ツイスター空間論の問題

本多 宣博 *

東京工業大学理学院 †

1　ツイスター空間と自己双対計量

本節ではツイスター空間と自己双対計量に関する基本事項を簡単に紹介する。詳しくは [1, 12, 37] や [2] の 13 章などを参照していただきたい。

定義 1.1　M を向きづけられた実 4 次元 C^∞ 多様体とする。次の性質を満たす 3 次元複素多様体 Z を M 上の**ツイスター空間**という。

- Z は M 上の C^∞ な $\mathbb{CP}^1$ 束の構造 $\pi : Z \to M$ を持つ。
- π の各ファイバーは Z の複素部分多様体であり、その複素多様体としての法束は $\mathscr{O}(1)^{\oplus 2}$ と同型。π のファイバーは**ツイスター直線**とよばれる。
- 反正則対合 $\sigma : Z \to Z$ であって、固定点を持たず π の各ファイバーを保つものが存在する。σ はツイスター空間 Z の**実構造**とよばれる。 □

注意 1.2

- 4 次元多様体 M には複素構造を考えていないことに注意する。仮に複素構造を与えたとしても、2 番目の条件（法束に関する条件）から、射影 π は決して正則写像にはならない。
- 同じく法束に関する条件から、π のファイバーはツイスター空間 Z 内で複素部分多様体として複素 4 次元分動くことができる。したがって Z 内には非特異有理曲線の 4 次元族が存在する。これらのうち実構造 σ で不変なものはちょうど実 4 次元分あり、それらのパラメータ空間が 4 次元多様体 M である。
- 再び法束に関する条件から、ツイスター空間上には、（非コンパクトであっても）多重なものを含め非自明な正則微分形式は存在しないことがわかる。特に標準束

* Nobuhiro Honda. honda@math.titech.ac.jp

† Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

K_Z をツイスター直線に制限して得られる直線束の次数は (-4) であることがわかる。

- 実構造 σ は各ツイスター直線を保つので $\mathbb{CP}^1$ 上の反正則対合を定める。$\mathbb{CP}^1$ 上の反正則対合は、通常の複素共役写像 $(z \mapsto \overline{z})$ と対蹠点を対応させる写像 $(z \mapsto \overline{z}^{-1})$ の二種類があるが、σ は固定点をもたないという仮定から後者となる。

このような特殊な構造をもつ複素多様体を考えることの背景として、次の基本的な結果がある。

定理 1.3　(Penrose 対応 [1]) M を向きづけられた 4 次元 C^∞ 多様体とすると、M 上のツイスター空間と M 上の自己双対共形構造（下記参照）は一対一に対応する。　□

ここで**自己双対共形構造**とは、4 次元多様体上のリーマン計量の共形類であって、ワイル共形曲率テンソルの反自己双対成分（いわば「半分」）が消えているものである。これは実 4 次元多様体上で考えることのできる標準的な共形構造と言えるものである。複素曲面上のケーラー計量はそのスカラー曲率が 0 のとき、またそのときに限り（反）自己双対的であることが知られている。特に複素曲面上のリッチ平坦ケーラー計量（ハイパーケーラー計量）は（反）自己双対的である。

命題 1.4　[12] Z をツイスター空間とすると、以下が成立する。

- 標準束 K_Z の自然な「半分」、すなわち 2 乗すると K_Z となる正則直線束があり、実構造 σ はこの直線束の実構造にリフトする。
- Z がケーラー計量を持てば反標準束 $-K_Z$ は正の直線束である。　□

反標準束 $-K_Z$ の「半分」（つまり上の命題の「半分」の双対束）はツイスター空間上の**基本直線束** (fundamental line bundle) とよばれる。ツイスター直線上 K_Z は次数 (-4) であったから、基本直線束のツイスター直線上の次数は 2 となる。基本直線束およびそれに付随する線形系（基本系）はツイスター空間を代数幾何的に調べる際に中心的な役割を果たす。以下では基本直線束のことを F で表す。

次の結果はコンパクトツイスター空間に関する基本定理である。

定理 1.5　(Hitchin [12]) コンパクトツイスター空間でケーラー計量を持つものは標準的なツイスター空間 $\mathbb{CP}^3$ と旗多様体 $F_{1,2}$ のみである。　□

特に射影代数的なツイスター空間はこれら 2 つだけである。射影空間 $\mathbb{CP}^3$ は S^4 上の標準計量のツイスター空間であり、旗多様体 $F_{1,2}$ は $\mathbb{CP}^2$ 上の Fubini-Study 計量のツイスター空間である。

コンパクトでない 4 次元多様体上の（反）自己双対計量の代表的な例として、有理二重点の最小特異点解消上のハイパーケーラー計量 (Gibbons-Hawking 計量）があるが、これのツイスター空間はケーラー計量を持たないと思われる。このことは A_1 特異点（つまり通常二重点）の場合は [12] の最後に証明付きで書かれている。そこで次を問うのは比較的自然であると思われる。

