調和解析の問題

伊師英之[1]（大阪市立大学・数学研究所）
Hideyuki ISHI
OCAMI, Osaka City University

§1. 序.

調和解析は実に多義的な言葉であるが，本稿では Fourier 解析の非可換群への一般化，いわゆる非可換調和解析を指すものとする．すなわち，群作用によって記述される対称性をもつ函数および函数空間の解析を，群の表現論を援用して研究する分野である．Lie 群上の解析，もしくは Lie 群が推移的に作用する等質空間上の解析を考える場合が大多数であり，とくに複素射影空間，旗多様体，有界対称領域などの上では調和解析と複素解析が共鳴して豊かな理論が発展してきた．一方，複素解析性（holomorphy）と調和解析が結びついた設定においては，リー群の複素多様体への作用が推移的でなくても，その作用の記述する対称性が函数空間の構造を強く統制するということが起こり得る．代表的な例が，函数空間に実現される群の表現の既約分解が無重複である状況であり，その状況を引き起こす群作用として，小林俊行氏 [15, 16, 17] が導入した強可視的作用がある．等質でない複素有界領域である Cartan-Hartogs 領域 [28] およびそのヴァリエーション [5, 6, 9, 27] について，種々の具体的な計算（Bergman 核の明示公式 [9, 13, 27], Kähler-Einstein 計量の構成 [20, 26]，幾何学的量子化 [29] など）が実行可能であった背景には，この強可視的作用の存在があるのではないかという推測を，一つの問題として挙げる．その推測の延長として，本稿では強可視的作用を許容する新しいタイプの複素領域を提示する．この複素領域上で，Cartan-Hartogs 領域について行われてきた計算を実行するのは，成果が見込める問題である．

正則同型群が推移的に作用する複素有界領域を有界等質領域という．E. Cartan [1] は 3 次元以下の有界等質領域は有界対称領域であることを示し，全ての有界対称領域を分類したが，対称ではない有界等質領域は Cartan の研究から四半世紀が経った Piatatetskii-Shapiro の仕事 [21, 22] において初めて発見された．現在は，有界等質領域のごく一部が有界対称領域であることが判明しているが，対称ではない有界等質領域は依然として「見えにくい」存在であり，有界対称領域について成り立つ定理がどのくらい有界等質領域にも一般化できるのか，あるいは有界対称領域についてのみ成り立つ主張なのか（すなわち対称性の特徴づけになっているか）は，基本的で問題である ([2, 3, 10, 19])．そのような問題，すなわち新しい特徴づけの予想を，我々の観点から一つ与える．

[1]E-mail: hideyuki-ishi@osaka-cu.ac.jp
この研究は科研費 20K03657 および大阪市立大学数学研究所 (文科省共同利用・共同研究拠点「数学・理論物理の協働・共創による新たな国際的研究・教育拠点」JPMXP0619217849) の助成を受けている．

本稿で用いる記号を説明する．ベクトル $z, w \in \mathbb{C}^n$ について標準的なエルミート内積 $\sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k$ を $(z|w)$ と書き，$\|z\| := \sqrt{(z|z)}$ とする．行列 $Z \in \mathrm{Mat}(n, m, \mathbb{C})$ を線型変換 $\mathbb{C}^m \ni u \mapsto Zu \in \mathbb{C}^n$ とみなしたときの作用素ノルムを $\|Z\|_{\mathrm{op}}$ と書く．対角成分が $t_1, \ldots, t_n$ であるような n 次の対角行列は $\mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ で表す．集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ の閉包は $\mathrm{Cl}(U)$ と書く．非負整数 n について $(x)_n := \Gamma(x+n)/\Gamma(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ とする．

