CR 幾何、共形幾何の問題

Problems in CR and Conformal Geometries

東京大学・大学院数理科学研究科　　平地 健吾 [*1]
Kengo Hirachi
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1　CR 幾何と共形幾何

「複素幾何学の諸問題」での講演は 11 年ぶり 2 回目なので前回から進歩があったものと新しい問題に限定して説明する．前回提案した問題でここに書かれていないものは現在でも解かれていない可能性が高い．今回は CR 幾何に加えて，共形幾何についても書くので，まずその類似性の説明から始める．二つを並行して研究することの利点は大きい．

リーマン多様体 (M, g) に対して計量の共形変形 $\widehat{g} = e^{2\Upsilon} g$ によって不変な性質を調べるのが共形幾何である．

$$[g] = \{e^{2\Upsilon} g : \Upsilon \in C^\infty(M)\}$$

とおき $(M, [g])$ を共形多様体と呼ぶ．一方，CR 幾何は複素領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+1}$ の境界 $M = \partial\Omega$ 上で定義される．$T^{1,0} = T^{1,0}\mathbb{C}^{n+1} \cap \mathbb{C}TM$ は余ランク 1 の $\mathbb{C}TM$ の部分束であり，可積分性

$$[\Gamma(T^{1,0}), \Gamma(T^{1,0})] \subset \Gamma(T^{1,0})$$

を持つ．Ω が C^∞ 定義関数 ρ を持つと仮定する: $\rho \in C^\infty(\mathbb{C}^{n+1})$, $\Omega = \{\rho > 0\}$ かつ M 上で $d\rho \neq 0$．このとき $T^{1,0}$ 上のレビ形式が

$$L_\rho(Z, W) = -\partial\overline{\partial}\rho(Z, \overline{W}), \qquad Z, W \in T^{1,0}_p,$$

で定義される．定義関数を取り替えると $\widehat{\rho} = e^{2\Upsilon}\rho$ に対して $L_{\widehat{\rho}} = e^{2\Upsilon} L_\rho$ が成り立つので，$T^{1,0}$ 上にはレビ形式の共形類が与えれらていると見ることができる．L_ρ が正定値であるとき CR 多様体 $(M, T^{1,0})$ は強擬凸であるといい，以下ではこれを仮定する．ここでは M が $\mathbb{C}^{n+1}$ に埋め込まれているとして仮定して説明を始めたが $T^{1,0} \subset \mathbb{C}TM$ が余ランク 1 で $T^{1,0} \cap \overline{T^{1,0}} = \{0\}$ と可積分条件を満たせば $\mathrm{Re}\, T^{1,0}$ の接触形式 θ を用いて $-\sqrt{-1}d\theta(Z, \overline{W})$ でレビ形式が定まる．これが抽象的な CR 多様体の定義である．前回からの進歩はないが最も有名な問題だけは再録しておく．

問題*** 抽象的な 5 次元強擬凸 CR 多様体は局所的に $\mathbb{C}^3$ の超局面として埋め込めることを示せ．

7 次元以上では倉西，赤堀, Webster により解決され，3 次元では古くから反例が知られている．M のコンパクト性を仮定すれば 5 次元でも解決済みである．残された非コンパクト 5 次元の場合を解けば確実に有名になれる．

[*1] この研究は JSPS 科研費 20H00116 の補助を受けたものです．

2　モデル・ケース

二つの幾何の類似性をモデルケースでさらに詳しく説明する．

共形幾何のコンパクトなモデルは球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ である．これはユークリッド空間の立体射影によるコンパクト化であり，共形類 $[g]$ は局所的には平坦計量を含む．S^n の共形自己同型群の表示を考る．$G = SO(n+1,1)$ を次のローレンツ２次形式に関する特殊直交群とする．

$$B(\zeta) = -\zeta_0^2 + \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_{n+1}^2, \qquad (\zeta_0, \ldots, \zeta_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

定義により G は $\mathbb{R}^{n+2}$ に線型写像として作用し，光錐 $\mathcal{N} = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\} : B(\zeta) = 0\}$ および双曲面 (の連結成分)$\mathcal{H}_+ = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n+2} : B(\zeta) = -1, \zeta_0 > 0\}$ を保つ．