問題 1.6 ** 非コンパクトツイスター空間でケーラー計量を持つものはどのくらい存在するか。例えば完備スカラー平坦ケーラー曲面のツイスター空間や（高次元の場合も含めて）完備ハイパーケーラー計量のツイスター空間でケーラー計量をもつものがどのくらい存在するか。 □

2 Moishezon ツイスター空間

コンパクト複素多様体は射影代数多様体と双有理同値となっているとき Moishezon 多様体とよばれる。コンパクトなツイスター空間に対して、ケーラー計量の存在の代わりに Moishezon であることを課すと 4 次元多様体に次のような制約がつく。自然数 n に対して $n\mathbb{CP}^2$ で n 個の複素射影平面の連結和を表す。

定理 2.1 (Campana [3]) 4 次元多様体 M の自己双対構造のツイスター空間が Moishezon であったとすると M は 4 次元球面 S^4 または連結和 $n\mathbb{CP}^2$ と同相である。 □

現在では多くの Moishezon ツイスター空間の例が知られている（後述）。S^4 と $\mathbb{CP}^2$ の上の Moishezon ツイスター空間はすでに述べた $\mathbb{CP}^3$ と旗多様体 $F_{1,2}$ のみである。また定理 1.5 より $n > 1$ のとき $n\mathbb{CP}^2$ 上の Moishezon ツイスター空間は射影代数的でもケーラーでもない。

Z を $n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間とすると、その代数次元 $a(Z)$ は反標準次元 $\kappa(-K_Z)$ に等しい。（これは実構造と Z の単連結性を用いて容易に示せる）。したがって Z が Moishezon であるためには反標準束 $-K_Z$ が big であること、あるいは基本直線束 F が big であることが必要十分である。この意味で Moishezon ツイスター空間は Fano 多様体に近い対象である。（ただし射影平面の個数 n に制限はつかないので Moishezon ツイスター空間の位相同型類に有限性はない。）$n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間 Z のチャーン数について

$$(-K_Z)^3 = 16(4-n) \tag{2.1}$$

が成立する [12]。これらのことから、$n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間は $n < 4$ のとき Moishezon になりやすく、$n > 4$ のとき Moishezon になりにくい。たとえば次が成立する。

命題 2.2 Z を $n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間で、対応する自己双対構造のスカラー曲率は正であるとする。$n<4$ のとき Z は Moishezon である。 □

証明. $K_Z \simeq -2F$ に注意すれば双対性から任意の m に対して $H^2(Z,mF) \simeq H^1(Z,(-2-m)F)^*$ であるが、スカラー曲率が正であることから、Hitchin の消滅定理 [11] より $m \geq 0$ のとき $H^1(Z,(-2-m)F)=0$ となる。また $n<4$ と (2.1) から $F^3=2(4-n)>0$ であることがわかる。以上から基本直線束 F は big であり、したがって Z は Moishezon である。 □

$n \geq 4$ のときは対応する自己双対構造のスカラー曲率が正であっても $n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間は Moishezon とは限らない。

$n \leq 4$ でスカラー曲率が非正の場合、まず LeBrun-Maskit [31, Prop. 1.1] により $n\mathbb{CP}^2$ 上にはスカラー平坦な自己双対構造は入らない。したがってスカラー曲率は負となる。そしてコンパクト多様体上のスカラー曲率が負の自己双対構造のツイスター空間の代数次元は 0 である ([34, (3.3) Corollary] など)。よって $n<4$ のとき $n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間は Moishezon であるか代数次元が 0 であるかのどちらかであり、前者はスカラー曲率が正であることと同値、後者はスカラー曲率が負であることと同値である。そこで以下が問題となる。

問題 2.3 *** $n \leq 4$ のとき $n\mathbb{CP}^2$ 上に $a(Z)=0$ なるツイスター空間 Z は存在するか。あるいは、$n \leq 4$ のとき $n\mathbb{CP}^2$ 上の自己双対構造でスカラー曲率が負のものが存在するか。 □

なお $n=2$ のときこの問題（正確には後者の問題）は [35, p. 125] に明記されている。

以下しばらくの間、$n<4$ のときの Moishezon ツイスター空間の構造を話題にする。$n=2$, すなわち $2\mathbb{CP}^2$ 上の自己双対構造でスカラー曲率が正のものは連結 1 次元のモジュライ空間をなし、その一方の end は 2 つの $\mathbb{CP}^2$(Fubini-Study 計量を入れたもの) への分裂として、もう一方の end は 2 つの Eguchi-Hanson 空間への分裂として理解される [6, §1]。そして、$2\mathbb{CP}^2$ 上のスカラー曲率が正の自己双対構造のツイスター空間はすべて $\mathbb{CP}^5$ 内のやや特殊な形の $(2,2)$ 完全交叉と双有理同値である (Poon [35])。より詳しく、なおこれらの双有理射影モデルはツイスター空間上の基本直線束に付随する完備線形系 $|F|$ による写像の像として得られる。これらの双有理モデルはその定義式に単独の実数パラメータ（上記のモジュライ空間上の座標とみなせる）が入っているが、そのパラメータをモジュライ空間の境界に近づけたときに 2 つの $\mathbb{CP}^2$ のツイスター空間の和に分解したり、2 つの Eguchi-Hanson 空間のツイスター空間の和に分解するわけではなさそうである。そこで次が問題となる。

