

コンパクト対称空間の極大対蹠集合*

東京理科大学 田中 真紀子†

Makiko Sumi Tanaka
Tokyo University of Science

1 序文

本研究は、田崎博之氏との共同研究である。

コンパクト Riemann 対称空間 M の部分集合 A は、任意の $x \in A$ における点対称 s_x が A の各点を固定するとき**対蹠集合**とよばれる。 x は s_x の孤立不動点であるから、対蹠集合は離散的である。包含関係に関して極大な対蹠集合を**極大対蹠集合**という。Chen-Nagano [CN2] は、対蹠集合の位数の極大値を 2-number $\#_2 M$ と定義して詳しい研究を行った¹。特に、 $\#_2 M$ は M の位相と関係し、 M が対称 R 空間のときには、 $\#_2 M$ は M の \mathbb{Z}_2 係数ホモロジー群の次元に等しいことが Takeuchi [T] によって示された。

位数が $\#_2 M$ に等しい極大対蹠集合を**大対蹠集合**という。一般には、極大対蹠集合は合同を除いて一意とは限らないが、 M が対称 R 空間ならば合同を除いて一意である [TT1, Corollary 4.4]。ここで、合同とは M の等長変換群 $I(M)$ の単位連結成分 $I_0(M)$ の元で移り合うときをいう。したがって、対称 R 空間において極大対蹠集合はすべて大対蹠集合である。対称 R 空間は、あるコンパクト対称対 (G, K) の線形イソトロピー軌道として、 G の Lie 環 \mathfrak{g} の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ としたときの \mathfrak{p} に埋め込まれる。このとき、 \mathfrak{p} の極大可換部分空間 \mathfrak{a} との共通部分 $M \cap \mathfrak{a}$ は M の大対蹠集合である [TT1, Theorem 4.3]。

我々は、極大対蹠集合そのものの構造に興味を持ち、極大対蹠集合の分類について研究を進めている。[TT3] では古典型コンパクト Lie 群を扱った。コンパクト Lie 群には両側不変 Riemann 計量が存在し、その計量に関して Riemann 対称空間になる。左移動および右移動が等長変換として推移的に作用するので、極大対蹠集合は単位元を含むと仮定してよく、その場合は部分群になるので**極大対蹠部分群**とよぶ。極大対蹠部分群はいくつかの \mathbb{Z}_2 の直積と同型な可換部分群である。[TT3] ではコンパクト Lie 群 $U(n), SU(n), O(n), SO(n), Sp(n)$ およびそれらの商群の極大対蹠部分群の共役類の分類を、行列による具体的表示を用い

*RIMS 共同研究 (公開型) 「部分多様体論と関連する幾何構造研究の深化と融合」 (代表者: 中田文憲), 本研究は JSPS 科研費 19K03478 (研究代表者: 田中真紀子), 18K03268 (研究代表者: 田崎博之) の助成を受けたものです。

†278-8510 千葉県野田市山崎 2641, tanaka_makiko@ma.noda.tus.ac.jp

¹2018 年に Chen により [CN2] 以降の 2-number に関連する研究についてまとめられたサーベイ [C] が出版された。

て代表元を記述することにより行った。その具体的表示を用いて極大対蹠部分群の位数を求め、位数の最大値と大対蹠部分群を決定した。[TT4]では、Lie群ではない古典型コンパクト Riemann 対称空間を扱った。実、複素および四元数 Grassmann 多様体、 $Sp(n)/U(n)$, $SO(2n)/U(n)$ とそれらの商空間の極大対蹠集合の合同類の分類を、これらのあるコンパクト Lie 群 G の極地や中心体として埋め込むことで G の極大対蹠部分群の分類を利用して行った。[TTY]では、例外型コンパクト Lie 群 G_2 の極大対蹠部分群の共役類、および、例外型コンパクト Riemann 対称空間 $G_2/SO(4)$ の極大対蹠集合の合同類を、 G_2 を Cayley 代数の自己同型群と見なして具体的表示を与えることにより決定した。また、 $G_2/SO(4)$ を八元数の結合的 Grassmann 多様体と見なすことで、その極大対蹠集合と八元数の代数構造との関係を明らかにした。