光錐 $\mathcal{N}$ の射影化は単位球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|^2 = 1\}$ と

$$S^n \ni x \mapsto \mathbb{R}(1,x) \in \mathcal{N}/\mathbb{R}^* \subset \mathbb{P}^{n+1}$$

により同一視できる．また双曲面 $\mathcal{H}_+$ は球 $B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|^2 < 1\}$ と

$$\mathcal{H}_+ \ni (\zeta_0, \zeta') \mapsto \frac{\zeta'}{1+\zeta_0} \in B^{n+1}.$$

により対応する．このとき G の $\mathbb{R}^{n+2}$ への作用はローレンツ計量

$$\widetilde{g} = -d\zeta_0^2 + d\zeta_1^2 + \cdots + d\zeta_{n+1}^2$$

に関する等長写像であるともいえる．$\widetilde{g}$ の $\mathcal{H}_+$ への制限はリーマン計量を与えるが，これは対応 $\mathcal{H}_+ \cong B_{n+1}$ により球のポアンカレ計量

$$g_+ = 4\frac{dx_1^2 + \cdots + dx_{n+1}^2}{(1-|x|^2)^2}$$

と一致する．よって G は (B_{n+1}, g_+) の等長変換としても作用する．

一方 $\widetilde{g}$ の $\mathcal{N}$ への制限は退化対称２形式を与える．$\mathbb{R}^*$ 束 $\pi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}/\mathbb{R}^* \cong S^n$ の断面をとり，$\widetilde{g}$ を S^n に引き戻せば S^n の標準計量 g_0 と共形なリーマン計量が全てえられる．よって $\mathcal{N}$ の上半分は $(S^n, [g_0])$ 上の計量束と見なすことができ，G は S^n の共形変換としても作用していることが分かる．

以上をまとめると $G = SO(n+1,1)$ は次の３つの空間の自己同型として作用してことが分かった：

- ローレンツ空間 $(\mathbb{R}^{n+2}, \widetilde{g})$;
- ポアンカレ球（または双曲空間）(B^{n+1}, g_+);
- 共形球面 $(S^n, [g_0])$.

この３つの構造を曲がった場合に一般化して相互関係を見るのが最近の共形幾何の一つの流れである．特にポアンカレ球とその無限遠境界である共形球面の対応は理論物理で AdS/CFT 対応として応用されたので注目を集めている．

CR 幾何は初めから $\mathbb{C}^{n+1}$ の中に埋め込まれているので説明は簡単である．一般の強擬凸領域に対して Ω の定義関数を ρ とおくと次の二つの計量が定義される：

- **完備ケーラー計量**: 領域 Ω 上の $(1,1)$ 形式

  $$g_+[\rho] = -\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\rho$$

  は境界の近くでの 完備ケーラー計量を与える．

- **ローレンツ・ケーラー計量** 変数を一つ増やして $\rho_\sharp\colon \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を $\rho_\sharp(z_0, z) = |z_0|^2\rho(z)$, $(z_0, z) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1}$ で定義する．この時
$$\widetilde{g}[\rho] = -\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\rho_\sharp$$
は $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1}$ の（$\rho_\sharp = 0$ の近傍上で非退化な）ローレンツ・ケーラー計量を与える．

CR 幾何のモデルケースは単位球面 $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ であり定義関数は $\rho(z) = 1 - |z|^2$，$\Omega = B^{2n+2} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ は単位球である．この場合
$$(g_+[\rho])_{i\overline{j}} = \rho(z)^{-1}\delta_{i\overline{j}} - \rho(z)^{-2}\overline{z}_i z_j$$
は複素双曲計量（またはベルグマン計量）であり
$$\widetilde{g}[\rho] = \sqrt{-1}\big(- d\zeta_0 \wedge d\overline{\zeta}_0 + d\zeta_1 \wedge d\overline{\zeta}_1 + \cdots + d\zeta_{n+1} \wedge d\overline{\zeta}_{n+1}\big)$$
は平坦なローレンツ・ケーラー計量である．ここで ζ は
$$\zeta_0 = z_0, \quad \zeta_j = z_0 z_j, \quad j = 1, \ldots, n+1.$$
で定義される複素射影座標である．