問題 2.4 * 上記の 2 種類の退化をこれらのツイスター空間の具体的記述を用いて理解せよ。 □

類似の問題は（一応は）別のツイスター空間に対して [19] で調べられている。

次に $n = 3$ の場合に話を移す。$3\mathbb{CP}^2$ のツイスター空間の構造については次の結果が知られている。

定理 2.5 (Poon [36], Kreussler-Kurke [29]) $3\mathbb{CP}^2$ 上のスカラー曲率が正の自己双対共形構造のツイスター空間は次のいずれかの射影代数多様体と双有理同値。

- 非特異 2 次曲面上の（具体的に与えられる）conic 束。
- $\mathbb{CP}^3$ の分岐二重被覆で分岐因子がいくつかの孤立特異点を持つ 4 次曲面となっているもの。以下では二重被覆型とよぶ。(double solid 型ともよばれる。) □

前者を双有理射影モデルに持つツイスター空間は、**LeBrun ツイスター空間**とよばれる、任意の n に対して $n\mathbb{CP}^2$ 上で具体的に構成される Moishezon ツイスター空間の $n = 3$ の場合になっている。後者を双有理射影モデルに持つツイスター空間は分岐 4 次曲面により決まるが、この 4 次曲面が満たす必要条件がかなり具体的に与えられている。たとえば generic なものは通常二重点のみをもちその個数はちょうど 13 点であることが示されている。

なお、定理 2.5 の仮定を満たすツイスター空間はすべて $\dim |F| = 3$ を満たし、完備線形系 $|F|$ が固定点をもつときは $|F|$ による有理写像の像が非特異 2 次曲面となりツイスター空間は 1 つ目のもの（LeBrun ツイスター空間）となる。$|F|$ が固定点を持たないときは $|F|$ による正則写像 $Z \to \mathbb{CP}^3$ が二重被覆写像となり、ツイスター空間は後者のものとなる。

これら 2 種類のツイスター空間のうち、LeBrun ツイスター空間のほうが特殊な対象であり、二重被覆型のツイスター空間の極限として得られることがわかる。これらの結果から、次を問うのは reasonable であると思われる。

問題 2.6 ** $3\mathbb{CP}^2$ 上のスカラー曲率が正の自己双対共形構造のなす空間は連結か。 □

問題 2.7 * $2\mathbb{CP}^2$ の場合をモデルにして、$3\mathbb{CP}^2$ 上のスカラー曲率が正の自己双対構造のなすモジュライ空間の境界の各点に対応する幾何学的対象を理解せよ。 □

LeBrun ツイスター空間に対しては、そのモジュライ空間は自己双対構造の具体的な構成方法から連結空間であることがわかる。そして上記のように LeBrun ツイスター空間と二重被覆型のツイスター空間のうちの一部は変形で移り合う。したがって結局二重被覆型のツイスター空間のモジュライ空間の連結性が問題となる。これに対しては以下の

ような 2 つのアプローチが考えられる。

- 二重被覆型のツイスター空間に対応する自己双対計量を構成し、構成方法からモジュライ空間が連結かどうかを調べる。
- ツイスター空間を利用する。すなわち定理 2.5 に現れる 2 種類の 3 次元射影代数多様体のうち後者のものについて、その中でツイスター空間と双有理になっているものを特定して、それらの射影代数多様体の具体的な記述からモジュライ空間の連結性をみる。

なお、問題 2.6 において、自己双対構造に対して「共形変換群が 1 次元以上」という条件を付け加えた場合、[13] で後者のアプローチによりそのような自己双対構造のモジュライ空間は連結であることが示されている。また前者のアプローチはそれ自身重要であると考えられるので問題としてあげておく。

問題 2.8 *** $3\mathbb{CP}^2$ 上の二重被覆型のツイスター空間（定理 2.5 参照）に対応する自己双対計量を構成せよ。 □

$n < 4$ のときの話はここまでにし、一般の場合に話を移す。前述したように、$n \geq 4$ のとき、$n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間はたとえ対応する自己双対構造のスカラー曲率が正であったとしても一般には Moishezon ではない。実際、$n \geq 4$ のとき、$n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間の Moishezon 性は微小変形によって保たれない [32]。しかしながら、Moishezon 性をもつものはその詳しい構造を調べることができるという点で興味深いものである。次の問題はツイスター空間の代数幾何学的な研究において中心的な問題である。

問題 2.9 *** Moishezon ツイスター空間を分類し、それらの代数幾何的な構造を記述せよ。（定理 2.1 により対応する 4 次元多様体は複素射影平面の連結和 $n\mathbb{CP}^2$ である。） □