まだ分類の済んでいないコンパクト Riemann 対称空間のうち、 $U(n)/O(n)$, $SU(n)/SO(n)$, $U(2n)/Sp(n)$, $SU(2n)/Sp(n)$ およびそれらの商空間について考える際に、我々の分類方法によると、これらの対称空間をコンパクト Lie 群に極地として埋め込む必要がある。これらの対称空間は連結コンパクト Lie 群の極地としては実現されないが、非連結コンパクト Lie 群の極地として実現できる ([TT5])。

本論文では、コンパクト Riemann 対称空間の極大対蹠集合の分類方法についての我々の方針を述べた後、[TT5]の結果について説明し、応用として $U(n)/O(n)$ とその商空間の極大対蹠集合の分類結果について述べる。

2 極大対蹠集合の分類の方針

Riemann 対称空間 M の点 o における点対称 s_o の不動点集合の連結成分を、 o に関する極地という。特に、1点からなる極地を極といい、 $\{o\}$ は自明な極とよばれる。正次元の極地 M^+ は全測地的部分多様体で、 M^+ の点 x における点対称 s_x は M^+ を保ち、 M^+ の点対称を定めるので、 M^+ は誘導計量に関して Riemann 対称空間である。

連結コンパクト Riemann 対称空間 M が、あるコンパクト Lie 群 G の単位元に関する極地として実現されるときに、 G の極大対蹠部分群の共役類の分類結果を利用して、 M の極大対蹠集合の合同類を分類する方針について述べる。

G をコンパクト Lie 群とし、 G_0 を G の単位連結成分とする。 $g \in G$ に対して I_g で g が定める G の内部自己同型写像を表す。すなわち、 $I_g(h) = ghg^{-1}$ ($h \in G$) である。 I_g は G_0 の自己同型写像を誘導する。 $g \in G$ における点対称 s_g は $s_g(h) = gh^{-1}g$ ($h \in G$) で与えられる。単位元 e における点対称 s_e の不動点集合 $F(s_e, G)$ は $F(s_e, G) = \{g \in G \mid g^2 = e\}$ となる。 M を G の単位元に関する極地とすると、 $\dim M > 0$ ならば M は連結コンパクト Riemann 対称空間である。 $I(M)$ で M の等長変換群、 $I_0(M)$ で $I(M)$ の単位連結成分を表す。

命題 2.1. ([TT4, Lemma 3.1]) M をコンパクト Lie 群 G の単位元に関する極地とする。このとき、 M の点 x_0 に対して $M = \{I_g(x_0) \mid g \in G_0\}$ であり、 $I_0(M) = \{I_g|_M \mid g \in G_0\}$ である。

以下では、 G の単位元に関する極地を、単に G の極地という。 M を G の極地とし、 A を M の極大対蹠集合とする。 $M \subset F(s_e, G)$ より、 $\{e\} \cup A$ は G の対蹠集合である。よって、

これを含む G の極大対蹠部分群 \tilde{A} が存在する。 A の極大性から $A = \tilde{A} \cap M$ が成り立つ。いま、 G の極大対蹠部分群の G_0 共役類の分類結果は得られているとする。 G の極大対蹠部分群の G_0 共役類が k 個あり、それらの代表元が B_1, \dots, B_k で与えられているとする。このとき、 \tilde{A} はある B_s ($1 \leq s \leq k$) と G_0 共役、つまり、ある $g \in G_0$ に対して $I_g(B_s) = \tilde{A}$ となる。命題 2.1 より $I_g(M) = M$ なので、

$$A = \tilde{A} \cap M = I_g(B_s) \cap M = I_g(B_s \cap M)$$

となり、 A は $B_s \cap M$ と合同である。したがって、 M の極大対蹠集合は、 $B_1 \cap M, \dots, B_k \cap M$ のいずれかに合同である。つまり、連結コンパクト Riemann 対称空間 M がコンパクト Lie 群 G の極地として実現されるとき、 G の極大対蹠部分群の共役類を分類し、その各代表元と M との共通部分を求めることで、 M の極大対蹠集合の候補が得られる。

