

複素力学系の問題

石井 豊

九州大学数理学研究院

YUTAKA ISHII

KYUSHU UNIVERSITY

1. はじめに

私も若い頃は、独自の視点を強調した癖の強いサーベイを読むと、何とバランスを欠いていて客観性が無いのだろう、と強い違和感を感じていました。しかし最近では、そのような癖の強さが逆に味わい深く感じられて、独自の視点から数学を語る人がむしろ羨ましく思います。要は歳を取ったということです。

さて、本研究集会のオーガナイザーの高山さんからは「複素力学系の問題」というお題を頂きましたが、この分野全般にわたる解説をするのは私の手に余るので、そのごく一部ですが今まで研究を重ねてきて多少は土地勘がある複素ヘノン写像について(独自の視点からのつもりで)講演しました。複素ヘノン写像とは、

$$f = f_{c,b} : (x, y) \mapsto (x^2 + c - by, x)$$

で与えられる \mathbb{C}^2 の多項式自己同型のことです。ここで $(c, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ はこの力学系のパラメータを表します。以下では $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ を複素ヘノン写像族のパラメータ空間と呼ぶことにしましょう。

まず、なぜこの様に特殊な形をした2次元の複素力学系が興味深いのでしょうか？その第一の理由としては、1次元の複素力学系理論はすでに著しく進展してしまったため、(私にとっては)難しい問題しか残っていないからです。くわしくは穴倉先生に訊いてみて下さい。そして第二の理由は、2次元以上の複素力学系でパラメータ空間を考察できるほぼ唯一のクラスが、現状では複素ヘノン写像のみであるという点です。ただし後者については私の知る限り一つの例外が最近あって、Blanc-Cantat [BC] はすべての射影曲面とそのすべての双有理変換の力学系次数全体がなす集合について、たいへん興味深い考察をしました。この仕事については後述します。

故 野村隆昭先生に本講演を捧げます。京大の学部学生時代に野村先生のルベグ積分論の講義を聴講し、そのクリスタル・クリアな解説に大変感銘を受けました。その後、縁あって九州大学数理学研究院で約15年のあいだ同僚としてご一緒させて頂きました。もしお元気だったならこの研究集会にも講演者あるいは聴衆として参加なさっていたらと思うと、大変残念でなりません。野村先生のご冥福を心よりお祈りします。

以下では、2次元複素力学系における新たな問題を見つける指針となる理論として、現在までに多くの深い結果が得られている

- (1) 1次元力学系 $/\mathbb{R}$
- (2) 1次元力学系 $/\mathbb{C}$
- (3) 2次元力学系 $/\mathbb{R}$

の3つに着目します。そして

	$/\mathbb{R}$	$/\mathbb{C}$
1次元	Aさんの結果	Bさんの結果
2次元	Cさんの結果	?

のように対応する結果が得られていたとき、

- (a) $A \rightarrow C$ の拡張の仕方をじっと見て、 $B \rightarrow ?$ はどうあるべきかと考える
- (b) $B \rightarrow A$ の応用の仕方をじっと見て、 $? \rightarrow C$ はどうあるべきかと考える

のどちらかのプロセスを経て、?に入るべき適切な問題を設定することにしましょう。もちろん、全ての場合にこの様にしていい問題が見つかるというわけではないですが、

2. 複素相空間

この章ではまず、複素1次元力学系の2次多項式族

$$p_c : z \mapsto z^2 + c \quad (c \in \mathbb{C})$$

に対する Douady–Hubbard 理論を紹介します。なぜこの理論を紹介するかというと、これが複素力学系の相空間とパラメータ空間のあいだの対応を実現するためのお手本になるからです。

理論の創始者の一人である Adrien Douady の哲学として、

“Plow in the dynamical plane and then harvest in the parameter space.”

というフレーズが知られています。そこでまずは相空間を十分に耕すために不変集合を定義します。2次多項式写像 $p_c(z) = z^2 + c$ に対して、その充填ジュリア集合を

$$K_c \equiv \{z \in \mathbb{C} : \{p_c^n(z)\}_{n \geq 0} \text{ は } \mathbb{C} \text{ で有界}\}$$

で、また p_c のジュリア集合を

$$J_c \equiv \partial K_c$$

で、それぞれ定めます。これらの集合はパラメータ c の取り方によって様々に変化し、ほとんどの c に対してはフラクタル的な微細構造と自己相似性（つまり部分と全体が相似であるという性質）を持った集合になります。

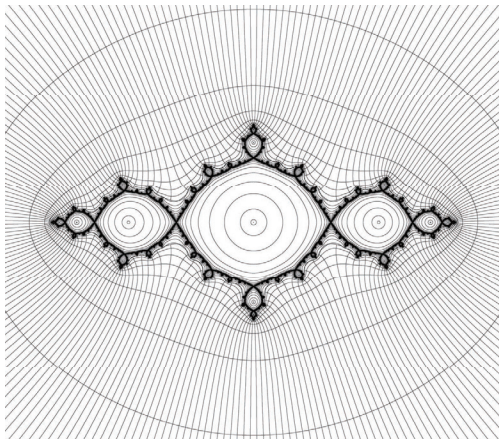


FIGURE 1. External rays (from Wikimedia Commons).

次に K_c の補集合に「力学系と整合した極座標」を導入します. そこでまず, 固定した $c \in \mathbb{C}$ に対しては $|z| \gg 1$ が十分大きいとき $p_c(z) = z^2 + c$ はほぼ $p_0(z) = z^2$ のように振舞うことに注意しましょう. 実際, $p_c(\infty) = \infty$ とおいて p_c をリーマン球面に拡張したとき, ∞ の近傍からそれ自身への解析的な写像 ϕ_c で $\phi_c(p_c(z)) = p_0(\phi_c(z))$ を満たすものが存在します. 更に J_c が連結な場合は, この写像を拡張することで次の定理が得られます.

Theorem 2.1 (Douady–Hubbard [DH1, DH2]). J_c が連結ならば, ϕ_c は等角同型

$$\phi_c : \mathbb{C} \setminus K_c \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

で $\phi_c(p_c(z)) = p_0(\phi_c(z))$ を満たすものに拡張する. しかも $\phi_c(z)/z \rightarrow 1$ ($z \rightarrow \infty$) なる条件のもとで, このような ϕ_c は一意的.

Remark 2.2. 実際には, J_c が不連結な場合も ϕ_c は p_c の臨界値 c の近傍までは拡張できることが知られている.

以下では, 曲線 $\{\phi_c^{-1}(re^{2\pi i\theta}) : r > 1\}$ を角度 $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の external ray と呼びます (Figure 1 参照).

p_c が拡大的であるとは, J_c のある近傍で定義された計量と定数 $C > 0$ と $\lambda > 1$ が存在して, 全ての $z \in J_c$ と $v \in T_z\mathbb{C}$ に対して $\|Dp_c^n(v)\| \geq C\lambda^n\|v\|$ が全ての $n > 0$ で成り立つことと定義します. このとき,

Theorem 2.3 (Douady–Hubbard [DH1, DH2]). J_c が連結かつ p_c が拡大的ならば, 全ての $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して external ray の極限 $\psi_c(\theta) \equiv \lim_{r \rightarrow 1} \phi_c^{-1}(re^{2\pi i\theta})$ が J_c 内に存在する.

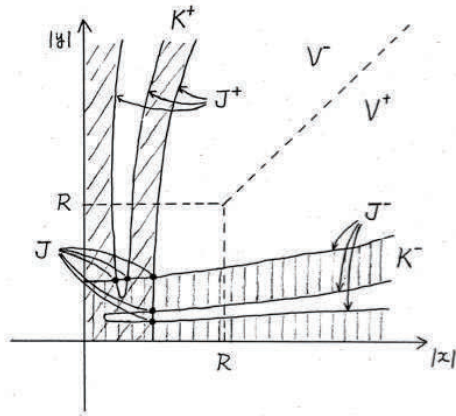


FIGURE 2. Filtrations.