特殊ユニタリ群 $G = SU(n+1, 1)$ は座標 $\zeta \in \mathbb{C}^{n+2}$ に関する線形変換でエルミート・ローレンツ形式
$$-\zeta_0\overline{\zeta}_0 + \zeta_1\overline{\zeta}_1 + \cdots + \zeta_{n+1}\overline{\zeta}_{n+1}$$
と体積形式を保つものとして定義できる．この作用を z 座標で見れば (B^{2n+2}, g_+) の等長変換と $S^{2n+1} = \partial B^{2n+2}$ の CR 同相，すなわち $T^{1,0}$ を保つ微分同相，がえられる．まとめると

- ローレンツ・ケーラー空間 $(\mathbb{C}^{n+2}, \widetilde{g})$;
- ベルグマン球（または複素双曲空間）(B^{2n+2}, g_+);
- CR 球面 $(S^{2n+1}, T^{1,0})$.

という 3 つの空間が同じ自己同型群を持つ．ベルグマン球と CR 球面の対応は古くから知られていたが，ローレンツ・ケーラー計量を追加することで微分幾何学の対象として大きく進歩した．一般の強擬凸 CR 多様体でもこの対応を用いて研究が進められている．

3　完備アインシュタイン計量の存在

まず共形幾何の問題を考える．ここで述べるのはポアンカレ計量の一般化の問題だけである．共形幾何の最近の話題については Alice Chang 先生の Noether lecture [Ch2018] が参考になる．

境界付きのコンパクト多様体 $\overline{X}^{n+1}$, $M = \partial X$, に対して，その C^∞ 定義関数 $\rho\colon \overline{X} \to \mathbb{R}$ で内部 X で $\rho > 0$ となるものをとる．M 上に共形類 $[g]$ が与えられているとき X 上のリーマン計量 g_+ で次の条件を満たすものをポアンカレ・アインシュタイン (PE) 計量とよぶ：

1. $\rho^2 g_+$ は $\overline{X}$ まで C^2 級に拡張され $\rho^2 g_+|_M \in [g]$;
2. g_+ はアインシュタイン方程式 $\mathrm{Ric}(g_+) + n g_+ = 0$ を満たす．

ポアンカレ計量はこの条件を満たしている．ポアンカレ・アインシュタイン計量の存在は共形幾何の重要な未解決問題の一つである．知られている結果をまとめる：

Graham-Lee [GL1991]: $X = B^{n+1}$, $M = S^n$ の場合，$[g_0]$ に十分近い共形類 $[g]$ については PE 計量が存在する．

後に Jack Lee はこの結果を拡張している．

Lee [L2006]: PE 計量を持つ $(M, [g])$ に対しては $[g]$ を少し動かしても PE 計量が存在する（ただし少し追加の仮定が必要）．

$n = 3$ の場合に限れば次の結果がある．

M. Anderson [A2008]: $(S^3, [g])$ が正の山辺不変量をもてば PE 計量が存在する．

境界の近くでの解の存在については最近進展があった：

Gursky-Székelyhidi [GS2020]: 任意の $(M, [g])$ に対して，十分小さな $\epsilon > 0$ を取れば $0 < \rho < \epsilon$ 上において PE 計量が存在する．（$\rho = \epsilon$ での境界条件は課さない．）

これ以前にも ρ に関する形式的冪級数解としての g_+ が Fefferman-Graham[FG2012]（結果は 1984 にはアナウンスされていた) において構成され，$(M, [g])$ が実解析的であれば級数解が収束することも示されていた Kichenassamy [K2004].
一方，非存在についての結果もある．

Gursky-Han [GH2017]: S^{4k-1}, $k \geq 1$, においては B^{4k} 上の PE 計量が存在しないような共形構造 $[g]$ が存在する．

これは Gromov–Lawson による S^{4k-1} 上の正スカラー曲率を持つ計量の構成法を用いた証明でアインシュタイン方程式は登場しない．このような状況なので自然な問いは：

問題*** PE 計量が存在するような共形多様体 $(M, [g])$ を特徴づけよ．

もちろん，PE 計量の存在，非存在の例を増やすところから取り掛かれば難易度は下げることができる．Gursky-Han では考慮されなかったアインシュタイン方程式に起因する（PE 計量の存在への）障害が見つかれば非常に良い結果だと思う．
CR 幾何では $g_+[\rho]$ をアインシュタイン計量として構成できることができる [CY1980]．境界の可積分性を

$$[\Gamma(T^{1,0}), \Gamma(T^{1,0})] \subset \Gamma(T^{1,0} \oplus \overline{T^{1,0}})$$