例 2.2. \mathbb{C}^n の k 次元複素部分空間全体からなる複素 Grassmann 多様体を $G_k(\mathbb{C}^n)$ で表す。 $k = 0, n$ のときは、それぞれ 1 点集合 $G_0(\mathbb{C}^n) = \{0\}, G_n(\mathbb{C}^n) = \{\mathbb{C}^n\}$ である。 $G_k(\mathbb{C}^n)$ は n 次ユニタリ群 $U(n)$ の極地として実現される。 n 次単位行列を 1_n とすると、 $F(s_{1_n}, U(n))$ の各連結成分は、位数 2 の元の共役類である。位数 2 の元の固有値は ± 1 であるから、代表元として対角行列 $I_{k,n-k} := \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-k})$ がとれる。よって

$$F(s_{1_n}, U(n)) = \bigcup_{k=0}^n \{I_g(I_{k,n-k}) \mid g \in U(n)\}$$

が極地への分解である。 $0 \leq k \leq n$ に対して

$$G_k^+ := \{I_g(I_{k,n-k}) \mid g \in U(n)\}$$

とおく。各 $x \in G_k^+$ に対して、 x の固有値 -1 に対する固有空間を対応させる写像は、 G_k^+ から $G_k(\mathbb{C}^n)$ への $U(n)$ 同変微分同相写像になり、(Riemann 計量の定数倍を除いて) 等長的である。したがって、

$$F(1_n, U(n)) = \bigcup_{k=0}^n G_k^+ \cong \bigcup_{k=0}^n G_k(\mathbb{C}^n)$$

が $U(n)$ の極地の全体である。

次に、 S を $U(n)$ の極大対蹠部分群とする。 S は互いに可換で対合的な元からなるので、 S の元は同次対角化可能で、ある $g \in U(n)$ に対して $I_g(S) = \Delta_n := \{\text{diag}(\underbrace{\pm 1, \dots, \pm 1}_n)\}$

となる。よって、 $U(n)$ の極大対蹠部分群の共役類はただ 1 つで、その代表元として Δ_n がとれる。 A を $G_k(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合とする。 $G_k(\mathbb{C}^n)$ を $U(n)$ の極地 G_k^+ と同一視すると、 $A \subset G_k^+ \subset F(s_{1_n}, U(n))$ より $\{1_n\} \cup A$ は $U(n)$ の対蹠集合で、これを含む $U(n)$ の極大対蹠部分群 \tilde{A} が存在する。上で述べたことから、ある $g \in U(n)$ に対して $\tilde{A} = I_g(\Delta_n)$ となる。このとき、 $A = \tilde{A} \cap G_k^+ = I_g(\Delta_n \cap G_k^+)$ となるので、 A は

$$\Delta_n \cap G_k^+ = \{d = \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1) \in \Delta_n \mid d \text{ の対角成分の } -1 \text{ の個数は } k\}$$

と合同である。これは、 \mathbb{C}^n の標準的ユニタリ基底を e_1, \dots, e_n としたとき、 $G_k(\mathbb{C}^n)$ の部分集合

$$\{\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle_{\mathbb{C}} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

に対応する。

3 非連結コンパクト Lie 群の極地

連結コンパクト Riemann 対称空間には、連結コンパクト Lie 群の極地としては実現されないが、非連結コンパクト Lie 群の極地としては実現されるものがある。一般に、連結コンパクト Riemann 対称空間の極地については、Chen-Nagano [CN1] や Nagano [N1, N2] で詳しく研究されているので、連結コンパクト Lie 群の極地に関する基本的な性質は知られている。この節では、非連結コンパクト Lie 群の極地について調べた [TT5] の結果について述べる。

G をコンパクト Lie 群、 e を G の単位元、 G_0 を G の単位連結成分とする。 $G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を G の連結成分への分解とする。ただし $0 \in \Lambda$ である。このとき、

$$F(s_e, G) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (F(s_e, G) \cap G_\lambda)$$