いま, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して $\theta_1 \sim_c \theta_2 \Leftrightarrow \psi_c(\theta_1) = \psi_c(\theta_2)$ と定めましょう. また, $\delta(\theta) \equiv 2\theta$ を円周 \mathbb{R}/\mathbb{Z} 上の 2 倍角写像とします. すると,

Corollary 2.4 (Douady–Hubbard [DH1, DH2]). J_c が連結かつ p_c が拡大的ならば, 写像 $\psi_c : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J_c$ は $\psi_c(\delta(\theta)) = p_c(\psi_c(\theta))$ を満たす全射になる. 特に誘導された同相写像 $\psi_c/\sim_c : (\mathbb{R}/\mathbb{Z})/\sim_c \rightarrow J_c$ は $p_c : J_c \rightarrow J_c$ と商力学系 $\delta/\sim_c : (\mathbb{R}/\mathbb{Z})/\sim_c \rightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Z})/\sim_c$ との間の位相共役を与える.

この \mathbb{R}/\mathbb{Z} 内の同値関係 \sim_c については, 例えば Thurston によるラミネーションの理論 [T1] などをはじめとして, 数多くの興味深い研究があります. その動機の一つは, パラメータ空間における c の位置が \sim_c に反映されているからです.

では複素ヘノン写像 $f = f_{c,b}$ に話を移しましょう. まず, $b \neq 0$ のとき f は逆写像を持つことに注意します. このとき

$$K^\pm \equiv \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \{f^{\pm n}(x, y)\}_{n \geq 0} \text{ は } \mathbb{C}^2 \text{ で有界}\}$$

と定め, K^+ (resp. K^-) を f の前方充填ジュリア集合 (resp. 後方充填ジュリア集合) と呼びます. 続いて

$$J^\pm \equiv \partial K^\pm$$

と書いて J^+ (resp. J^-) を f の前方ジュリア集合 (resp. 後方ジュリア集合) と呼びます. 最後に

$$J_f \equiv J^+ \cap J^-$$

と定めて, これを f の ジュリア集合 と呼びます (Figure 2 参照).

次に K^+ の補集合で「力学系と整合した極座標」を導入したいのですが、結論から言うところでは $\mathbb{C}^2 \setminus K^+$ では定義できず、 $J^- \setminus K^+$ で考えることが鍵となります。また Douady–Hubbard の定理では $p_c : \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus K_c$ のモデルとして $p_0 : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ を考えたわけですが、この空間は射影極限

$$\Sigma_{\mathbb{C}} \equiv \varprojlim(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, p_0)$$

と其上への p_0 の持ち上げ

$$\hat{p}_0 : \Sigma_{\mathbb{C}} \longrightarrow \Sigma_{\mathbb{C}}$$

に取って替わられます。ちなみに、 $\Sigma_{\mathbb{C}}$ は Riemann surface lamination の構造 (つまり \mathbb{C} の開集合とカントール集合の直積を張り合わせて得られる) を持ちます。

f が双曲的であるとは、 J_f のある近傍で定義された計量、 J_f 上の接束の連続な分解 $T\mathbb{C}^2 = E^s \oplus E^u$ 、定数 $C > 0$ と $0 < \lambda < 1$ が存在して、

- (i) $Df(E_z^s) = E_{f(z)}^s$ and $Df(E_z^u) = E_{f(z)}^u$ for all $z \in J_f$,
- (ii) $\|Df^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|$ for all $v \in E_z^s$ and $n > 0$,
- (iii) $\|Df^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|$ for all $v \in E_z^u$ and $n > 0$,

が成立することと定めます。このときに、Douady–Hubbard 理論のアナロジーとして Bedford–Smillie は次のような結果を得ました。

Theorem 2.5 (Bedford–Smillie [BS_C5, BS_C6, BS_C7]). J_f が連結かつ f が双曲的ならば、同相写像 $\Phi_f : J^- \setminus K^+ \rightarrow \Sigma_{\mathbb{C}}$ が存在して $\Phi_f(f(x, y)) = \hat{p}_0(\Phi_f(x, y))$ をみたす。しかも Φ_f^{-1} は $\Sigma_{\mathbb{C}}$ の leaf 方向 (この方向には複素構造が定まる) には正則。

さらにジュリア集合の位相的なモデルを与えるために、次の射影極限

$$\Sigma_0 \equiv \varprojlim(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \delta)$$

と其上への δ の持ち上げ

$$\hat{\delta} : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_0$$

を考えます。すると

Theorem 2.6 (Bedford–Smillie [BS_C7]). J_f が連結かつ f が双曲的なら、連続な全射 $\Psi_f : \Sigma_0 \rightarrow J_f$ が存在して、すべての $\hat{\theta} \in \Sigma_0$ に対して $\Psi_f(\hat{\delta}(\hat{\theta})) = f(\Psi_f(\hat{\theta}))$ をみたす。

さらに $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \in \Sigma_0$ に対して $\hat{\theta}_1 \sim_f \hat{\theta}_2 \Leftrightarrow \Psi_f(\hat{\theta}_1) = \Psi_f(\hat{\theta}_2)$ と定めます。

Corollary 2.7 (Bedford–Smillie [BS_C7]). 誘導された同相写像 $\Psi_f / \sim_f : \Sigma_0 / \sim_f \rightarrow J_f$ は $f : J_f \rightarrow J_f$ と商力学系 $\hat{\delta} / \sim_f : \Sigma_0 / \sim_f \rightarrow \Sigma_0 / \sim_f$ との間の位相共役を与える。

2次多項式 p_c に対しては、パラメータ空間における c の位置が同値関係 \sim_c に反映されていました。そこで

問題** : Σ_0 内の同値関係 \sim_f の一般論を展開せよ. さらにこの同値関係と f のパラメータとの対応を見つけよ.¹

実はこのように複素ヘノン写像を組み合わせ論的あるいは位相的な観点から調べる研究は, 1999 年の論文 [BS_C7] 以降あまり進展がありませんでした. その理由の一つとして双曲的な複素ヘノン写像の例が貧弱だからという点が挙げられると思います. 初めて双曲的な複素ヘノン写像の例が構成されたのは, 次の定理でした.

Theorem 2.8 (Fornæss–Sibony [FS], Hubbard–ObersteVorth [HO], Ishii–Smillie [IS]). 拡大的な p_c に対して b が十分 0 に近ければ $f = f_{c,b}$ も双曲的. しかもこのとき $f : J_f \rightarrow J_f$ は $\hat{p}_c : \varprojlim(J_c, p_c) \rightarrow \varprojlim(J_c, p_c)$ と位相共役.

この定理はグッド・ニュースであると同時にバッド・ニュースでもあります. なぜなら, 上の定理の複素ヘノン写像は, その力学系が本質的に 1 次元的にしかならないからです. このように, その力学系が本質的に 1 次元的であるような複素ヘノン写像のクラスを次のように定義しましょう.

Definition 2.9. 複素ヘノン写像 f に対して拡大的な p_c が存在して $f : J_f \rightarrow J_f$ が $\hat{p}_c : \varprojlim(J_c, p_c) \rightarrow \varprojlim(J_c, p_c)$ と位相共役となるとき, f は *planar* であるという. 高次の場合も同様に定義可能.

力学系が本質的に 2 次元的, つまり non-planar な双曲的複素ヘノン写像の存在は, 長年にわたって予想されていましたが, 以下の定理で初めて厳密に示されました.

Theorem 2.10 (Ishii [I1]). 3 次の複素ヘノン写像 $f : (x, y) \mapsto (-x^3 - 1.35 - 0.2y, x)$ は双曲的かつ non-planar.

この定理のジュリア集合は連結ではありません. 特に Theorem 2.6 や Corollary 2.7 は, 残念ながらこの 3 次の複素ヘノン写像には適用出来ないことになります. そこで, 次のような問題を考えることは自然です.