現在までに知られている Moishezon ツイスター空間で、連結和の個数 n に制限がつかないという意味で無限系列になっているものを発見順に列挙しておく。

1. LeBrun [30] によるツイスター空間。これは $n \geq 3$ のとき $\dim |F| \geq 3$（実際には $\dim |F| = 3$）という性質で特徴づけられ、すべて正則な $\mathbb{C}^*$ 作用を持つ。
2. Joyce [28] による一連の自己双対構造に対応するツイスター空間（後述）。これらは 2 次元トーラスの作用をもつという性質で特徴づけられる（藤木 [8]）。
3. Campana-Kreussler [4] によるツイスター空間。$n > 4$ のとき、これらは $\dim |F| = 2$ という性質で特徴づけられる。
4. 筆者による一連のツイスター空間 [16, 17, 15]。これらは $\dim |F| = 1$ を満たし、

$\mathbb{C}^*$ 作用を持つ。$\mathbb{C}^*$ 作用による商空間はミニツイスター空間（後述）の構造を持ち、ツイスター空間はその上の conic 束の構造を持つ。第 4 節でのべるようにこの記述は LeBrun ツイスター空間と共通しているので、本稿では LeBrun 型とよぶ。

5. 筆者による別の一連のツイスター空間 [15, 20, 21]。これらも $\dim|F| = 1$ を満たすが、そのほとんどは $\mathbb{C}^*$ 作用を持たない。これらのツイスター空間は直線からの生成射影 $\mathbb{CP}^m \to \mathbb{CP}^{m-2}$ による正規有理曲線の逆像（平面スクロール）の上の二重被覆の構造をもち、その分岐因子は平面スクロールの 4 次超曲面によるカットになっている。$n = 3$ のときは $\mathbb{CP}^3$ の二重被覆で 4 次曲面で分岐するものとなり、定理 2.5 にある二重被覆型になるので、本稿では二重被覆型とよぶことにする。（double solid 型と呼ぶこともある。）

4. や 5. のように基本系 $|F|$ が 1 次元しかない場合はペンシル $|F|$ そのものだけではツイスター空間の構造を調べることは難しく、多重基本系 $|mF|$ が用いられる。

問題 2.9 に関して、すでに述べたように $2\mathbb{CP}^2$ と $3\mathbb{CP}^2$ 上の Moishezon ツイスター空間の構造はよくわかっている。また $4\mathbb{CP}^2$ のときはツイスター空間からの反標準写像によって構造がよく分離できることが示され、それを用いて分類定理が与えられている [18]。したがって問題となるのは $n > 4$ のときである。また、[21] において $\dim|F| > 0$ となる Moishezon ツイスター空間は上で列挙したものに限ることが示されている。したがって次が問題となる。

問題 2.10 ** Moishezon ツイスター空間で基本系 $|F|$ がたかだか 1 つしか元を持たないものが存在するか。 □

これが肯定的であれば、Moishezon ツイスター空間の分類は基本的には済んでいることになるが、肯定的であることを期待させる理由は今のところないように思われる。

次に Joyce [28] によって構成された、$n\mathbb{CP}^2$ 上の一連の自己双対構造に対応するツイスター空間についていくつかの問題を挙げる。Joyce 計量のツイスター空間 Z の幾何的な構造は藤木 [8] により詳しく調べられた。特に、Z のほとんど（= LeBrun ツイスター空間になっていないもの）は $\dim|F| = 1$ を満たし、ペンシル $|F|$ の一般元は非特異トーリック曲面である。また $|F|$ の固定点集合はこれら非特異トーリック曲面のトーラス不変な反標準曲線（したがって非特異有理曲線の「輪」）である。またペンシル $|F|$ の特異元の構造も完全にわかっている。一方で Z の具体的な構成方法を求めることはまた別問題であり、一般には未解決である。

問題 2.11 ** Joyce 計量のツイスター空間の具体的な構成方法を与えよ。 □

$n < 4$ のときは Joyce 計量はすでに述べた LeBrun 計量の特別な場合になっており、

後者のツイスター空間はよくわかっているので一応は問題にならない。また $n=4$ のときは Z からの反標準写像による像を具体的に求めることができ、それに具体的な双有理変換を与えることによりツイスター空間を構成することができる [14]。よって主要な問題は $n>4$ のときの構成である。また問題 2.11 は次の問題と密接に関わっている。

問題 2.12 ** Joyce 計量のツイスター空間に対して多重基本系 $|mF|$ に付随する有理写像が双有理になるような m の最小値を求めよ。またそのような m に対して $|mF|$ の底点集合の（canonical な）解消を与えよ。 □

$|mF|$ の底点集合は上記トーリック曲面上のトーラス不変な反標準曲線（非特異有理曲線の「輪」）の一部であるが、それを解消するためには一般には（もちろん有限回ではあるが）手計算では実行が困難なほど多くのブローアップを繰り返す必要があり、正攻法は得策ではなさそうである。

本節の最後に Moishezon ツイスター空間に関する問題をいくつか挙げる。本節の初めのほうで述べたようにコンパクトツイスター空間が Moishezon であるためには反標準束、あるいは基本直線束 F が big であることが必要十分であるから、Moishezon ツイスター空間に対しては m を十分大きくとれば線形系 $|mF|$ による有理写像の像は 3 次元となる。このような m に対して $|mF|$ が固定成分 D を持っていたとすると、D は実因子となるので、ある $k>0$ が存在して $D\in|kF|$ となる。（これは単連結ツイスター空間上の実因子は F の何倍かと線形同値となることによる。）よって初めから $|mF|$ は固定成分を持たないとしてよい。すると、公式 (2.1) より $n>4$ のとき $F^3<0$ であることから、$|mF|$ の底点集合は空でなく、1 次元の成分をもつ。