であるが、 $F(s_e, G) \cap G_0 = F(s_e, G_0)$ については先行研究からわかるので、 $F(s_e, G) \cap G_\lambda$, $\lambda \neq 0$ について考える。 $F(s_e, G) \cap G_\lambda \neq \emptyset$ ならば、任意の $x_\lambda \in F(s_e, G) \cap G_\lambda$ に対して、 I_{x_λ} は G_0 の自己同型写像を誘導する。そこで、 G_0 の G_0 への作用 $\rho_{I_{x_\lambda}}$ を

$$\rho_{I_{x_\lambda}}(g)(h) := ghI_{x_\lambda}(g)^{-1} \quad (g, h \in G_0)$$

で定義する。一般に、 G_0 の自己同型写像 σ に対して、 $\rho_\sigma(g)(h) = gh\sigma(g)^{-1}$ ($g, h \in G_0$) で定義される G_0 の作用 ρ_σ を σ による**振れた共役作用**とよぶ。 ρ_σ は Hermann 作用であり、Hermann 作用の一般論から次のことが成り立つ。

命題 3.1. ([TT2, Proposition 3], [TT5, Lemma 3.1]) T_λ を $F(I_{x_\lambda}, G_0)$ の極大トーラスとすると、

$$G_\lambda = \bigcup_{g \in G_0} g(x_\lambda T_\lambda)g^{-1}$$

が成り立つ。

これは、連結コンパクト Lie 群の共役作用に関する標準形がその極大トーラスで与えられる、というよく知られた性質に対応するもので、 G_0 による共役作用に関する G_λ の標準形が $x_\lambda T_\lambda$ で与えられることを表している。このことを用いると、

$$F(s_e, G) \cap G_\lambda = F(s_e, G) \cap \left(\bigcup_{g \in G_0} g(x_\lambda T_\lambda)g^{-1} \right) = \bigcup_{g \in G_0} g\{x \in x_\lambda T_\lambda \mid x^2 = e\}g^{-1}$$

となるので、 G_λ 内の極地を求めるには、 $\{x \in x_\lambda T_\lambda \mid x^2 = e\}$ を求めて、その元の G_0 共役軌道のうち、異なるものを決定すればよい。これは、具体的に与えられた G に対して実行可能である。

一方、次のことが成り立つ。

命題 3.2. ([TT5, Proposition 3.2, Proposition 4.1]) G_λ をコンパクト Lie 群 G の連結成分 ($\neq G_0$) とする。 $F(s_e, G) \cap G_\lambda \neq \emptyset$ とし、 x_λ をその元とする。このとき、 $G_0 \cup G_\lambda$ は部分群で、 $G_0 \cup G_\lambda \cong G_0 \rtimes \langle I_{x_\lambda} \rangle$ が成り立つ。ここで、 $\langle I_{x_\lambda} \rangle$ は I_{x_λ} が生成する $\text{Aut}(G_0)$ の部分群である。

これより、非連結コンパクト Lie 群 G の極地を決定することは、半直積 $G_0 \rtimes \langle I_{x_\lambda} \rangle$ の極地を決定することに帰着される。そこで、以下では、連結コンパクト Lie 群 G とその対合的自己同型写像 σ に対して、 $G \rtimes \langle \sigma \rangle$ の極地を調べる。 $G \rtimes \langle \sigma \rangle$ を扱うための記号の設定をする。 $\langle \sigma \rangle$ の単位元を 1 で表し、 $\langle \sigma \rangle = \{1, \sigma\}$ とする。

$$G \rtimes \langle \sigma \rangle = (G, 1) \cup (G, \sigma)$$

を $G \rtimes \langle \sigma \rangle$ の連結成分への分解とする。 $G \rtimes \langle \sigma \rangle$ の演算は、 $g, h \in G$ に対して

$$\begin{aligned} (g, 1)(h, 1) &= (gh, 1), & (g, 1)(h, \sigma) &= (gh, \sigma), \\ (g, \sigma)(h, 1) &= (g\sigma(h), \sigma), & (g, \sigma)(h, \sigma) &= (g\sigma(h), 1) \end{aligned}$$