問題** : 双曲的かつ non-planar な (可能であれば 2 次の) 複素ヘノン写像であって, 連結なジュリア集合を持つものを見つけよ. さらに可能ならば, 一つではなく多くの例を作れ.

さらに進んで,

問題* : 上で構成した具体例に対して Hubbard tree [I2] を計算し, \sim_f を決定せよ.

¹1995 年に葉山での E. Bedford 氏の講演で初めて論文 [BS_C5, BS_C6, BS_C7] の内容を知りました. D 論でこのような方向性を目指していたので, 大変ショックを受けました. 当時, 私の指導教官だった穴倉先生からの最初のサジェスションは, まだプレプリントが出ていなかった [BS_C5, BS_C6, BS_C7] の証明を全て自力で復元することでした. そして上の問題が解けたら博士号をあげます, と言われました (未だに解けていませんが別の研究で博士号だけは頂きました).

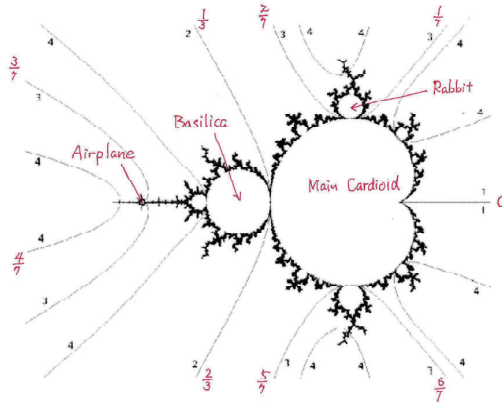


FIGURE 3. Mandelbrot set ([M2] に加筆).

3. 複素パラメータ空間

続いて複素パラメータ空間に話題を移し、そこで収穫を得ることを目指しましょう。まずは複素 1 変数の場合について考えます。

$$\mathcal{M}^0 \equiv \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ は連結}\}$$

を 2 次多項式族 p_c のマンデルブロー集合といいます (Figure 3 参照)。

$p_c(z) = z^2 + c$ のジュリア集合が連結でない場合、 ϕ_c は $\mathbb{C} \setminus K_c$ までは拡張できませんが p_c の臨界値 c までは拡張できることが知られていました。つまり $c \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}^0$ に対して $\phi_c(c)$ が定まります。このとき、次の事実が相空間とパラメータ空間の橋渡しの役割を果たします。

Theorem 3.1 (Douady–Hubbard [DH]). 次の「魔法の公式」

$$\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}^0 \ni c \mapsto \phi_c(c) \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

は等角同型を与える。

特に、相空間の場合と同様に、この写像によって \mathcal{M}^0 の補集合にも external rays が定義できます (再び Figure 3 参照)。さらに重要な帰結として次が得られます。

Corollary 3.2 (Douady–Hubbard [DH], Sibony). \mathcal{M}^0 は連結。

Douady–Hubbard [DH1, DH2] はさらに一步踏み込んで、MLC (Mandelbrot set Locally Conected) と呼ばれる次の有名な予想を提出しました。

Conjecture 3.3 (MLC). マンデルブロー集合 \mathcal{M}^0 は局所連結。

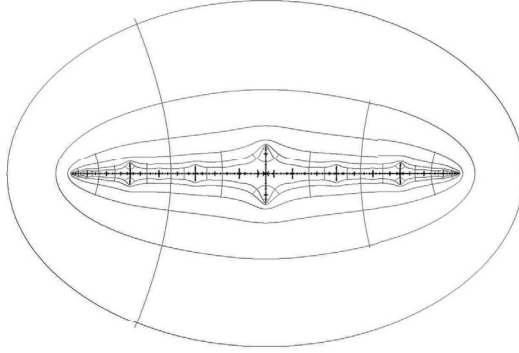


FIGURE 4. Yoccoz puzzle [M2].

この予想の重要性は次の定理からわかります.

Theorem 3.4 (Douady–Hubbard [DH1, DH2]). もしマンデルブロー集合 \mathcal{M}^0 が局所連結なら, p_c が拡大的になるようなパラメータ c の全体は \mathbb{C} で稠密.

講義録のルールに反しますが, MLC の難易度は別格だと思うので星4つとします.

問題**** : MLC を証明あるいは反証せよ.

上の予想に対して, Yoccoz は次を証明しました (彼のフィールズ賞受賞理由の一つ).

Theorem 3.5 (Yoccoz [Y]). 境界 $\partial\mathcal{M}^0$ の “多くの点” で \mathcal{M}^0 は局所連結.

この証明は Yoccoz パズルと呼ばれる独創的な手法を用います. 例えば Figure 4 で, グリーン関数の等ポテンシャル曲線とその内部にある external rays $R_{1/3}$ と $R_{2/3}$ を合わせた集合を S とし, $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=0}^n p_c^{-k}(S)$ の各連結成分を レベル n のパズル・ピース と呼びます. これらパズル・ピース間の p_c による遷移を組み合わせ論的に解析することで Yoccoz は相空間のジュリア集合の局所連結性を証明し, 続いて「魔法の公式」を使ってその情報をパラメータ空間に移植しました [H, M2, Y]. この定理の他にも, Lyubich [L], Shishikura [S1], Tan Lei [TL] を始め多くの論文において「魔法の公式」は相空間とパラメータ空間の橋渡しとしての重要な役割を果たしてきています.

一方, 複素ヘノン写像 $f_{c,b}$ ではどうでしょうか? $f_{c,b}$ のジュリア集合を $J_{c,b}$ としたとき, 複素ヘノン写像族 $f_{c,b}$ のマンデルブロー集合は

$$\mathcal{M}^\times \equiv \{(c, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times : J_{c,b} \text{ は連結}\}$$

で与えられます. しかし1次元のマンデルブロー集合 \mathcal{M}^0 とは対照的に, \mathcal{M}^\times については次のように予想されています.

Conjecture 3.6. \mathcal{M}^\times は連結でない.

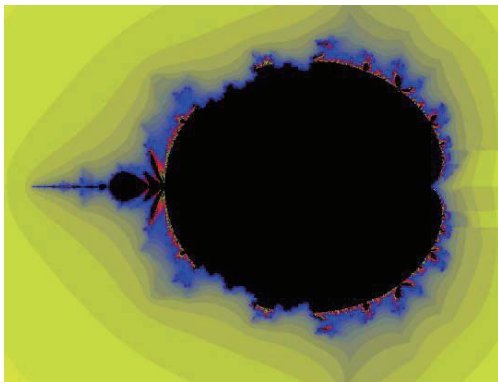


FIGURE 5. Slice of \mathcal{M}^\times by $\{b = 0.15\}$ [DC].

実際、幾つかの複素直線による \mathcal{M}^\times のスライスの絵が描かれていて、それによると \mathcal{M}^\times は連結でないように見えます [DC, K] (Figure 5 と 6 を参照). しかし $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ の部分集合として連結かどうかは長年の未解決問題です. そこで

問題** : この予想を証明あるいは反証せよ.

さて、もし \mathcal{M}^\times が連結でないとすると、「魔法の公式」の代わりになる手法を探し出す必要があります. そこでまず、次のような複素ヘノン写像のクラスを考えます.

Definition 3.7. 複素ヘノン写像 $f_{c,b}$ が ホース・シュー であるとは、 $f_{c,b} : J_{c,b} \rightarrow J_{c,b}$ がシフト写像 $\sigma : \{A, B\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{A, B\}^{\mathbb{Z}}$ と位相共役であること.