問題 2.13 ** Moishezon ツイスター空間に対して多重基本系 $|mF|$ が固定成分を持たないとき、底点集合の既約成分は常に非特異な有理曲線となるか。また底点集合は微分幾何的にはどのような意味を持つか。 □

前者の問いについてはこれまで知られている Moishezon ツイスター空間に対してはすべて成立していると思われる。（孤立した底点をもつ例も知られていないと思われる。）また $n\mathbb{CP}^2$ 上であっても Moishezon でないツイスター空間に対しては $|mF|$ の底点集合はしばしば非特異楕円曲線となる。

問題 2.14 ** 非射影的 Moishezon ツイスター空間上にはいつでもゼロにホモローガスな 1 次元サイクルが存在するか。 □

これも既知の Moishezon ツイスター空間に対しては肯定的であると思われる。

以下の 2 つの問題については、既知のものに対して成立しているかも不明である。

問題 2.15 ** Moishezon ツイスター空間は常に有理的か。 □

問題 2.16 *** n を止めたとき $n\mathbb{CP}^2$ 上の任意の Moishezon ツイスター空間は互いに変形同値か。 □

3　代数次元が 2 のツイスター空間

$a(Z)$ でコンパクトツイスター空間 Z の代数次元を表す。

定理 3.1　(藤木 [9]) コンパクトな 4 次元多様体 M のツイスター空間 Z が $a(Z)=2$ を満たせば、M は $n\mathbb{CP}^2$ と同相であるか、または $(S^3\times S^1)\#n\mathbb{CP}^2$ $(n\geq 0)$ を不分岐有限被覆としてもつ。 □

実際に $a(Z)=2$ なるツイスター空間が知られている M は、$4\mathbb{CP}^2$ と $S^3\times S^1$（の有限群作用による商空間）のみである。また前節の前半で述べたように、$n<4$ のときは $n\mathbb{CP}^2$ 上に $a(Z)=2$ なるツイスター空間は存在しない。したがって以下の 2 つが問題となる。

問題 3.2 ** $n>0$ のとき $(S^3\times S^1)\#n\mathbb{CP}^2$ 上に $a(Z)=2$ なるツイスター空間が存在するか。 □

問題 3.3 ** $n>4$ のとき $n\mathbb{CP}^2$ 上に $a(Z)=2$ なるツイスター空間が存在するか。 □

後者の問題に関して、$n>4$ のとき $n\mathbb{CP}^2$ 上に $a(Z)=2$ なるツイスター空間が存在したとすると、基本系 $|F|$ はたかだか 1 つしか元を持たないことが知られている [24]。この問題が肯定的であれば、$n>4$ のとき $n\mathbb{CP}^2$ 上のツイスター空間はすべての代数次元をとることになる。なお $n=4$ のときは $a(Z)=1,2,3$ の各場合に対して例が知られているが、$a(Z)=0$ なる例は知られていない。2 節の前半で述べたように、このようなツイスター空間が存在したとすると、対応する自己双対構造のスカラー曲率は負である。

$n=4$ のときだけは例外的に $a(Z)=2$ なるツイスター空間が比較的構成しやすく、[5, 23] などで例が与えられている。$n=4$ のときだけ状況が異なるのは、$K_Z^3=0$ となるのが $n=4$ のときに限る（これは (2.1) による）ことによる。

問題 3.4 * $4\mathbb{CP}^2$ 上の $a(Z)=2$ なるツイスター空間を分類せよ。 □

問題 3.5 * $4\mathbb{CP}^2$ 上の $a(Z)=2$ なるツイスター空間に含まれる曲面を分類せよ。特に、常に非代数的な曲面が含まれるか。 □

[23] では Hopf 曲面を非正規 subvariety として含む例が与えられている。

問題 3.6 ** $a(Z) = 2$ なるツイスター空間 Z に対して代数的簡約写像の構造（底空間の構造、判別式集合の構造、特異ファイバーの構造、不確定点の有無など）を記述せよ。□

4　自己双対計量に関する問題

本節では自己双対共形構造そのものを話題にする。自己双対構造の非自明な例を具体的に構成することは容易ではないが、1 次元群作用をもつ自己双対構造を持つ 4 次元多様体に対しては、その商空間として得られる 3 次元多様体上には Einstein-Weyl 構造と呼ばれる幾何構造が入り、さらにはその上の U(1) モノポール方程式の解も定まることが知られている [27]。さらにこの構成には逆対応があり、3 次元 Einstein-Weyl 空間とその上の U(1) モノポール方程式の解から 1 次元群作用をもつ自己双対構造が構成できる。2 節で述べた LeBrun によるツイスター空間に対応する自己双対構造は、この一般的な方法の一例として、3 次元 Einstein-Weyl 空間として双曲空間 H^3 をとり U(1) モノポール方程式の解として H^3 上のラプラス方程式の基本解をとることにより得られる。次の問題はこれを一般化せよというものである。