である。

定理 3.3. ([TT5, Theorem 4.7]) G の単位元を e 、 $\hat{G} := G \rtimes \langle \sigma \rangle$ の単位元を \hat{e} とおくと、

$$F(s_{\hat{e}}, \hat{G}) = (F(s_e, G), 1) \cup (F(s_e \circ \sigma, G), \sigma)$$

が成り立つ。したがって、 $(F(s_e, G), 1)$ の連結成分、および、 $(F(s_e \circ \sigma, G), \sigma)$ の連結成分は \hat{G} の極地である。さらに、 $(F(s_e \circ \sigma, G), \sigma)$ の (e, σ) を含む連結成分は、 $(\rho_\sigma(G)(e), \sigma)$ に一致する。ここで、 $\rho_\sigma(G)(e) \cong G/F(\sigma, G)$ である。

証明について述べる。 $F(s_{\hat{e}}, \hat{G}) \cap (G, 1) = (F(s_e, G), 1)$ である。また、

$$\begin{aligned} (g, \sigma) \in F(s_{\hat{e}}, \hat{G}) \cap (G, \sigma) &\Leftrightarrow (g, \sigma) = (g, \sigma)^{-1} = (\sigma(g^{-1}), \sigma) \\ &\Leftrightarrow g = \sigma(g^{-1}) = \sigma \circ s_e(g) = s_e \circ \sigma(g) \end{aligned}$$

より、 $F(s_{\hat{e}}, \hat{G}) \cap (G, \sigma) = (F(s_e \circ \sigma, G), \sigma)$ である。したがって、極地の定義から、 $(F(s_e, G), 1)$ の連結成分、および、 $(F(s_e \circ \sigma, G), \sigma)$ の連結成分は \hat{G} の極地である。命題 2.1 より極地は共役軌道であるが、 $g, h \in G$ に対して $(g, 1)(h, \sigma)(g, 1)^{-1} = (\rho_\sigma(g)(h), \sigma)$ がわかるので、 (e, σ) を含む連結成分は、 $(\rho_\sigma(G)(e), \sigma)$ に一致する。 σ による捩れた共役作用 $\rho_\sigma(G)$ の e におけるイソトロピー部分群は $F(\sigma, G)$ である。

4 $U(n)/O(n)$ とその商空間の極大対蹠集合の分類

この節では、コンパクト Riemann 対称空間 $U(n)/O(n)$ の極大対蹠集合の合同類の分類、および、 $U(n)/O(n)$ の商空間の極大対蹠集合の合同類の分類の結果について述べる。

まず、 $U(n)/O(n)$ のコンパクト Lie 群の極地としての実現について述べる。 $U(n)$ を n 次ユニタリ群とし、 1_n で n 次単位行列を表す。 $\sigma_I : U(n) \rightarrow U(n)$ を $\sigma_I(g) = \bar{g}$ ($g \in U(n)$) で定義する。ここで、 \bar{g} は g の複素共役である。 σ_I は $U(n)$ の対合的自己同型写像である。

$$UI(n) := \{g \in U(n) \mid \sigma_I(g) = g^{-1}\} = F(s_{1_n} \circ \sigma_I, U(n))$$

とおくと、 $UI(n) = \{g \in U(n) \mid {}^t g = g\}$ であり、対称ユニタリ行列 a はあるユニタリ行列 b によって $ba^t b = 1_n$ となることから、

$$UI(n) = \{g 1_n {}^t g \mid g \in U(n)\} = \rho_{\sigma_I}(U(n))(1_n) \cong U(n)/O(n)$$

がわかる。特に、 $UI(n)$ は連結である。

σ_I に対して半直積 $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ を考え、 $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle = (U(n), 1) \cup (U(n), \sigma_I)$ を連結成分への分解とする。 $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の単位元 $(1_n, 1)$ を e で表す。このとき、

$$F(s_e, U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle) \cap (U(n), 1) = (F(s_{1_n}, U(n)), 1)$$