§2. 無重複表現．

導入として，初等的な線型代数の議論から始めよう．対角化可能な行列 $A \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ に対し，A と可換な行列全体のなす多元環 $Z(A) := \{\, B \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{R})\, ;\, AB = BA \}$ が可換である必要十分条件は A の固有値 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ が互いに相異なることであり，そのとき A の対角化を与える行列によって，全ての $B \in Z(A)$ は同時対角化される．すなわち $\Phi \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ によって $\Phi^{-1} A \Phi = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ となるならば $\Phi^{-1} B \Phi = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_N)$ となる $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{C}$ が存在する．ユニタリ表現論において，この状況の一般化にあたるのが無重複表現である．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に定義された群 G のユニタリ表現 $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ が無重複であるとは，有界線型作用素 $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ で $\forall g \in G\ \pi(g)B = B\pi(g)$ となるもの全体のなす多元環 $\mathrm{End}_G(\mathcal{H})$ が可換であることをいう．このとき，互いに同値でない G の既約ユニタリ表現の族 $\{(\pi_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積分として π が既約分解され，同じ分解が $\mathrm{End}_G(\mathcal{H})$ に属する作用素の同時スペクトル分解を与える．すなわち，添字集合 Λ 上の測度 ν があって，直積分 $\int_\Lambda^\oplus \mathcal{H}_\lambda \, d\nu(\lambda)$ と $\mathcal{H}$ との間のユニタリ同型 $\Phi : \int_\Lambda^\oplus \mathcal{H}_\lambda \, d\nu(\lambda) \ni v = (v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto \Phi v \in \mathcal{H}$ で任意の $g \in G$ に対して

$$\pi(g)\Phi v = \Phi[\pi_\lambda(g) v_\lambda]$$

を満たすものが存在し，このとき各 $B \in \mathrm{End}_G(\mathcal{H})$ に対して

$$B\Phi v = \Phi[b(\lambda) v_\lambda]$$

となる $b \in L^\infty(\Lambda, \nu)$ が存在する．逆に，ユニタリ表現が互いに同値でない既約ユニタリ表現の直積分に分解される（この状況こそが無重複という語感に沿うといえる）ならば，$\mathrm{End}_G(\mathcal{H})$ が可換であることも証明できる．

例 1.　正数 $R > 0$ を固定し，開球 $\mathbb{B}_R^m := \{\, z \in \mathbb{C}^m\, ;\, \|z\| < R \,\}$ に関する Bergman 空間 $L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{B}_R^m)$ 上にユニタリ群 $U(m)$ のユニタリ表現 π が次のように自然に定義される：

$$\pi(A) f(z) := f(A^{-1} z) \quad (A \in U(m),\ f \in L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{B}_R^m),\ z \in \mathbb{B}_R^m).$$

非負整数 $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $\mathbb{C}^m$ 上の λ 次の斉次正則多項式全体の空間を $\mathrm{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ と表すと，$L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{B}_R^m) = \sum_{\lambda \geq 0}^\oplus \mathrm{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ は π の既約分解を与え，部分表現

$\pi_\lambda := (\pi, \mathrm{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^m))$ は互いに同値でない．したがって π は無重複表現であり，$\pi(A)$ と可換な有界線型作用素 $B : L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{B}^m_R) \to L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{B}^m_R)$，たとえば $\|z\|$ のみに依存する $\mathbb{B}^m_R$ 上の有界函数 ϕ を表象とする Toeplitz 作用素 T_ϕ に対し，$\mathrm{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ は固有空間となっている．上述の記号に合わせると $\sum^{\oplus}_{\lambda\geq 0} \mathrm{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ は $\Lambda = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 上の計数測度 ν に関する $\mathrm{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ $(\lambda \in \Lambda)$ の直積分に他ならず，$v = (v_\lambda) \in \int^{\oplus}_{\Lambda} \mathrm{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^m)\, d\nu(\lambda)$ について $\Phi v = \sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda \in L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{B}^m_R)$ である．

例 2. 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の開凸錐 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ で $\mathrm{Cl}(\mathcal{C}) \cap (-\mathrm{Cl}(\mathcal{C})) = \{0\}$ となるもの（正則開凸錐）を考える．正値連続函数 $\psi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_{>0}$ が次数 κ の斉次性（すなわち任意の $c > 0$ と $y \in \mathcal{C}$ について $\psi(cy) = c^\kappa \psi(y)$）をもち，ある $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して積分 $I_\psi(\lambda_0) := \int_{\mathcal{C}} e^{-(2y|\lambda_0)}\, \psi(y)\, dy$ が有限値であるとする．たとえば ψ が正の定数ならば，この条件はみたされる．このとき管状領域 $T_{\mathcal{C}} := \mathbb{R}^n + i\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^n$ 上の（荷重つき） Bergman 空間 $L^2_{\mathrm{hol}}(T_{\mathcal{C}}, \psi(y)\, dxdy)$ は $\{0\}$ ではなく，その上には加法群 $\mathbb{R}^n$ の表現 π が

$$\pi(a)f(z) := f(z-a) \quad (a \in \mathbb{R}^n,\ f \in L^2_{\mathrm{hol}}(T_{\mathcal{C}}, \psi(y)\, dxdy),\ z \in T_{\mathcal{C}})$$