問題 4.1 ** 3 次元 Einstein-Weyl 空間の新しい例を与え、その上の U(1)-モノポール方程式を解き、それを用いて 1 次元の群作用をもつ自己双対計量の新たな族を構成せよ。□

この問題はツイスター空間とミニツイスター空間に関する問題に翻訳することができ、そちらはある程度解決されている [17]。すなわち第 2 節で LeBrun 型と呼んだ一連のツイスター空間とその構成に用いられるミニツイスター空間がツイスター理論における対応物である。したがって、問題 4.1 はよい例の存在が保証されている問題である。またこの問題は解けたときの影響が大きいと思われる。

問題 4.1 と同様の方向性ではあるが、まったく異なる方法が必要となると考えられる問題として次の 2 つがある。

問題 4.2 *** $n\mathbb{CP}^2$ 上の二重被覆型のツイスター空間（2 節参照）に対応する自己双対共形構造を記述せよ。($n = 3$ のときは問題 2.8 になる。）□

問題 4.3 ** Campana-Kreussler [4] によるツイスター空間に対応する自己双対構造を具体的に記述せよ。□

後者の問題に関してもう少し具体的な方向性を述べる。第 2 節で述べたように、Campana-Kreussler によるツイスター空間 Z は $\dim |F| = 2$ を満たす。完備線形系 $|F|$

が定める有理写像 $Z \to \mathbb{CP}^2$ は全射であり、単独の非特異有理曲線を不確定点集合に持つ。Z をこの有理曲線でブローアップすると不確定性が解消され、$\mathbb{CP}^2$ 上の conic 束が得られる。（一部の有理曲線がつぶされ conic 束は通常二重点を持つ。）Z はツイスター空間であるから、その上にはツイスター直線の 4 次元族が乗っている。ただしここでいうツイスター直線は、実構造で不変なものには限っていない。これらの有理曲線を $\mathbb{CP}^2$ に射影したときの像は conic であることがわかる。したがって複素ツイスター直線の像として $\mathbb{CP}^2$ 上の conic の 4 次元族が得られることになる。

問題 4.4 ** (LeBrun による) Campana-Kreussler によるツイスター空間について、実とは限らないツイスター直線の像となっている conic たちがなす $|\mathscr{O}_{\mathbb{CP}^2}(2)| = \mathbb{CP}^5$ 内の超曲面を特定せよ。 □

これは問題 4.3 を考える上で有力な手がかりを与える問題であると思われる。

5 ミニツイスター空間に関する話題

ツイスター空間は法束が $\mathscr{O}(1)^{\oplus 2}$ である非特異有理曲線をもつ 3 次元複素多様体であったのに対し、**ミニツイスター空間**は複素曲面であって法束が $\mathscr{O}(2)$ になっている非特異有理曲線をもつものである。後者の非特異有理曲線を**ミニツイスター直線**という。ミニツイスター空間は Penrose 対応（定理 1.3）を自己双対構造以外の対象に広げるという問題意識の下、Hitchin [12] により導入され、3 次元多様体上の Einstein-Weyl 構造と呼ばれる幾何構造と局所的には一対一に対応することが示された。この対応において、Einstein-Weyl 空間はミニツイスター直線のなす空間（法束に関する条件から 3 次元になる）として現れる。たとえば $\mathbb{CP}^3$ 内の 2 次の cone や非特異 2 次曲面は超平面切断をミニツイスター直線とするミニツイスター空間であり、対応する Einstein-Weyl 空間はそれぞれ 3 次元ユークリッド空間と 3 次元双曲空間 H^3（の一種の複素化）である。しかしながら、コンパクトなミニツイスター空間は実質的にはこれら 2 種類しか存在しないことが容易にわかり、理論の発展が期待しにくい状況になっていた。その後、中田文憲氏との共同研究 [26] により、ミニツイスター直線として非特異有理曲線の代わりに通常二重点を（一般には複数）許した有理曲線を考えても、そのような曲線の極大族が 3 次元である限りはそこには Einstein-Weyl 構造が入ること、そしてこの条件を満たす有理曲線をもつコンパクト複素曲面が豊富に存在することが示され、状況が大きく変わった。そこで以下ではミニツイスター空間といえばこれら通常二重点を許したものを指すことにする。極大族が 3 次元であるという条件は、ミニツイスター直線に許す通常二重点の個数を g としたときその自己交点数が $2g+2$ であるという条件で与えられる。$g=0$, すなわ

ち非特異と仮定するともとの意味でのミニツイスター空間とミニツイスター直線となる。

S をこの意味でのコンパクトミニツイスター空間とし、g をミニツイスター直線に許す通常二重点の個数とする。C をミニツイスター直線とすれば、以下が成立する [26]。