であり、2節で述べたことから

$$F(s_{1_n}, U(n)) = \bigcup_{k=0}^n G_k(\mathbb{C}^n)$$

である。一方、

$$F(s_e, U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle) \cap (U(n), \sigma_I) = (UI(n), \sigma_I)$$

であり、 $(UI(n), \sigma_I)$ は $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極地の1つである。

3節で述べたことを用いて、 $UI(n) \cong U(n)/O(n)$ の極大対蹠集合を求める。そのために、 $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極大対蹠部分群の共役類を決定する必要がある。

定理 4.1. ([TT2, Lemma 3]) $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極大対蹠部分群は $\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle (= \Delta_n \times \langle \sigma_I \rangle)$ に $(U(n), 1)$ の元で共役である。

証明の概要を述べる。 A を $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極大対蹠部分群とすると、 $A \cap (U(n), \sigma_I) \neq \emptyset$ がわかる。

$$\begin{aligned} A \cap (U(n), \sigma_I) &\subset F(s_e, U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle) \cap (U(n), \sigma_I) \\ &= (UI(n), \sigma_I) \\ &= (\rho_{\sigma_I}(U(n))(1_n), \sigma_I) \\ &= \bigcup_{g \in U(n)} (g, 1)(1_n, \sigma_I)(g, 1)^{-1} \end{aligned}$$

より、 $A \cap (U(n), \sigma_I)$ の元は $(1_n, \sigma_I)$ に $(U(n), 1)$ の元で共役であることに注意しておく。

命題 3.1 を $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ に適用すると、 $F(\sigma_I, U(n)) = O(n)$ の極大トーラス T に対して

$$(U(n), \sigma_I) = \bigcup_{g \in U(n)} (g, 1)(T, \sigma_I)(g, 1)^{-1}$$

が成り立つ。これより、必要があれば A を $(U(n), 1)$ の元で共役なものに取り換えることにより $A \cap (T, \sigma_I) \neq \emptyset$ が成り立つ。さらに、上で述べたことから、 A を $(U(n), 1)$ の元で共役なものに取り換えることにより、 $(1_n, \sigma_I) \in A$ が成り立つ。このとき、 A の任意の元は $(1_n, \sigma_I)$ と可換になることから、 $A \cap (U(n), 1) \subset (F(\sigma_I, U(n)), 1) = (O(n), 1)$ がわかる。 A の極大性から $A \cap (U(n), 1)$ は $(O(n), 1)$ の極大対蹠部分群である。したがって、

$A \cap (U(n), 1)$ は $(\Delta_n, 1)$ に $(O(n), 1)$ の元で共役である。よって、必要があれば A を共役なものに取り換えることにより $A \cap (U(n), 1) = (\Delta_n, 1)$ とできる。 $\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ は $(\Delta_n, 1)$ を含む極大対蹠部分群なので、 $A = \Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ が成り立つ。 σ_I の Δ_n への作用は自明なので $\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle = \Delta_n \times \langle \sigma_I \rangle$ である。

2節で述べたことと、定理 4.1 から $UI(n)$ の極大対蹠集合の分類結果を得る。

定理 4.2. $UI(n)$ の極大対蹠集合は Δ_n に合同である。

次に、 $UI(n)$ の商空間を考える。自然数 μ に対して $\mathbb{Z}_\mu = \{z1_n \mid z^\mu = 1\}$ とおくと、 \mathbb{Z}_μ は $U(n)$ の中心の部分群である。 \mathbb{Z}_μ は積により $UI(n)$ に作用する。この作用による商空間を $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ で表す。 σ_I は \mathbb{Z}_μ を保つことから、 $U(n)$ の商群 $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の対合的自己同型写像を誘導するので、これも σ_I で表す。 $\pi_n : U(n) \rightarrow U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ を自然な射影とすると、 $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu = \pi_n(UI(n))$ である。 $e' = \pi_n(1_n)$ とおく。 $UI(n) = F(s_{1_n} \circ \sigma_I, U(n))$ より、

$$\pi_n(UI(n)) = \pi_n(F(s_{1_n} \circ \sigma_I, U(n))) \subset F(s_{e'} \circ \sigma_I, \pi_n(U(n))) = F(s_{e'} \circ \sigma_I, U(n)/\mathbb{Z}_\mu)$$