によって定義される．正則開凸錐 $\mathcal{C}$ の双対錐 $\{\, \lambda \in \mathbb{R}^n\, ;\, (y|\lambda) > 0\ \forall y \in \mathrm{Cl}(\Omega) \setminus \{0\}\,\}$ を $\mathcal{C}^*$ と書く．全ての $\lambda \in \mathcal{C}^*$ において $I_\psi(\lambda) = \int_{\mathcal{C}} e^{-(2y|\lambda)}\, \psi(y)\, dy$ は有限値である．ユニタリ同型 $\Phi : L^2(\mathcal{C}^*, I_\psi(\lambda)^{-1}\, d\lambda) \to L^2_{\mathrm{hol}}(T_{\mathcal{C}}, \psi(y)\, dxdy)$ を

$$\Phi v(z) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathcal{C}^*} e^{i(z|\lambda)} v(\lambda) I_\psi(\lambda)^{-1}\, d\lambda \quad (v \in L^2(\mathcal{C}^*, I_\psi(\lambda)^{-1}\, d\lambda))$$

によって定める（[23, Theorem 2.12]. Φ の等距離性は Plancherel の公式から得られる等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi v(x+iy)|^2\, dx = \int_{\mathcal{C}^*} e^{-2(y|\xi)} |v(\lambda)|^2 I_\psi(\lambda)^{-2} d\lambda$$

の両辺を $y \in \mathcal{C}$ に関して積分することによって得られる）．このとき $a \in \mathbb{R}^n$ に対して $\Phi v(z-a) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathcal{C}^*} e^{i(z|\lambda)} e^{-i(a|\lambda)} v(\lambda) I_\psi(\lambda)^{-1}\, d\lambda$ であるから，Φ は $\mathbb{R}^n$ のユニタリ表現 $(\pi, L^2_{\mathrm{hol}}(T_{\mathcal{C}}, \psi(y)\, dxdy))$ の既約分解を与えている．実際，$\lambda \in \mathcal{C}^*$ に対して 1 次元ユニタリ表現 $\pi_\lambda : \mathbb{R}^n \ni a \mapsto e^{-i(a|\lambda)} \in U(1)$ の作用する空間を $\mathbb{C}_\lambda$ と書くものとすると，$L^2(\mathcal{C}^*, I_\psi(\lambda)^{-1}\, d\lambda)$ は $\int^{\oplus}_{\mathcal{C}^*} \mathbb{C}_\lambda\, I_\psi(\lambda)^{-1}\, d\lambda$ と自然に同一視できる．すべての $\pi(a)$ $(a \in \mathbb{R}^n)$ と可換な有界線型作用素 $B : L^2_{\mathrm{hol}}(T_{\mathcal{C}}, \psi(y)\, dxdy) \to L^2_{\mathrm{hol}}(T_{\mathcal{C}}, \psi(y)\, dxdy)$, たとえば Schwartz 急減少函数 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ に関する畳込み作用素 $B_\phi f(z) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(a) f(z-a)\, da$ $(f \in L^2_{\mathrm{hol}}(T_{\mathcal{C}}, \psi(y)\, dxdy))$ について，$B\Phi v = \Phi[b(\lambda)v(\lambda)]$ $(v \in L^2(\mathcal{C}^*, I_\psi(\lambda)^{-1}\, d\lambda))$ となる有界可測函数 $b \in L^\infty(\mathcal{C}^*, d\lambda)$ が存在する $(B = B_\phi$ のときは $b(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(a|\lambda)} \phi(a)\, da$ である$)$.