のように弱めて部分可積分 CR 多様体 $(M, T^{1,0})$ を考えると g_+ に対応する (ケーラーとは限らない) アインシュタイン計量を構成する問題を設定できる．これは漸近的複素双曲 (ACH) アインシュタイン計量と呼ばれる．Graham-Lee と同様に球面 S^{2n+1} の小さな変形の場合は ACH アインシュタイン計量 g_+ が構成可能であることが Biqard [B2000] によって示されている．この結果は，松本 [Ma2020] により，強擬凸領域の境界の CR 構造の部分可積分である小さな変形についても拡張されている．一般の場合は未解決である．

問題*** 部分可積分 CR 多様体 $(M, T^{1,0})$ に対応する ACH アインシュタイン計量 g_+ を構成せよ．

M^3 の場合は可積分条件は自明になり状況が異なる．また内部の実 4 次元多様体 X には 4 次元特有の構造がある; 丸亀 [M2019] による自己双対アインシュタイン計量の興味深い結果がある．問題が易しくなるとは限らないが具体的な計算は楽である．

4　擬アインシュタイン構造，Q と Q′ 曲率

以下は CR 幾何を考える．CR 多様体 M は複素多様体 X の中の強擬凸実超局面として埋め込まれているとする．(M^{2n+1}, $n \geq 2$, かつコンパクトであれば常にこれが成り立つ．) 定義関数 ρ に対して

$$\theta = \frac{\sqrt{-1}}{2}(\partial\rho - \overline{\rho})|_M$$

は接触形式と呼ばれる．$\widehat{\rho} = e^{2\Upsilon}\rho$ であれば $\widehat{\theta} = e^{2\Upsilon}\theta$ が成り立つ．θ に対して $\theta(T) = 1$, $d\theta(\cdot, T) = 0$ を満たすベクトル場 T が決まる．T を θ の Reeb ベクトル場という．X の標準束 $K_X = \wedge^{n+1}(T^{1,0}X)^*$ の M への制限として M の標準束 K_M を定義する．直線束 K_M のエルミート計量 h に対して $\|\zeta\|_h = 1$ を満たす断面をとるとき

$$\theta \wedge (d\theta)^n = k_n \theta \wedge (T \lrcorner \zeta) \wedge (T \lrcorner \overline{\zeta})$$

を満たす接触形式 $\theta = \theta(h)$ がただ一つ存在する．k_n は次元によって決まる定数で今は重要ではない．K_M には h を保つチャーン接続が定義されその曲率 $\Theta_h = i\partial\overline{\partial}\log\widetilde{h}|_M$ は M 上の 2 形式である．右辺では h を適当に K_X の計量 $\widetilde{h}$ に拡張しているが Θ_h はその選び方によらない．この対応を用いて

$$\theta(h)\ \text{は擬アインシュタイン} \iff \Theta_h = 0$$

と定義する．なぜこれがアインシュタイン条件なのかは [L1988, H2014] を見てほしい．Jack Lee [L1988] は擬アインシュタインである θ が存在すれば $c_1(K_M) = 0 \in H^2(M, \mathbb{R})$ であることを示した．これは上の新しい定義では自明である．この逆が問題である．K_M の言葉で述べると

問題** K_M の実係数のチャーン類が消えれば K_M は平坦計量 h を持つことを示せ．

この問題は M が佐々木多様体であれば Lee [L1988] で既に解決済みである．竹内 [T2018] は M が擬アインシュタイン構造を持てば M を X の中で少し動かしても擬アインシュタイン構造を持つことを示した (このような変形は倉西 wiggle と呼ばれていて X の複素構造の変形より制限されている)．これは応用上は非常に有用 [HMM2017] であるが一般的に解決できればスッキリする．