- 完備線形系 $|C|$ は $(g+3)$ 次元であり、固定点を持たず、付随する正則写像を
$$\Phi : S \longrightarrow \mathbb{CP}^{g+3}$$
とすると Φ は像 $\Phi(S)$ への双有理射である。
- ミニツイスター直線は像 $\Phi(S)$ にちょうど g 点で接する超平面による切断（の引き戻し）として得られる。

これらより、像 $\Phi(S)$ の一般の超平面切断（すなわち線形系 $|C|$ の一般元）は種数 g の非特異曲線であることがわかる。この理由から g をミニツイスター空間 S の種数とよぶ。また双有理射 Φ が像への正則同型写像となっているとき、つまり Φ が曲線をつぶさないとき、ミニツイスター空間 S は極小 (minimal) とよばれる。このとき S は Φ により射影空間へ埋め込まれている。一般に射影代数曲面 $S \subset \mathbb{CP}_N$ に対して、その超平面切断であって指定した個数の通常二重点をもつもののなす集合（双対射影空間 $\mathbb{CP}_N^*$ の部分集合）の $\mathbb{CP}_N^*$ における閉包は subvariety になり、曲面 S のセベリ多様体とよばれる。特に通常二重点を 1 つだけもつような超平面切断のなす集合の $\mathbb{CP}_N^*$ における閉包はもとの曲面の射影的双対多様体である。上記の結果から、S が種数 g の極小コンパクトミニツイスター空間のとき、S に対応する Einstein-Weyl 空間、すなわちミニツイスター直線のなす集合は 3 次元セベリ多様体のザリスキ開集合になる。

種数 1 の極小コンパクトミニツイスター空間は次のように分類できる。

定理 5.1 [22] コンパクト複素曲面 S（非特異性は仮定しない）が種数 1 の極小なミニツイスター空間であるためには S がセグレ 4 次曲面（下記参照）であることが必要十分である。 □

ここでセグレ曲面とは、4 次の非特異 weak del Pezzo 曲面の反標準モデルのことである。これらはたかだか有理二重点しか持たず、いずれも $\mathbb{CP}^4$ 内の 2 つの 2 次超曲面の完全交叉として得られる。セグレ曲面はそれを定義する 2 つの 2 次式の標準形により 16 種類に分類される。（非特異なものはそのうちの 1 種類である。）そこで次が問題になる。

問題 5.2 ** コンパクトで種数が 2 以上の極小ミニツイスター空間を射影代数曲面として具体的に与えよ。 □

問題 5.3 ** コンパクトミニツイスター空間に対してミニツイスター直線のなす 3 次元セベリ多様体の構造を調べよ。特にその双対射影空間における次数や Einstein-Weyl 空間

の補集合の構造を求めよ。 □

$g = 1$ のときは [22, 25] で調べられている。

問題 5.4 ** ミニツイスター空間に実構造を導入し、対応する Einstein-Weyl 空間の real locus とその微分幾何的な性質を調べよ。 □

6　連結和構成

4 次元コンパクト多様体 M_1, M_2 が自己双対共形構造を持つとき連結和 $M_1 \# M_2$ 上にも自己双対共形構造が入るための十分条件が Floer [7], Donaldson-Friedman [6] により与えられている。連結和 $n\mathbb{CP}^2$ 上に自己双対構造が入ることはこの結果により初めて証明された。M_1, M_2 が孤立商特異点 (orbifold point) をもつ場合にも、お互いの特異点がマッチしていれば、そこで orbifold としての連結和をとって得られる空間には自己双対構造が入ることが期待される。たとえば Eguchi-Hanson 空間は非コンパクト 4 次元ハイパーケーラー多様体であるが、無限遠で ALE になっていることから、 自己双対 orbifold として 1 点コンパクト化することができる。こうして得られるコンパクト 4 次元 orbifold を 2 つ用意して、それらを無限遠点どうしで orbifold 連結和をとると特異点がなくなり、その結果得られる多様体は $2\mathbb{CP}^2$ である。第 2 節で述べたように、$2\mathbb{CP}^2$ 上の自己双対構造はこのようにしても得られる。

この構成（つまり自己双対構造をもった orbifold に対してその連結和に自己双対構造が入るための条件を与えること）は、自己双対共形構造そのものを解析することにより Kovalev-Singer [10] やその後の研究により解決されているようである。これをツイスター空間を用いて、上記の Donaldson-Friedman [6] の方法の一般化として与えることはよく知られた未解決問題である：

問題 6.1 ** 自己双対共形構造の、orbifold に対する連結和構成を、ツイスター空間を用いて与えよ。 □

もっとも易しい場合、つまり orbifold singularity が $\mathbb{C}^2/\{\pm 1\}$ と同一視できる場合は LeBrun-Singer [33] によりなされている。上記 Eguchi-Hanson 空間どうしの無限遠における連結和はこの例になっている。

参考文献

[1] M. Atiyah, N. Hitchin, I. Singer, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **362** (1978) 425–461.

[2] A. Besse, "Einstein manifolds", Springer

[3] F. Campana, *On twistor spaces of the class $\mathscr{C}$*, J. Differential Geom. **33** (1991) 541–549.