そして複素ヘノン写像族 $f_{c,b}$ のパラメータ空間における ホース・シュー領域を

$$\mathcal{H}^\times \equiv \{(c, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times : f_{c,b} \text{ は双曲的なホース・シュー}\}$$

と定めます. 2次多項式族 p_c に対しても、 $p_c : J_c \rightarrow J_c$ がシフト写像 $\sigma : \{A, B\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{A, B\}^{\mathbb{N}}$ と位相共役になるときに p_c をホース・シューと呼び、同様にしてパラメータ空間内のホース・シュー領域 \mathcal{H}^0 が定まります.

Remark 3.8. 2次多項式族 p_c に対しては二分法 $\mathbb{C} = \mathcal{M}^0 \sqcup \mathcal{H}^0$ が成り立つが、複素ヘノン写像族 $f_{c,b}$ に対しては連結でもホース・シューでもないようなジュリア集合が存在するので、そのパラメータ空間 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ は $\mathcal{M}^\times \sqcup \mathcal{H}^\times$ と一致しない.

問題*** : \mathcal{H}^\times は連結か?

実は \mathcal{H}^\times が連結になると予想する理論的・数値的根拠は知られていないのですが、以下では \mathcal{H}^\times は連結であると仮定して (或いは \mathcal{H}^\times の連結成分を一つ固定して) 話を進めましょう.

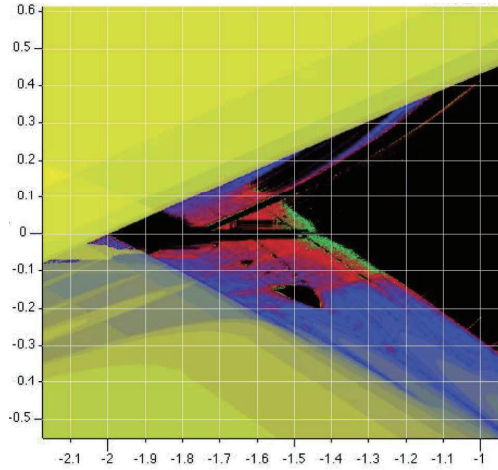


FIGURE 6. Slice of \mathcal{M}^\times by the real plane [DC].

いま, 一点 $(c_0, b_0) \in \mathcal{H}^\times$ を固定します. (c_0, b_0) を基点とする \mathcal{H}^\times 内のループ γ に沿ってパラメータ (c, b) を動かすと, 対応するジュリア集合 $J_{c,b}$ も連続的に変化してゆきます. すると, $\gamma(0) = \gamma(1) = (c_0, b_0)$ なので γ は J_{c_0, b_0} の各点の入れ替えを定め, それは $\{A, B\}^\mathbb{Z}$ からそれ自身への同相写像であってシフト写像 σ と可換になるものを誘導します. 以上のようにして得られる準同型写像

$$\rho : \pi_1(\mathcal{H}^\times, (c_0, b_0)) \longrightarrow \text{Aut}(\{A, B\}^\mathbb{Z}, \sigma)$$

を \mathcal{H}^\times の モノドロミー表現 といいます.

Theorem 3.9 (Bedford–Smillie [BS $_{\mathbb{C}\mathbb{R}}$], Arai [A]). ρ は非自明な写像になり, 特に \mathcal{H}^\times は単連結でない. さらに像 $\rho(\pi_1(\mathcal{H}^\times, (c_0, b_0)))$ は無限位数の元を含む.

そこで次のような問題が考えられます.

問題** : ρ の像 $\rho(\pi_1(\mathcal{H}^\times, (c_0, b_0)))$ を特徴付けよ.

Remark 3.10. 1変数多項式の場合は, 対応する準同型写像は全射であることが任意の次数で知られている [BDK].

以下では, このモノドロミー表現を詳しく見ることで複素ヘノン写像族の \mathcal{H}^\times に「力学系と整合した座標」を導入することを試みます. そのために, ニーディング列と呼ばれる $\{A, B\}$ 上の有限ワード $k(H)$ を $\text{Int}(\mathcal{M}^0)$ の各連結成分 H に対応させます [M1]. 例えば Main Cardioid では $k(H) = A$, Basilica では $k(H) = BA$, Rabbit では $k(H) = BBA$, Airplane では $k(H) = BAA$ となります (再び Figure 3 を参照).

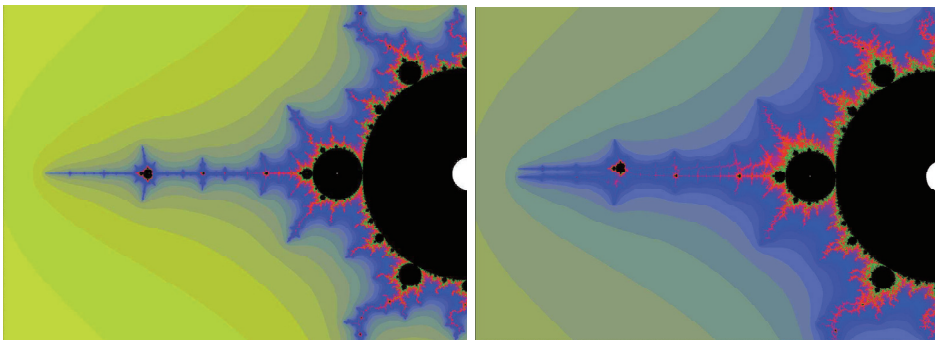


FIGURE 7. $b = 0$ and $b = 0.005i$ [Li].

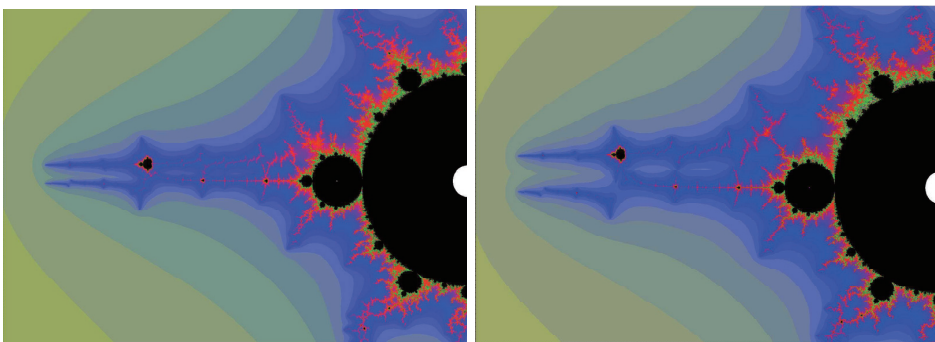


FIGURE 8. $b = 0.01i$ and $b = 0.02i$ [Li].

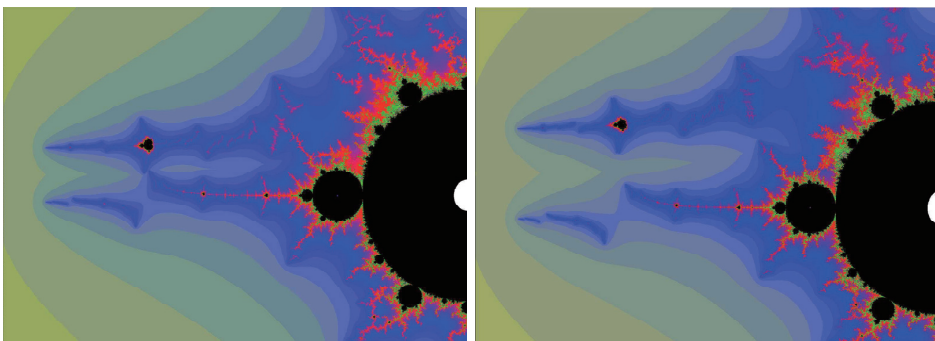
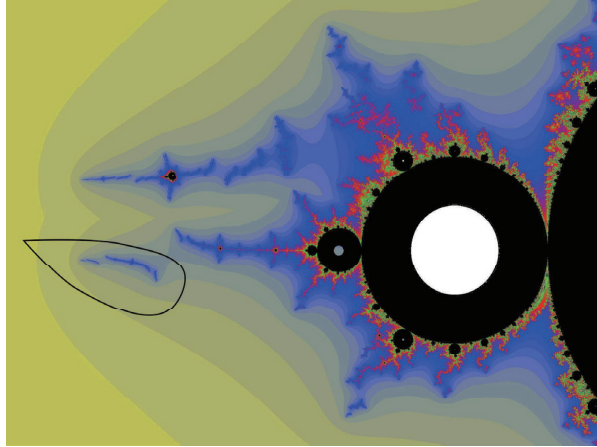
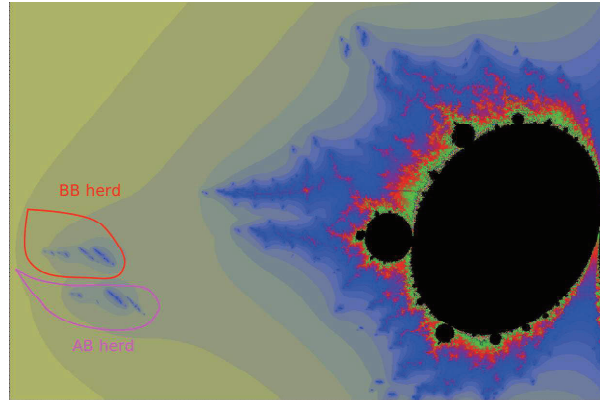