ここまで見てきた二つの分解 $L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{B}^m_R) = \sum^{\oplus}_{\lambda\geq 0} \mathrm{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ と $L^2_{\mathrm{hol}}(T_{\mathcal{C}}, \psi(y)\, dxdy) \simeq \int^{\oplus}_{\mathcal{C}^*} \mathbb{C}_\lambda\, I_\psi(\lambda)^{-1}\, d\lambda$ のように，群作用が引き起こす無重複表現の既約分解は，函数

空間の解析において有用な道具である．たとえば，次のような議論で再生核がうまく計算できる場合が多々ある．一般に，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が空間 X 上の函数空間であり，各 $x \in X$ に対して線型汎函数 $\delta_x : \mathcal{H} \ni f \to f(x) \in \mathbb{C}$ が連続のとき，Riesz の表現定理により $\delta_x(f) = (f|K_x)_{\mathcal{H}}$ となる $K_x \in \mathcal{H}$ が存在する．このとき $\mathcal{H}$ の再生核 $K^{\mathcal{H}} : X \times X \to \mathbb{C}$ は $K^{\mathcal{H}}(x,y) := K_y(x)\ \ (x, y \in X)$ によって定義される．ユニタリ同型 $\Phi : \int_\Lambda^\oplus \mathcal{H}_\lambda \, d\nu(\lambda) \to \mathcal{H}$ が与えられた場合，$\delta_x \circ \Phi$ は直積分 $\int_\Lambda^\oplus \mathcal{H}_\lambda \, d\nu(\lambda)$ 上の連続線型汎函数だから $k_x = (k_{x,\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \in \int_\Lambda^\oplus \mathcal{H}_\lambda \, d\nu(\lambda)$ で

$$\Phi v(x) = \int_\Lambda (v_\lambda | k_{x,\lambda})_{\mathcal{H}_\lambda} \, d\nu(\lambda) \quad \Big(v = (v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \int_\Lambda^\oplus \mathcal{H}_\lambda \, d\nu(\lambda)\Big)$$

となるものが存在する．このとき $K_y = \Phi k_y$ だから

$$K^{\mathcal{H}}(x,y) = \Phi k_y(x) = \int_\Lambda (k_{y,\lambda} | k_{x,\lambda})_{\mathcal{H}_\lambda} \, d\nu(\lambda)$$

となる．ここで $\mathcal{H}_\lambda$ は既約ユニタリ表現が実現される Hilbert 空間だから $k_{x,\lambda} \in \mathcal{H}_\lambda$ は綺麗な形になることが多い．以上の議論を二つの例で確認しよう．空間 $\mathrm{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ の内積を $L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{B}^m_R)$ の部分空間として定義する．このとき $\mathrm{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ の再生核は $K_\lambda(z,w) = K_{w,\lambda}(z) = \frac{1}{\pi^m R^m}(\lambda+1)_m \{\frac{(z|w)}{R^2}\}^\lambda$ となり，$\mathcal{H} = L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{B}^m_R)$ の再生核は

$$K^{\mathcal{H}}(z,w) = \sum_{\lambda \ge 0} K_\lambda(z,w) = \frac{m!}{\pi^m R^m}\Big(1 - \frac{(z|w)}{R^2}\Big)^{-m-1} \tag{2.1}$$

である．一方，$\mathcal{H} = L^2_{\mathrm{hol}}(T_{\mathcal{C}},\, \psi(y)\, dxdy)$ については，Φ の定義から $k_{\lambda,z} = (2\pi)^{-n/2} e^{-i(\overline{z}|\lambda)}$. したがって

$$K^{\mathcal{H}}(z,w) = \int_{\mathcal{C}^*} k_{\lambda,w} \overline{k_{\lambda,z}} I_\psi(\lambda)^{-1} \, d\lambda = (2\pi)^{-n} \int_{\mathcal{C}^*} e^{i(z-\bar{w}|\lambda)} I_\psi(\lambda)^{-1} \, d\lambda \quad (z, w \in T_{\mathcal{C}}) \tag{2.2}$$

である．正則開凸錐 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ は，ある線型リー群 $H \subset GL(\mathbb{R}^n)$ が推移的に作用するとき，等質錐とよぶ．加えて $\psi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_{>0}$ が H の作用について相対不変のとき，積分 I_ψ および (2.2) の右辺は明示的に求積できる（[7, 13, 23]）．一方で，数理統計や最適化といった分野では正則開凸錐や等質錐上の積分について (2.2) に応用できそうな結果の蓄積がある（[12, 18, 24]）．それを踏まえて次を提示したい．