となるので、 $(UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I)$ は $U(n)/\mathbb{Z}_\mu \times \langle \sigma_I \rangle$ の極地の 1 つである。ここで、 $F(s_{e'} \circ \sigma_I, U(n)/\mathbb{Z}_\mu)$ は一般には連結とは限らない。 $\mu = 2$ で n が偶数のとき連結成分の個数は 2 である。

一方、 $(\mathbb{Z}_\mu, 1)$ は $U(n) \times \langle \sigma_I \rangle$ の正規部分群であり、商群 $U(n) \times \langle \sigma_I \rangle / (\mathbb{Z}_\mu, 1)$ を単に $U(n) \times \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ と書くことにする。このとき、 $U(n) \times \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu = U(n)/\mathbb{Z}_\mu \times \langle \sigma_I \rangle$ である。 $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合の分類を得るためには、 $U(n) \times \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群の分類結果が必要である。それを述べるための記号の準備をする。

$$I_1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおき、

$$D[4] := \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\} \subset O(2)$$

を二面体群とする。 $n = 2^k \cdot l$ と 2 の冪と奇数 l の積に分解する。 $0 \leq s \leq k$ を満たす自然数 s に対して

$$\begin{aligned} D(s, n) &:= \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_s \otimes \Delta_{n/2^s} \\ &= \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \mid d_i \in D[4] (1 \leq i \leq s), d_0 \in \Delta_{n/2^s}\} \subset O(n) \end{aligned}$$

とおく。 θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。

定理 4.3. 上記の記号のもとで、 $U(n) \times \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は、次のいずれかに $\pi_n(U(n), 1)$ の元で共役である。

- (1) μ が奇数のとき、 $\pi_n(\Delta_n \times \langle \sigma_I \rangle)$.
- (2) μ が偶数のとき、 $\pi_n(\{1, \theta\} D(s, n) \times \langle \sigma_I \rangle)$ ($0 \leq s \leq k$). ただし、 $(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(2) の除外は、次の理由から $(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合には極大にならないためである。 $\Delta_2 = \{\pm 1_2, \pm I_1\}$ は $D[4]$ に真に含まれることから、 $D(k-1, 2^k) = \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{k-1} \otimes \Delta_2$ は $D(k, 2^k) = \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_k$ に真に含まれる。よって、 $\pi_n(\{1, \theta\}D(k-1, 2^k) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)$ は $\pi_n(\{1, \theta\}D(k, 2^k) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)$ に真に含まれるので極大ではない。

定理 4.3 を利用して、 $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合の分類を決定する。 A を $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合とする。 $(A, \sigma_I) \subset (UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I)$ で、 $(UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I)$ は $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ の極地であるから、 $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群 \tilde{A} で、 $\tilde{A} \cap (UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I) = (A, \sigma_I)$ を満たすものが存在する。 μ が奇数のとき、定理 4.3 から、ある $g \in U(n)$ に対して

$$\tilde{A} = \pi_n(g, 1)\pi_n(\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle)\pi_n(g, 1)^{-1}$$

であり、

$$\begin{aligned} & \pi_n(g, 1)\pi_n(\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle)\pi_n(g, 1)^{-1} \\ &= \pi_n((g, 1)(\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle)(g, 1)^{-1}) \\ &= \pi_n((I_g(\Delta_n), 1) \cup (\rho_{\sigma_I}(g)(\Delta_n), \sigma_I)) \\ &= (\pi_n(I_g(\Delta_n)), 1) \cup (\pi_n(\rho_{\sigma_I}(g)(\Delta_n)), \sigma_I) \end{aligned}$$

となることから、

$$\begin{aligned} (A, \sigma_I) &= \tilde{A} \cap (UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I) \\ &= (\pi_n(\rho_{\sigma_I}(g)(\Delta_n)), \sigma_I) \cap (UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I) \\ &= (\pi_n(\rho_{\sigma_I}(g)(\Delta_n)), \sigma_I) \end{aligned}$$