FIGURE 9. $b = 0.03i$ and $b = 0.05i$ [Li].

FIGURE 10. B -herd for H_{Air} [Li].FIGURE 11. BB -herd and AB -herd for H_{Air} [Li].

以下では Lipa による数値的観察 [Li] について説明します。彼は、 $|b|$ を大きくしたとき $b = 0$ でのマンデルブロー集合 \mathcal{M}^0 が c -平面で次々に不完全な2つのコピーに分離する現象を、第5段階まで数値的に確認しました (Figure 7, 8, 9 参照)。このとき、 \mathcal{M}^0 が第1段階で分離した部分をそれぞれ A -herd と B -herd と呼びます (Figure 10 参照)。次に、 A -herd が第2段階で分離した部分をそれぞれ AA -herd と BA -herd と呼んで、また B -herd が第2段階で分離した部分をそれぞれ AB -herd と BB -herd とそれぞれ呼びます (Figure 11 を参照)。ただし、どちらの部分も A と名付けてどちらの部分も B と名付けるのか、論文 [Li] では定義が ad hoc ではっきりしません。

続いて, ρ のターゲットの空間 $\text{Aut}(\{A, B\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ についての用語を準備しましょう. まず $\{A, B, *\}$ 上の有限ワード \underline{w} であって $*$ をちょうど一つ含むものに対して,

$$\tau_{\underline{w}} : \{A, B\}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \{A, B\}^{\mathbb{Z}}$$

を次のように定めます. $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \{A, B\}^{\mathbb{Z}}$ をとったとき, \underline{w} 内の $*$ を除いて $\varepsilon_k \cdots \varepsilon_{k+|\underline{w}|-1} = \underline{w}$ となる $k \in \mathbb{Z}$ が存在したら $*$ に対応する記号 ε_i を反対のものに入れ替え, このような操作を可能な全ての $k \in \mathbb{Z}$ に対して施して得られた無限列を $\tau_{\underline{w}}(\underline{\varepsilon}) \in \{A, B\}^{\mathbb{Z}}$ であらわすこととします.

Definition 3.11. $W \equiv \{\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^m\}$ を $\{A, B, *\}$ 上の有限ワードの集合でそれぞれは $*$ をちょうど一つ含むとする. また $\tau_{\underline{w}^1}, \dots, \tau_{\underline{w}^m}$ は互いに写像の合成について可換であるとする. このとき,

$$\tau_W \equiv \tau_{\underline{w}^m} \circ \cdots \circ \tau_{\underline{w}^1} : \{A, B\}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \{A, B\}^{\mathbb{Z}}$$

を W から定まる *compound marker endomorphism* という. もし τ_W が *automorphism* なら, それを *compound marker automorphism* という.

いま, H を $\text{Int}(\mathcal{M}^0)$ の任意の双曲成分とし, H より \mathcal{M}^0 の先端側にある $\text{Int}(\mathcal{M}^0)$ の双曲成分を H_1, \dots, H_m とします. また $\{A, B\}$ 上の有限ワード \underline{v} に対して

$$\underline{w}^i \equiv \underline{v} * k(H_i)$$

とおいて $\text{Aut}(\{A, B\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ の元 $\tau_W \equiv \tau_{\underline{w}^m} \circ \cdots \circ \tau_{\underline{w}^1}$ を定めます. このとき Lipa [Li] は数多くの数値実験に基づいて次を予想しました.

Conjecture 3.12. もし $\gamma \in \pi_1(\mathcal{H}^\times, (c_0, b_0))$ が H から先の \underline{v} -herd を一周するようなループであれば, $\tau_{\underline{w}^1}, \dots, \tau_{\underline{w}^m}$ はすべて互いに可換な *compound marker automorphism* になり, さらに τ_W は $\rho(\gamma)$ に一致する.

つまりこの予想は, ρ の詳細な情報から \mathcal{H}^\times に「力学系と整合した座標」を与えられることを主張しています. そこで,

問題*** : herd の概念に厳密な定義を与え, Lipa の予想を証明せよ.

この問題は, 基本的な道具が未だに整備されていない上, herd などの概念の定義を一から厳密に与えていかなければならないため, かなりの難問であると思われます. しかしその一方で, 相空間では複素ヘノン写像に対する Hubbard tree の構成 [I2] や iterated monodromy group の理論 [I3] が不完全ながら存在します. そこでこのような基本群の作用を通して複素ヘノン写像族の相空間とパラメータ空間を結びつけることが「魔法の公式」の代わりとして期待されます. なお, 上述した herd の概念のさらに詳細な説明, ニーディング列の定義, Lipa の予想の正確な主張やその逆の主張, などの解説については [I4] を参照して下さい.

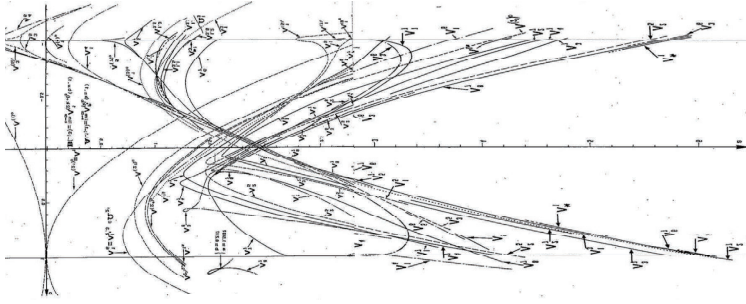


FIGURE 12. Bifurcation curves in the real parameter space [EM].