問題 1.** 等質でない正則開凸錐 $\mathcal{C}$ と連続函数 $\psi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_{>0}$ の具体例について (2.2) の右辺を計算せよ．

§3. 強可視的作用．

リー群 G の複素多様体 D への作用が強可視的であるとは，次をみたす totally real な部分多様体 $S \subset D$, 開部分多様体 $D' \subset D$ と反正則微分同相写像 $\sigma : D' \to D'$

で次の三条件をみたすものが存在することをいう：
(SV1) $D' = \bigcup_{x\in S} G\cdot x$,
(SV2) $\sigma|_S = \mathrm{id}_S$,
(SV3) $\forall x \in S\ \ \sigma(G\cdot x) = G\cdot x$.
前節の例 1 では $G = U(m)$, $D = D' = \mathbb{B}^m_R$, $S = \{(t,0,\ldots,0)\,;\, 0\le t<R\}$, $\sigma(z) := \bar{z}$, 例 2 では $G=\mathbb{R}^n$, $D=D'=T_{\mathcal{C}}$, $S=\{\,iy\,;\,y\in\mathcal{C}\,\}$, $\sigma(z) := -\bar{z}$ とすることで条件が満たされるから，それぞれの群作用は強可視的である．

さて，階数有限の G-同変正則ベクトル束 $V\to D$ に対し，正則な大域切断全体の空間 $\mathcal{O}(D,V)$（コンパクト開位相により位相ベクトル空間とみなす）上には G の連続表現が自然に定義される．この表現の部分表現として G のユニタリ表現 $(\pi,\mathcal{H})$ が実現されている（すなわち連続な G-同変埋め込み $\mathcal{H}\to\mathcal{O}(D,V)$ が存在する）という場合を考える．このとき，小林俊行氏による次の定理が成り立つ．

定理 (無重複性の伝播定理 [17, Theorem 4.3])**.** 次の三条件がみたされているとき，G のユニタリ表現 $(\pi,\mathcal{H})$ は無重複表現である：
（底空間の条件） G は D に強可視的に作用し，さらに $\sigma(g\cdot z)=\tilde{\sigma}(g)\sigma(z)$ $(z\in D',\ g\in G)$ となるような群準同型 $\tilde{\sigma}: G\to G$ が存在する．
（ファイバーの条件） 任意の $x\in S$ について，ファイバー V_x に自然に実現される固定部分群 G_x の表現は無重複表現（その分解を $V_x=\sum^{\oplus}_{1\le i\le n(x)} V_x^{(i)}$ と表す）．
（整合性） $\sigma: D'\to D'$ の持ち上げとなる反正則微分同相 $\sigma: V\to V$ が存在し，全ての $x\in S$ と $i=1,\ldots,n(x)$ について $\sigma(V_x^{(i)})=V_x^{(i)}$.

とくに V が自明束 $D\times\mathbb{C}$ の場合，すなわち $(\pi,\mathcal{H})$ が D 上の正則函数からなる空間 $\mathcal{O}(D)$ の部分空間に実現される場合，$\sigma: D\times\mathbb{C}\ni(z,c)\mapsto(\sigma(z),\bar{c})\in D\times\mathbb{C}$ とすればファイバーの条件と整合性条件は自動的に成立する．底空間の条件については例 1 では $\tilde{\sigma}(A)=\bar{A}$, 例 2 では $\tilde{\sigma}(a)=-a$ とすれば満たされる．したがって前節で確認した表現の無重複性は，上記の伝播定理によって保証されていたものといえる．

問題 2.*** リー群の強可視的作用を許容する複素領域について，その上の複素解析を展開せよ．

とくに Bergman 核や Bergman 計量のように正則自己同型群に関する対称性をもつ対象は，強可視的作用の存在および函数空間の分解によって扱いやすくなっていることが期待できる．

§4. Hartogs 領域上の強可視的作用．

有界領域 $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}^n$ は，任意の $z\in\mathcal{U}$ に対して z を孤立固定点とする対合的正則自己同型写像 $s_z:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ が存在するとき有界対称領域という．古典領域（Cartan

