $\bar{\gamma} \in \mathcal{M}_{2,l}$ となる．したがって, γ から $\bar{\gamma}$ への対応は γ の軌道から $\mathcal{M}_{2,l}$ への, $\mathrm{Diff}(S^1)$ の作用により同変な写像を定める．

7 空間への射影

次に, 等積中心アファイン閉曲線を空間曲線として射影することを考える．$n \in \mathbf{N}$, $n \geq 4$ とし, $\gamma \in \mathcal{M}_n$ とする．更に, κ_1, κ_2 をそれぞれ γ の第 1 曲率, 第 2 曲率とし, $\bar{\gamma} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3 \backslash \{0\}$ を第 1 曲率が $\frac{24}{n(n^2-1)}\kappa_1$, 第 2 曲率が $\frac{24}{n(n^2-1)(n-2)}\kappa_2$ の等積中心アファイン空間曲線とする．このとき, 次がなりたつ．

定理 3　$\bar{\gamma} \in \mathcal{M}_3$ ならば, γ から $\bar{\gamma}$ への対応は γ の軌道から $\bar{\gamma}$ の軌道, 或いは γ の合同類の軌道から $\bar{\gamma}$ の合同類の軌道への, $\mathrm{Diff}(S^1)$ の作用により同変な写像を定める．

証明　定理 1 より, 第 1 曲率の変換則 (19) および第 2 曲率の変換則

$$\tilde{\kappa}_2 = (g')^3(\kappa_2 \circ g) - P_{n,n-3} - (g')^2(\kappa_1 \circ g)P_{n-2,n-3}$$

がなりたつ．更に計算すると,

$$P_{n-2,n-3} = -(n-2)h, \quad P_{n,n-3} = -\frac{n(n^2-1)(n-2)}{24}(S(g))'$$

が得られる．以下は定理 2 の証明と同様である．□

例 10　$m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$ とし, $\gamma \in \mathcal{M}_{2m}$ を (3) によりあたえられる定曲率等積中心アファイン閉曲線とする．このとき, (20) がなりたつ．ここで, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ を (21) により定めると,

$$\frac{24}{2m\{(2m)^2-1\}}\kappa_1 = (2l)^2$$

となる．更に, $\kappa_2 = 0$ だから, γ に対応する等積中心アファイン空間曲線 $\bar{\gamma}$ は

$$\bar{\gamma}(s) = \left(\cos 2ls, \sin 2ls, \frac{1}{8l^3}\right) \quad (s \in \mathbf{R})$$

によりあたえられ, $\bar{\gamma} \in \mathcal{M}_3$ となる．したがって, γ から $\bar{\gamma}$ への対応は γ の軌道から $\bar{\gamma}$ の軌道への, $\mathrm{Diff}(S^1)$ の作用により同変な写像を定める．

例 11　$m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$ とし, $\gamma \in \mathcal{M}_{2m+1}$ を (5) によりあたえられる定曲率等積中心アファイン閉曲線とする．このとき, (20) がなりたつ．ここで,

$$\lambda_1 = l, \quad \lambda_2 = 2l, \quad \ldots, \quad \lambda_m = ml \quad (l \in \mathbf{N})$$

とすると,

$$\frac{24}{(2m+1)\{(2m+1)^2-1\}}\kappa_1 = l^2$$

となる．更に, $\kappa_2 = 0$ だから, γ に対応する等積中心アファイン空間曲線 $\bar{\gamma}$ は

$$\bar{\gamma}(s) = \left(\cos ls, \sin ls, \frac{1}{l^3}\right) \quad (s \in \mathbf{R})$$

によりあたえられ, $\bar{\gamma} \in \mathcal{M}_3$ となる．したがって, γ から $\bar{\gamma}$ への対応は γ の軌道から $\bar{\gamma}$ の軌道への, $\mathrm{Diff}(S^1)$ の作用により同変な写像を定める.

参考文献

[1] A. Fujioka and T. Kurose. Multi-Hamiltonian structures on spaces of closed equicentroaffine plane curves associated to higher KdV flows. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **10** (2014), Paper 048, 11pp.

[2] B. Khesin and R. Wendt. The geometry of infinite-dimensional groups. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **51**. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[3] V. Ovsienko and S. Tabachnikov. Projective differential geometry old and new. From the Schwarzian derivative to the cohomology of diffeomorphism groups. Cambridge Tracts in Mathematics, **165**. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[4] S. Tabachnikov. On centro-affine curves and Bäcklund transformations of the KdV equation. Arnold Math. J. **4** (2018), no. 3–4, 445–458.

[5] C.-L. Terng and Z. Wu. N-dimension central affine curve flows. J. Differential Geom. **111** (2019), no.1, 145–189.