4. 実力学系への複素力学系の応用

この章では、複素力学系を実力学系に応用することを考えます。そこでまず、先ほど定義した \mathcal{H}^{\times} の実力学系におけるアナロジーとして 実ホースシュー領域

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \equiv \{(c, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : f_{c,b}|_{\mathbb{R}^2} \text{ は双曲的なホースシュー}\}$$

を定義します。このパラメータ領域は、今から 40 年ほど前に初めて数値的に観察されました [EM]. Figure 12 にある横 V 字型の右側の大きな白い領域が $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ を表していると考えられます。 \mathbb{C}^2 の複素ヘノン写像の解析を \mathbb{R}^2 の実ヘノン写像の力学系へと応用することで、我々は以下の結果を得ました。

Theorem 4.1 (Arai-Ishii [AI]). $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ は連結かつ単連結な開集合。また $\partial\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ は区分的に実解析的な曲線をなす。

ちなみに Bedford–Smillie [BS_ℝ1, BS_ℝ2] は対応する結果を $|b| < 0.06$ の場合に示しており、その手法を踏襲して全ての $b \in \mathbb{R}$ に拡張したものが上の定理です。その証明の重要なステップとして、次の事実があります (Figure 13 を参照)。

Theorem 4.2 (Arai-Ishii [AI]). $\partial\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ のある複素近傍に属する (c, b) に対して、複素ヘノン写像 $f_{c,b}$ が *crossed mapping* 条件を満たすような多重円盤の族が存在する。

ここでは *crossed mapping* 条件の定義は述べませんが、上の定理から多重円盤内での複素安定・不安定多様体の挙動をコントロールできることが従います。これと平面トポロジーの議論を組み合わせることで $\partial\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ で起こる分岐のタイプが特定でき、Weierstrass の予備定理を適用することで対応する複素分岐を起こすパラメータ集合が複素部分多様体をなすことが証明できます。そこで同様の手法を用いることで、

問題* : Theorem 4.1 を 3 次の複素ヘノン写像族に拡張せよ。

ただし、3 次の複素ヘノン写像族は 3 つのパラメータを持つため $\{|b| < \varepsilon\} \cap \partial\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ は有界集合にならないので、その部分は工夫が必要になるでしょう。

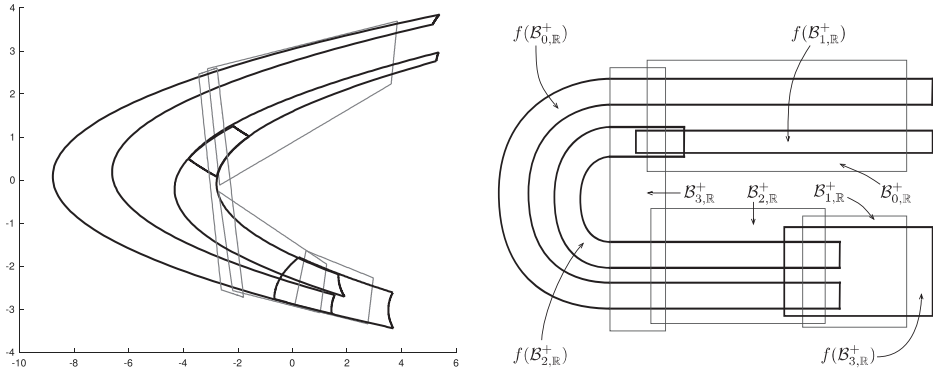


FIGURE 13. Family of polydisks (left) and its cartoon picture (right) [AI].

今回は Theorem 4.2 で述べた多重円盤の族を実ホース・シュー領域の境界の解析に使いましたが, $\partial\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ の近くの複素パラメータ領域を調べる道具としても有益な可能性があります. そこで,

問題** : 上の多重円盤の族を用いて, 複素パラメータ領域での分岐を解析せよ.

他の可能性としては, 次に述べるようにストレンジ・アトラクタの上で定義された不変測度の研究への応用が考えられます. それを説明するために, まずは1次元での対応する結果を述べましょう. いま $c \in [-2, 0)$ に対して $\gamma \equiv \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2} > 0$ とおくと, p_c の区間 $[-\gamma, \gamma]$ への制限

$$p_c : [-\gamma, \gamma] \ni x \mapsto x^2 + c \in [-\gamma, \gamma]$$

は実1次元の区間力学系を定めます. このとき,

Theorem 4.3 (Jakobson [J]). p_c の実パラメータ空間内に測度が正の集合 $E \subset [-2, 0)$ が存在して, $c \in E$ ならば $p_c : [-\gamma, \gamma] \rightarrow [-\gamma, \gamma]$ は Lebesgue 測度に関して絶対連続な不変確率測度を持つ.

この定理のオリジナルな証明はたいへんテクニカルで難解なものでした. しかし Lyubich [L] や Shishikura [S2] らは, 複素力学系を用いることでコンセプチュアルな別証明を与えました. 特に Shishikura の証明は, Yoccoz パズルのコンビナトリクスや様々な複素解析的評価や「魔法の公式」を駆使する大変興味深いものであり, しかもパラメータ集合の測度の評価も飛躍的に向上しました.

それでは実ヘノン写像の場合はどうでしょうか? 上述の Jakobson の定理に対応する結果として, 次の定理が知られています.

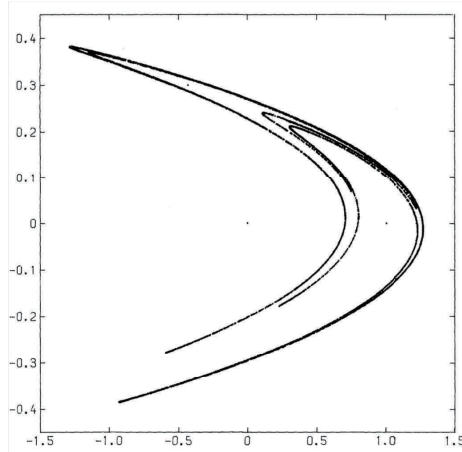


FIGURE 14. Strange attractor [Hé].

Theorem 4.4 (Benedicks–Carleson [BeCa]). 任意の十分 0 に近い $b \neq 0$ に対し測度が正の集合 $E(b) \subset \mathbb{R}$ が存在して, $c \in E(b)$ ならば $f_{c,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は不動点 p の不安定多様体 $W^u(p)$ 上の Lebesgue 測度に関して絶対連続な不変確率測度を持つ.

コンパクト集合 $\overline{W^u(p)}$ はそれまで知られていなかった新しいタイプのアトラクタで, しばしばストレンジ・アトラクタと呼ばれます [Hé] (Figure 14 参照).

上で述べた結果たちを表にまとめると, 次のようになります.

	\mathbb{R} -method	\mathbb{C} -method
1-dim	Jakobson	Shishikura
2-dim	Benedicks–Carleson	?

しかも Benedicks–Carleson の定理は Jakobson の定理より更に (複雑に入り組んだ長い帰納法を用いる) テクニカルで長大な証明に基づいており, Shishikura のようにコンセプチュアルな別証明を与えることは大きな貢献となるでしょう. そこで,

問題***: 論文 [AI] で構成した多重円盤の族を複素ヘノン写像のレベル 0 の Yoccoz パズルとみなして, Benedicks–Carleson の定理の複素力学系的な別証明を与えよ.

ただしこの問題はとてもハードだと思われるので, より手の届きやすそうな問題として次を挙げておきます.

問題*: 論文 [AI] で構成した多重円盤の族を用いることで, 十分小さい $|b|$ に対して証明された Bedford–Smillie の結果 (例えば [BS_R3] の内容など) をすべての $b \in \mathbb{R}^{\times}$ に拡張せよ.

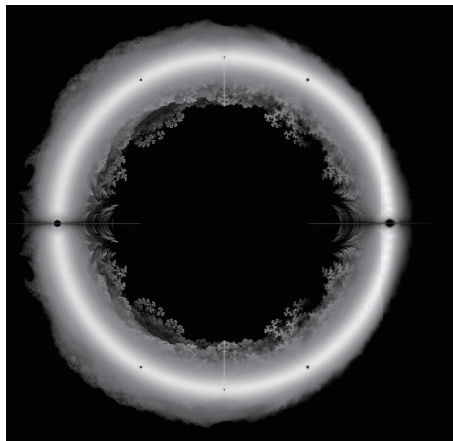


FIGURE 15. Values of entropy and their Galois conjugates [T2].

5. 今回は詳しく触れない話題

最後にこの章では、ここまでの話の流れとはやや趣を異にするが複素ヘノン写像と関連した複素2次元力学系の興味深い話題、そしてバーチャル・リアリティを用いた4次元空間の可視化などについて、それぞれ簡単に触れたいと思います。

5.1. **Blanc–Cantat** の仕事. 本稿の第1章で、高次元複素力学系においてパラメータ空間が考察できるほぼ唯一の対象が複素ヘノン写像であり、その例外が Blanc–Cantat の論文 [BC] であると述べました. そこでここでは彼らの論文に注目します.