がわかり、 $A = \pi_n(\rho_{\sigma_I}(g)(\Delta_n))$ を得るので、 A は $\pi_n(\Delta_n)$ に合同である。

μ が偶数のときには、定理 4.3 から、ある $g \in U(n)$ と $0 \leq s \leq k$ を満たす自然数 s に対して

$$\tilde{A} = \pi_n(g, 1)\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)\pi_n(g, 1)^{-1}$$

である。ただし、 $(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

$$\begin{aligned} & \pi_n(g, 1)\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)\pi_n(g, 1)^{-1} \\ &= \pi_n((g, 1)((\{1, \theta\}D(s, n), 1) \cup (\{1, \theta\}D(s, n), \sigma_I)(g, 1)^{-1})) \\ &= \pi_n((I_g(\{1, \theta\}D(s, n)), 1) \cup (\rho_{\sigma_I}(g)(\{1, \theta\}D(s, n)), \sigma_I)) \\ &= (\pi_n(I_g(\{1, \theta\}D(s, n))), 1) \cup (\pi_n(\rho_{\sigma_I}(g)(\{1, \theta\}D(s, n))), \sigma_I) \end{aligned}$$

となることから、 $UI(n)$ が $\rho_{\sigma_I}(U(n))$ で不変であることを用いると、

$$\begin{aligned} (A, \sigma_I) &= \tilde{A} \cap (UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I) \\ &= (\pi_n(\rho_{\sigma_I}(g)(\{1, \theta\}D(s, n)), \sigma_I) \cap (\pi_n(UI(n)), \sigma_I)) \\ &= (\pi_n(\rho_{\sigma_I}(g)(\{1, \theta\}D(s, n)) \cap UI(n)), \sigma_I) \end{aligned}$$

となるので、 A は $\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n) \cap UI(n))$ に合同である。

$$PD(s, n) := \{d \in D(s, n) \mid d^2 = 1_n\}$$

とおくと、 $D(s, n) \cap UI(n) = PD(s, n)$ となるので、 A は $\pi_n(\{1, \theta\}PD(s, n))$ に合同である。以上から次を得る。

定理 4.4. 定理 4.3 の記号のもとで、 $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同である。

- (1) μ が奇数のとき、 $\pi_n(\Delta_n)$.
- (2) μ が偶数のとき、 $\pi_n(\{1, \theta\}PD(s, n))$ ($0 \leq s \leq k$). ただし、 $(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

参考文献

- [C] B.-Y. Chen, Two-numbers and their applications - A survey, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 25 (2018), 565–596.
- [CN1] B.-Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, II, Duke Math. J., 45 (1978), 405–425.
- [CN2] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., 308 (1988), 273–297.
- [N1] T. Nagano, The involutions of compact symmetric spaces, Tokyo J. Math., 11 (1988), 57–79.
- [N2] T. Nagano, The involutions of compact symmetric spaces, II, Tokyo J. Math., 15 (1992), 39–82.
- [T] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R -spaces, Nagoya Math. J., 115 (1989), 43–46.
- [TT1] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R -spaces, Osaka J. Math., 50 (2013), 161–169.
- [TT2] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of the automorphism groups of compact Lie algebras, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 203, Hermitian-Grassmannian Submanifolds, Y. J. Suh et al. (eds.), (2017), 39–47.
- [TT3] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of some compact classical Lie groups, J. Lie Theory, 27 (2017), 801–829.
- [TT4] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal sets of compact classical symmetric spaces and their cardinalities I, Differ. Geom. Appl., 73 (2020) 101682.

- [TT5] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Polars of disconnected compact Lie groups, to appear in *Contemporary Mathematics 777, Differential Geometry and Global Analysis: in honor of Tadashi Nagano, B.-Y. Chen, N. D. Brubaker, T. Sakai, M. S. Tanaka, B. D. Suceavă, H. Tamaru, M. B. Vajiac* (eds.).
- [TTY] M. S. Tanaka, H. Tasaki and O. Yasukura, Maximal antipodal sets related to G_2 , submitted.