[4] F. Campana, B. Kreußler, *A conic bundle description of Moishezon twistor spaces without effective divisor of degree one*, Math. Z. **229** (1998) 137–162.

[5] F. Campana, B. Kreußler, *Existence of twistor spaces of algebraic dimension two over the connected sum of four complex projective planes*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999) 2633–2642.

[6] S. K. Donaldson, R. Friedman, *Connected sums of self-dual manifolds and deformations of singular spaces*, Non-linearlity **2** (1989) 197–239.

[7] A. Floer, *Self-dual conformal structures on $l\mathbb{CP}^2$*, J. Differential Geom. **33** no. 2 (1991) 551-573.

[8] A. Fujiki. *Compact self-dual manifolds with torus actions*, J. Differential Geom. **55** (2000) 229–324.

[9] A. Fujiki. *Topology of compact self-dual manifolds whose twistor space is of positive algebraic dimension*, J. Math. Soc. Japan **54** (2002) 587–608.

[10] A. Kovalev, M. Singer, *Gluing theorems for complete anti-self-dual spaces*, Geom. Funct. Anal. 11 (2001), 1229–1281.

[11] N. Hitchin, *Linear field equations on self-dual spaces*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **370** (1980) 173-191.

[12] N. Hitchin, *Kählerian twistor spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **43** (1981) 133-150.

[13] N. Honda, *Self-dual metrics and twenty-eight bitangents*, J. Diff. Geom. **75** (2007) 175–258.

[14] N. Honda, *On a construction of the twistor spaces of Joyce metrics*, J. Algebraic Geom. **17** (2008) 709-750.

[15] N. Honda, *Double solid twistor spaces: the case of arbitrary signature*, Invent. Math. **174** (2008) 463-504.

[16] N. Honda, *Explicit construction of new Moishezon twistor spaces*, J. Dif-

ferential Geom. **82** (2009), 411-444. math.DG/0701278

[17] N. Honda, *A new series of compact minitwistor spaces and Moishezon twistor spaces over them*, J. reine angew. Math. **642** (2010) 197-235.

[18] N. Honda, *Moishezon twistor spaces on* $4\mathbb{CP}^2$, J. Algebraic Geom. **23** (2014), 471-538.

[19] N. Honda, *Degenerations of LeBrun twistor spaces*, Comm. Math. Phys. **301** (2011) 749–770.

[20] N. Honda, *Double solid twistor spaces II: general case*, J. reine angew. Math. **698** (2015) 181-220.

[21] N. Honda, *Twistors, quartics, and del Pezzo fibrations*, to appear in Mem. Amer. Math. Soc. arXiv:1810.13030.

[22] N. Honda, *Segre quartic surfaces and minitwistor spaces* , arXiv:2009.05242.

[23] N. Honda and M. Itoh, *A Kummer type construction of self-dual metrics on the connected sum of four complex projective planes*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000) 139-160.

[24] N. Honda, B. Kreussler, *Algebraic dimension of twistor spaces whose fundamental system is a pencil*, J. London Math. Soc. 95 (2017) 989-1010.

[25] N. Honda, A. Minagawa, *On the cuspidal locus in the dual varieties of Segre quartic surface*, arXiv:2108.07065.

[26] N. Honda, F. Nakata, *Minitwistor spaces, Severi varieties, and Einstein-Weyl structure*, Ann. Global Anal. Geom. **39** (2011) no.3. 293–323.

[27] P.E. Jones, K.P. Tod, *Minitwistor spaces and Einstein-Weyl geometry*, Class. Quan. Grav. **2** (1985), 565–577.

[28] D. Joyce, *Explicit construction of self-dual 4-manifolds*, Duke Math. J. **77** (1995) 519-552.

[29] B. Kreussler and H. Kurke, *Twistor spaces over the connected sum of 3 projective planes.* Compositio Math. **82**:25–55, 1992.

[30] C. LeBrun, *Explicit self-dual metrics on* $\mathbf{CP}^2\# \cdots \#\mathbf{CP}^2$, J. Differential Geom. **34** (1991) 223–253.

[31] C. LeBrun, B. Maskit, *On Optimal 4-Dimensional Metrics*, J. Geom. Anal. **18** (2008), 537 - 564.

[32] C. LeBrun, Y. Poon, *Twistors, Kähler manifolds, and bimeromorphic geometry II*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 317–325.

[33] C. LeBrun, M. Singer, *A Kummer-type Construction of Self-Dual 4-Manifolds*, Math. Ann. 300 (1994) 165–180.

[34] M. Pontecorvo, *Algebraic dimension of twistor spaces and scalar curvature of anti-self-dual metrics*, Math. Ann. 291 (1991), 113 - 122.

[35] Y. S. Poon, *Compact self-dual manifolds of positive scalar curvature*, J. Differential Geom. **24** (1986) 97–132.

[36] Y. S. Poon, *On the algebraic structure of twistor spaces*, J. Differential Geom. **36** (1992) 451–491.

[37] S. Salamon, "Topics in 4-dimensional Riemannian Geometry" Springer LNM **1022** (1983) 33–124.