射影曲面 X とその双有理変換 $f : X \rightarrow X$ に対して、力学系次数を

$$\lambda(f) \equiv (f_* : \text{NS}(X) \rightarrow \text{NS}(X)) \text{ のスペクトル半径}$$

で定めましょう. ある仮定のもとでは、 $\log \lambda(f)$ は力学系理論でよく知られた位相共役不変量である f の位相的エントロピーに一致することが知られています. ここで全ての射影曲面とその全ての双有理変換の力学系次数がなす集合

$$\Lambda \equiv \{ \lambda(f) : X \text{ は射影曲面, } f : X \rightarrow X \text{ は双有理変換} \} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$$

を考えましょう. これは射影曲面上の双有理変換に対するモジュライ空間と思えます ($\mathbb{R}_{\geq 0}$ の部分集合なのでずいぶん退化してしまっていますが). このとき、

Theorem 5.1 (Blanc–Cantat [BC]). Λ は *well-ordered*, つまり Λ の任意の空でない部分集合は最小元を持つ.

その他にも彼らは、 Λ のギャップについて、またその Salem 数や Pisot 数との関連について、などいくつかの興味深い結果を得ています.

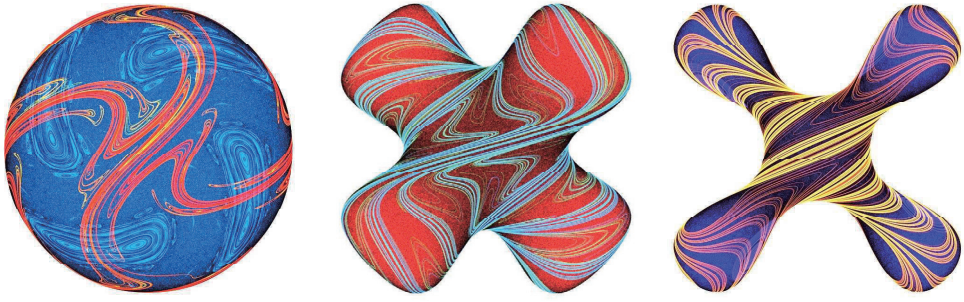


FIGURE 16. Orbits on real $K3$ surfaces of $(2, 2, 2)$ -type [Mc].

一方、3次元多様体の分類の研究で有名な W. Thurston は生前最後の論文 [T2] で、区間上のすべての区分線型写像の位相的エントロピーとそのガロア共役をプロットし、それがマンデルブロー集合のような豊かなフラクタル構造を持つことを見出しました (Figure 15 参照). これらの結果の対応を例のごとく表の形でまとめると、次のようになります.

	\mathbb{R} -valued	\mathbb{C} -valued
1-dim	位相的エントロピー	Thurston
2-dim	Blanc-Cantat	?

以上から、次の問題を考えるのは興味深いと思われます.

問題** : 上の ? に当たる部分の理論を構築せよ.

5.2. $K3$ 曲面上の力学系. $K3$ 曲面 X の正則自己同型 $f: X \rightarrow X$ が与えられたとき, X 上の至るところ退化しない正則 2 次形式 Ω から定まる体積要素 $\Omega \wedge \bar{\Omega}$ は f で不変になります. 特に X や f が \mathbb{R} 上定義されていると, X の実部 $X_{\mathbb{R}}$ への f の制限 $f_{\mathbb{R}}: X_{\mathbb{R}} \rightarrow X_{\mathbb{R}}$ は自然な面積を保存する力学系になります. 散逸的力学系は反復合成の回数が高いつき, ある意味で低次元の退化した力学系で近似出来ます. しかし面積保存系はこの様な利点を持たないため, 最も解析の難しいクラスであると言えるでしょう. 実際, Kolmogorov–Arnold–Moser 不変円の存在などのような面積保存系に特有の現象がいくつか知られています.

Figure 16 の絵は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 内の $(2, 2, 2)$ -曲面の実部を描いたものです [Mc]. ここで $(2, 2, 2)$ -曲面 X とは, x, y, z のそれぞれについて 2 次の多項式の零点集合を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 内で閉包をとったもので, もし特異点を持たなければ $K3$ 曲面になることが知られています. このとき X から xy -平面, yz -平面, zx -平面への射影はそれぞれ 2 対 1 の分岐被覆となるので, そのファイバー上の 2 点を入れ替えることで X 上の

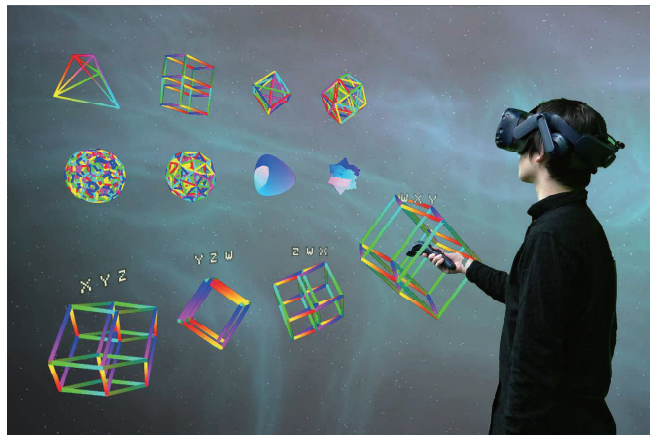


FIGURE 17. Polyvision [MOI+].

3つの対合 $\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y$ がそれぞれ定まります. そしてこれらの合成

$$f = \sigma_x \circ \sigma_y \circ \sigma_z : X \rightarrow X$$

が X 上の正則自己同型を定義します. Figure 16 の3枚の絵は X の定義方程式を少しずつ変えたもので, 曲面上で色分けされた集合は1点の軌道や安定・不安定多様体を表していると思われます.

このような $K3$ 曲面上の力学系については前出の S. Cantat が世界的な第一人者であり, 彼の ICM 招待講演のプロシーディング [C] には面積保存力学系と代数幾何が絡んだ多くの興味深い問題が提出されているので, 是非そちらをご覧ください.

5.3. VR を用いた4次元可視化. 複素ヘノン写像族のジュリア集合やマンデルブロー集合は, 実4次元空間内のフラクタル的なオブジェクトです. このような対象を長年研究していると, これらをもっと直接的に見てみたい, もっと直感的に理解できる形で可視化したい, という欲求に駆られるようになりました. そこで最近では, 下記のように4次元空間可視化のためのプロジェクトをいくつか進めています.

第一の試みとして, 何人かの数学者(京都大学の稲生さんや九州大学の鍛冶さん)とバーチャル・リアリティ (VR) が専門の東大情報理工学の廣瀬通孝先生のグループとの共同で, Polyvision [MOI+] という VR を用いた4次元可視化のためのデバイスを開発しました (Figure 17 参照). これは $xyzw$ -空間にある4次元対象物を, xyz -空間, yzw -空間, xzw -空間, xyw -空間, の4通りの3次元空間に射影してそれを VR 空間に表示し, これらのうちの1つを選択して VR 空間内で回転すると, その運動がもとの4次元対象物に持ち上がって残りの3つの射影像にも反映される, という仕組みです. 言わば, 3次元での設計支援ソフトである CAD の4次元版です.