領域）とよばれる以下の 4 系統の領域は，有界対称領域の例である：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_I(n,m) &:= \{\, Z \in \mathrm{Mat}(n,m,\mathbb{C})\,;\, \|Z\|_{\mathrm{op}} < 1 \,\}, \\
\mathcal{U}_{II}(n) &:= \{\, Z \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{C})\,;\, \|Z\|_{\mathrm{op}} < 1 \,\}, \\
\mathcal{U}_{III}(n) &:= \{\, Z \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})\,;\, \|Z\|_{\mathrm{op}} < 1 \,\}, \\
\mathcal{U}_{IV}(n) &:= \left\{ z \in \mathbb{C}^n\,;\, \|z\|_{IV} := \sqrt{\|z\|^2 + \sqrt{\|z\|^4 - |z_1^2 + \cdots + z_n^2|^2}} < 1 \right\}
\end{aligned}
$$

これに加えて 16 次元と 27 次元の例外型とよばれる有界対称領域があり，全ての有界対称領域はこれら 6 種類の既約有界対称領域のいくつかの直積と正則同相である ([1])．以後，有界対称領域 $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^N$ は $\mathbb{C}^N$ 上の適切なノルム $|\cdot|_{\mathcal{U}}$ によって $\mathcal{U} = \{\, z \in \mathbb{C}^n\,;\, |z|_{\mathcal{U}} < 1 \,\}$ と定義されているものとする（Harish-Chandra 実現）．さらに $|\cdot|_{\mathcal{U}}$ は共役操作について不変である（つまり $|\bar{z}|_{\mathcal{U}} = |z|_{\mathcal{U}}$）と仮定する．たとえば古典領域の定義に現れた $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ や $\|\cdot\|_{IV}$ は，そういった $|\cdot|_{\mathcal{U}}$ の例である．有界対称領域 $\mathcal{U}$ の Bergman 核を $K_{\mathcal{U}}$ と書くものとする．自然数 m と正数 $s > 0$ について，Hartogs 領域

$$
D(\mathcal{U}, m, s) := \left\{ (z,\zeta) \in \mathcal{U} \times \mathbb{C}^m\,;\, \|\zeta\|^2 < K_{\mathcal{U}}(z,z)^{-s} \right\}
$$

を考える．これは $\mathcal{U}$ が古典領域の場合に Cartan-Hartogs 領域として W. Yin [28] によって導入された（より一般に $\mathcal{U}$ が既約有界対称領域のときに Cartan-Hartogs 領域とよぶことも多い．いずれにしても $K_{\mathcal{U}}(z,z)$ は既約多項式の負ベキになる）．領域 $\mathcal{U}$ の正則自己同型写像全体の群 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{U})$ の普遍被覆群と $U(m)$ との直積を G とすると，群 G は $D(\mathcal{U},m,s)$ に次のように作用する：

$$
g \cdot (z,\zeta) := (h \cdot z, (\det J(h,z))^s A\zeta) \quad (g = (h,A) \in G,\ (z,\zeta) \in D(\mathcal{U},m,s))
$$

ここで $J(h,z)$ は $h \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{U})$ の $z \in \mathcal{U}$ における Jacobi 行列であり，$(\det J(h,z))^s$ は z の正則函数としての $\det J(h,z)$ の累乗の適切な分枝である（連鎖律を成立させるために $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{U})$ の普遍被覆群を考えている）．この G の作用は強可視的である．実際，$\sigma(z,\zeta) := (\bar{z},\bar{\zeta})$ および $S := \{\, (0, te_1)\,;\, 0 \le t < K_{\mathcal{U}}(0,0)^{-s} \,\}$ とすればよい（$e_1 \in \mathbb{R}^m$ は第 1 成分が 1 の標準基底）．一方，Bergman 空間 $L^2_{\mathrm{hol}}(D(\mathcal{U},m,s))$ には自然に G のユニタリ表現が定義され，その無重複表現としての既約分解は

$$
\begin{aligned}
\Phi\colon \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\ge 0}}^{\oplus} L^2_{\mathrm{hol}}(\mathcal{U}, K(z,z)^{-s(\lambda+m)}\,dxdy) \otimes \mathrm{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^m) \ni \sum_{\lambda \ge 0} f_\lambda \otimes v_\lambda& \\
\mapsto f \in L^2_{\mathrm{hol}}(D(\mathcal{U},m,s)),& \\
f(z,\zeta) := \sum_{\lambda \ge 0} f_\lambda(z) v_\lambda(\zeta) \quad ((z,\zeta) \in D(\mathcal{U},m,s))&
\end{aligned}
$$