そして第二の試みは、両眼視差と運動視差という2つの視差を用いたデモ [II] です。人間は現実世界での奥行き知覚を得るために、様々な手がかりや視差を用いています。今回はそれらの中でも両眼視差 (左眼から得られる映像情報と右眼から得られる映像情報のズレを奥行きとして知覚する仕組み) と運動視差 (観察者が動いたときに観察者から近い対象物は大きく動き遠い対象物は小さく動くことを奥行きとして知覚する仕組み) に着目しました。もし2つの視差による奥行き方向が4次元空間内で独立になるように出来れば、これらと「タテ」と「ヨコ」を合わせると4つの独立な方向が(少なくとも原理的には)表現できることとなります。実際、VR技術を用いることでこれら2つの視差による奥行き方向が独立になるようなアルゴリズムが設計可能で、それを稲生さんにVR空間で実装して頂きました。

ただ上記いずれの研究も現在進行形で様々な課題があり、これら以外のアプローチも色々と考えられるでしょう。そこで、(複素力学系の諸問題という本来のお題からは随分と外れてしまいましたが) 次の問題を以って本稿の結びにしたいと思います。

問題** : 4次元空間を直感的に知覚できるVRデバイスを開発せよ。

謝辞。このような貴重な講演の機会を与えて下さった研究会のオーガナイザーの方々、特に東大数理の高山さんに感謝致します。

REFERENCES

- [A] Z. Arai, *On loops in the hyperbolic locus of the complex Hénon map and their monodromies*. *Physica D* **334** (2016), 133–140.
- [AI] Z. Arai, Y. Ishii, *On parameter loci of the Hénon family*. *Commun. Math. Phys.* **361** (2018), no. 2, 343–414.
- [BS_C5] E. Bedford, J. Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . V. Critical points and Lyapunov exponents*. *J. Geom. Anal.* **8** (1998), no. 3, 349–383.
- [BS_C6] E. Bedford, J. Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . VI. Connectivity of J* . *Ann. of Math.* **148** (1998), no. 2, 695–735.
- [BS_C7] E. Bedford, J. Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . VII. Hyperbolicity and external rays*. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **32** (1999), no. 4, 455–497.
- [BS_{C_R}] E. Bedford, J. Smillie, *The Hénon family: the complex horseshoe locus and real parameter space*. *Complex dynamics*, 21–36, *Contemp. Math.*, 396, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [BS_R1] E. Bedford, J. Smillie, *Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy: Tangencies*. *Ann. of Math.* **160** (2004), no. 1, 1–26.
- [BS_R2] E. Bedford, J. Smillie, *Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy. II. Small Jacobian*. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **26** (2006), no. 5, 1259–1283.
- [BS_R3] E. Bedford, J. Smillie, *A symbolic characterization of the horseshoe locus in the Hénon family*. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **37** (2017), no. 5, 1389–1412.

- [BeCa] M. Benedicks, L. Carleson, *The dynamics of the Hénon map*. Ann. of Math. **133** (1991), no. 1, 73–169.
- [BC] J. Blanc, S. Cantat, *Dynamical degrees of birational transformations of projective surfaces*. J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), no. 2, 415–471.
- [BDK] P. Blanchard, R. L. Devaney, L. Keen, *The dynamics of complex polynomials and automorphisms of the shift*. Invent. Math. **104** (1991), no. 3, 545–580.
- [C] S. Cantat, *Automorphisms and dynamics: A list of open problems*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures, 619–634, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018.
- [DC] Dynamics at Cornell, webpage, <https://pi.math.cornell.edu/~dynamics/>
- [DH] A. Douady, J. Hubbard, *Itérations des polynômes quadratiques complexes*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **294** (1982), no. 3, 123–126.
- [DH1] A. Douady, J. Hubbard, *Étude dynamique des polynômes complexes. Partie I*. Publications Mathématiques d’Orsay, 84-2. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1984. 75 pp.
- [DH2] A. Douady, J. Hubbard, *Étude dynamique des polynômes complexes. Partie II*. Avec la collaboration de P. Lavaurs, Tan Lei & P. Sentenac. Publications Mathématiques d’Orsay, 85-4. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985. v+154 pp.
- [EM] H. El Hamouly, C. Mira, *Lien entre les propriétés d’un endomorphisme de dimension un et celles d’un difféomorphisme de dimension deux*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **293** (1981), no. 10, 525–528.
- [FS] J. E. Fornæss, N. Sibony, *Complex Hénon mappings in \mathbb{C}^2 and Fatou–Bieberbach domains*. Duke Math. J. **65** (1992), no. 2, 345–380.
- [Hé] M. Hénon, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*. Commun. Math. Phys. **50** (1976), no. 1, 69–77.
- [H] J. H. Hubbard, *Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J.-C. Yoccoz*. Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991), 467–511, Publish or Perish, Houston, TX, 1993.
- [HO] J. H. Hubbard, R. W. Oberste-Vorth, *Hénon mappings in the complex domain. II. Projective and inductive limits of polynomials*. Real and complex dynamical systems (Hillerød, 1993), 89–132, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 464, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [II] H. Inou, Y. Ishii, VR demos (2020).
- [I1] Y. Ishii, *Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . I: A non-planar map*. Adv. Math. **218** (2008), no. 2, 417–464.
- [I2] Y. Ishii, *Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . II: Hubbard trees*. Adv. Math. **220** (2009), no. 4, 985–1022. *Corrigendum*. Adv. Math. **226** (2011), no. 4, 3850–3855.
- [I3] Y. Ishii, *Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . III: Iterated monodromy groups*. Adv. Math. **255** (2014), 242–304.
- [I4] Y. Ishii, *Dynamics of polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 : Combinatorial and topological aspects*. Arnold Math. J. **3** (2017), no. 1, 119–173. Special issue dedicated to the XXV anniversary of IMS at Stony Brook.
- [IS] Y. Ishii, J. Smillie, *Homotopy shadowing*. Amer. J. Math. **132** (2010), no. 4, 987–1029.

- [J] M. V. Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*. Commun. Math. Phys. **81** (1981), no. 1, 39–88.
- [K] S. Koch, *SaddleDrop: a tool for studying dynamics in \mathbb{C}^2* . Teichmüller theory and moduli problem, 465–479, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser., 10, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2010.
- [Li] C. Lipa, *Monodromy and Hénon mappings*. Ph.D dissertation, Cornell University (2009).
- [L] M. Lyubich, *Dynamics of quadratic polynomials, III : parapuzzle and SBR measures*. Géométrie complexe et systèmes dynamiques, Colloque en l’honneur d’Adrien Douady, Orsay 1995, Astérisque, tome 261 (2000), 173–200.
- [MOI⁺] K. Matsumoto, N. Ogawa, H. Inou, S. Kaji, Y. Ishii, M. Hirose, *Polyvision: 4D space manipulation through multiple projections*. Emerging Technologies, SIGGRAPH Asia 2019, Brisbane, 36–37.
- [Mc] C. McMullen, webpage, <https://people.math.harvard.edu/~ctm/gallery/index.html>
- [M1] J. Milnor, *Periodic orbits, external rays and the Mandelbrot set: an expository account*. Géométrie complexe et systèmes dynamiques, Colloque en l’honneur d’Adrien Douady, Orsay 1995, Astérisque, tome 261 (2000), 277–333.
- [M2] J. Milnor, *Local connectivity of Julia sets: expository lectures*. The Mandelbrot set, theme and variations, 67–116, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 274, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [S1] M. Shishikura, *Topological, geometric and complex analytic properties of Julia sets*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 886–895, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [S2] M. Shishikura, *Jakobson’s theorem via Yoccoz puzzles*. Manuscript (2017).
- [TL] Tan Lei, *Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets*. Commun. Math. Phys. **134** (1990), no. 3, 587–617.
- [T1] W. P. Thurston, *On the geometry and dynamics of iterated rational maps*. Edited by Dierk Schleicher and Nikita Selinger and with an appendix by Schleicher. Complex dynamics: families and friends, 3–137, A K Peters, Wellesley, MA, 2009.
- [T2] W. P. Thurston, *Entropy in dimension one*. Frontiers in complex dynamics: In celebration of John Milnor’s 80th birthday, 339–384, Princeton Math. Ser., 51, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014.
- [Y] J.-C. Yoccoz, *Sur la connexité locale des ensembles de Julia et du lieu de connexité des polynômes quadratiques*. Unpublished.