で与えられる．ただし多項式空間 $\mathrm{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ の内積は例 1 での $R = 1$ の場合のものとする（よって再生核は $\pi^{-m}(m+1)_\lambda (z|w)^\lambda$）．一方，荷重つき Bergman 空

間 $L^2_{\mathrm{hol}}(\mathcal{U}, K(z,z)^{-s(\lambda+m)}\,dxdy)$ の再生核は知られているから ([23])，これらより $L^2_{\mathrm{hol}}(D(\mathcal{U},m,s))$ の再生核，すなわち $D(\mathcal{U},m,s)$ の Bergman 核の無限級数表示が得られる（cf. [5, 11]）．以上の議論は，Cartan-Hartogs 領域の種々の一般化についても成り立つであろう．

問題 3.* 先行研究における Cartan-Hartogs 領域の一般化が強可視的作用を許容するかを調べ，もし許容するならば，その領域についての既存の結果を函数空間の既約分解を用いて解釈せよ．

領域 $D(\mathcal{U},m,s)$ は $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n$ が有界領域であれば定義できる．とくに $\mathcal{U}$ が対称とは限らない有界等質領域のときにも Bergman 核の明示公式が得られており ([8, 13])，$L^2_{\mathrm{hol}}(D(\mathcal{U},m,s))$ に実現される G のユニタリ表現は無重複表現として既約分解できる（[11]）．しかし，G の作用は強可視的とは限らない．

問題 4.* 有界等質領域 $\mathcal{U}$ で $\overline{\mathcal{U}} := \{\,\bar{z};\, z \in \mathcal{U}\,\}$ と正則同値でないものは存在するか？存在するならば，そのような $\mathcal{U}$ の具体例をあげよ．そのとき $D(\mathcal{U},m,s)$ は強可視的作用を許容するか？

この問題へのアプローチとして，低次元の有界等質領域の分類 [14] や有界等質領域の複素構造の代数的議論 [4]，そして $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(D(\mathcal{U},m,s))$ の決定 [25] が参考になるかもしれない．

§5. 新タイプの領域.

有界領域 $\mathcal{U}$ について接ベクトル束 $T\mathcal{U}$ を $\mathcal{U} \times \mathbb{C}^n$ と同一視し，$(z,\zeta) \in T\mathcal{U} \equiv \mathcal{U} \times \mathbb{C}^n$ の Bergman 計量を $ds^2_z(\zeta,\zeta)$ と書く．

$$\hat{\mathcal{U}} := \left\{\, (z,\zeta) \in T\mathcal{U}\,;\, ds^2_z(\zeta,\zeta) < 1 \,\right\}$$

と定める．正則自己同型群 $H := \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{U})$ は $\hat{\mathcal{U}}$ に

$$h\cdot(z,\,\zeta) := (h\cdot z,\ J(h,z)\zeta) \qquad (h \in H,\ (z,\zeta) \in \hat{\mathcal{U}})$$

によって作用する．

問題 5.** 群 H の $\hat{\mathcal{U}}$ への作用が強可視的である必要十分条件は，$\mathcal{U}$ が有界対称領域であることか？

十分性は難しくない．必要性へのアプローチとしては [3] が参考になると思われる．

問題 6.* 有界対称領域 $\mathcal{U}$ について， Bergman 空間 $L^2_{\mathrm{hol}}(\hat{\mathcal{U}})$ を H の表現空間としての既約分解を記述せよ．

分解に現れる既約ユニタリ表現は正則離散系列表現と呼ばれるクラスで，その分類はよく知られている．むしろ，既知の表現に $\hat{\mathcal{U}}$ 上の函数空間という分かりやすい実現を与えることに意義がある．その自然な定義から，$\hat{\mathcal{U}}$ は他にも様々な良い性質をもつと思われる．

問題 7.** 有界対称領域 $\mathcal{U}$ に対し，Cartan-Hartogs 領域 $D(\mathcal{U}, m, s)$ 上の解析の類似を $\hat{\mathcal{U}}$ において展開せよ．

References

[1] E. Cartan, *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1935), 116–162.

[2] J. E. D'Atri and I. Dotti Miatello, *A characterization of bounded symmetric domains by curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **276** (1983), 531–540.

[3] J. E. D'Atri, J. Dorfmeister and Y. D. Zhao, *The isotropy representation for homogeneous Siegel domains*, Pacific J. Math. **120** (1985), 295–326.

[4] I. Dotti Miatello, *Complex structures on normal j-algebras*, J. Pure Appl. Algebra **73** (1991), 247–256.

[5] M. Engliš and G. Zhang, *On a generalized Forelli-Rudin construction*, Complex Var. Elliptic Equ. **51** (2006), 277–294.

[6] Z. Feng and Z. Tu, *Balanced metrics on some Hartogs type domains over bounded symmetric domains*, Ann. Global Anal. Geom. **47** (2015), 305–333.

[7] S. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys, **19** (1964), 1–89.

[8] Y. Hao and A. Wang, *The Bergman kernels of generalized Bergman-Hartogs domains*, J. Math. Anal. Appl. **429** (2015), 326–336.

[9] Z. Huo, *The Bergman kernel on some Hartogs domains*, J. Geom. Anal. **27** (2017), 271–299.

[10] H. Ishi and C. Kai, *The representative domain of a homogeneous bounded domain.*, Kyushu J. Math. **64** (2010), 35–47.

[11] 伊師英之, Hartogs 領域上の調和解析, 表現論シンポジウム講演集 2015, pp. 141–152, 2015

[12] H. Ishi, *Explicit formula of Koszul-Vinberg characteristic functions for a wide class of regular convex cones*, Entropy **18** (2016), Issue 11, 383; doi:10.3390/e18110383.

[13] H. Ishi, J.-D. Park, and A. Yamamori, *Bergman kernel function for Hartogs domains over bounded homogeneous domains*, J. Geom. Anal. **27** (2017), 1703–1736.

[14] S. Kaneyuki and T. Tsuji, *Classification of homogeneous bounded domains of lower dimension*, Nagoya Math. J. **53** (1974), 1–46.

[15] T. Kobayashi, *Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), 497–549.

[16] 小林俊行, 重複のない表現と複素多様体における可視的な作用, 第 53 回幾何学シンポジウム予稿集, pp. 119–133, 2006.

[17] T. Kobayashi, *Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles*, In: Lie Groups: Structure, Actions, and Representations, Progress in Mathematics **306**, pp. 113–140, 2013.

[18] G. Letac and H. Massam, *Wishart distributions for decomposable graphs*, Ann. Statist. **35** (2007), 1278–1323.

[19] 野村隆昭, 等質 Siegel 領域の対称性条件をめぐって, 数学 **57** (2005), 350–368.

[20] L. Pan, A. Wang, and L. Zhang, *On the Kähler-Einstein metric of Bergman-Hartogs domains*, Nagoya Math. J. **221** (2016), 184–206.

[21] I. Piatetskii-Shapiro, *On a problem proposed by E. Cartan*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **124** (1959), 272–273.

[22] I. Piatetskii-Shapiro, "Automorphic functions and the geometry of classical domains," Gordon and Breach, New York, 1969.

[23] H. Rossi and M. Vergne, *Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group*, J. Funct. Anal. **13** (1973), 324–389.

[24] L.Tunçel, and S. Xu, *On homogeneous convex cones, the Carathéodory number, and the duality mapping*, Math. Oper. Res. 26 (2001), 234–247.

[25] A. Seo, *Biholomorphisms between Hartogs domains over homogeneous Siegel domains*, Internat. J. Math. **29** (2018), 1850057, 12 pp.

[26] A. Wang, W. Yin, L. Zhang, and G. Roos, *The Kähler-Einstein metric for some Hartogs domains over symmetric domains.* Sci. China Ser. A **49** (2006), 1175–1210.

[27] A. Yamamori. *The Bergman kernel of the Fock-Bargmann-Hartogs domain and the polylogarithm function*, Complex Var. Elliptic Equ. **58** (2013), 783–793.

[28] W. Yin, *The Bergman kernels on Cartan-Hartogs domains*, Chinese Sci. Bull. **44** (1999), 1947–1951.

[29] M. Zedda, *Berezin-Engliš' quantization of Cartan-Hartogs domains*, J. Geom. Phys. **100** (2016), 62–67.