Cheng-Yau によってケーラー・アインシュタイン計量 $g_+[\rho]$ の存在が示されているので同じ定義関数を用いると $K_X \setminus \{0\}$ の $K_M \setminus \{0\}$ の近傍で定義されたリッチ平坦ケーラー・ローレンツ計量 $\widetilde{g}[\rho]$ が定義できる (より正確には K_M の擬凸側で定義されるが反対側にも滑らかに拡張しておく)．$\widetilde{g}$ のラプラシアンを $\widetilde{\Delta}$ と書く．K_M のエルミート計量 h は $K_M \ni \zeta \mapsto \|\zeta\|_h^2 \in \mathbb{R}$ により K_M 上の関数とみなせる．これを K_X に拡張したものを $\widetilde{h}$ とする．このとき

$$Q_h = \widetilde{\Delta}^{n+1}\log\widetilde{h}|_{K_M}$$

を h の Q 曲率という．これは拡張 $\widetilde{h}$ の取り方によらない．Q_h は K_M 上の関数であるが $\|\zeta\|_h = 1$ となる断面をとり，$Q_h(\zeta)$ を考えれば M 上の関数と見ることもできる．h が平坦であれば $Q_h = 0$ となるのは $\widetilde{g}$ がケーラーであることからほぼ明らかである．逆の問題は難しい．

問題** $Q_h = 0$ となるのは h が平坦なときに限るか？

M^3 が擬アンシュタイン構造を持つときにはこれが正しいことが竹内 [T2018] で示されている．この問題は線形微分方程式として書くことができるので易しそうではあるが，簡単に解けない線型方程式は非線形偏微分方程式より難しいと Paul Yang 教授から聞いたことがある．この問題に関しては間違ったプレプリントもあるので注意が必要である．

Q 曲率は共形幾何でも定義され，その積分が共形不変量になるため盛んに研究されてきた．CR 幾何でも

$$\overline{Q} = \int_M Q_h \theta \wedge (d\theta)^n, \quad \theta = \theta(h),$$

は h によらない CR 不変量であることが容易に分かる．ところが常に $\overline{Q}=0$ であることが丸亀 [M2018] によって示された (ストークスの定理を使うだけで，気づけば簡単な証明である)．そこで新しい不変量として考えられたのが Q' 曲率である．平坦な h に対しては平坦な拡張 $\widetilde{h}$ が可能である (少なくとも擬凸側には)．このとき

$$Q'_h=\widetilde{\Delta}^{n+1}(\log\widetilde{h})^2|_{K_M}$$

が定義可能であり，これを Q' 曲率という [H2014].

$$\overline{Q}'=\int_M Q'_h\theta\wedge(d\theta)^n,\quad \theta=\theta(h),$$

が CR 不変量であることも分かる．この不変量は自明ではない [HMM2017].

CR 幾何での Q 曲率はセゲー核の解析の過程で発見されたものであるがそれらの関係にはまだ謎が多い．M が領域 $\Omega\subset X$ の境界であるときにはハーディ空間を $L^2(M,\theta\wedge(d\theta)^n)\cap\mathcal{O}(\Omega)$ (L^2 境界値を持つ正則関数の空間) として定義できる．このヒルベルト空間の正規直交基底 $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ をとるとき

$$S_\theta(z)=\sum_{j=1}^\infty|\varphi_j(z)|^2$$

は Ω で広義一様収束し，Ω 上の C^∞ 関数を定義する．これは基底の選び方によらず (M,θ) のセゲー核と呼ばれる．Fefferman により

$$S_\theta(z)=\varphi(z)\rho(z)^{-n-1}+\psi(z)\log\rho(z),\quad \varphi,\psi\in C^\infty(\overline{\Omega})$$

という展開が知られている．とくに対数項 ψ は定義関数 ρ の選び方によらず決定される．ψ の $\theta=\theta(h)$ への依存性を明示するために ψ_θ または ψ_h と書くことにする．私は積分

$$\overline{\psi}=\int_M\psi_\theta\theta\wedge(d\theta)^n$$

が θ によらない CR 不変量であることを示したが，後に Boutet de Monvel が $\overline{\psi}$ の消滅を証明してしまった．M^3 においては $\psi_h|_M$(境界 M への制限) は Q_h の定数倍であることが知られているので丸亀の結果からも $\overline{\psi}$ の消滅が分かる．Boutet の証明は非可換留数を用いていて難しい．

問題** $\overline{\psi}=0$ の簡単な証明を与えよ．

問題** 5 次元以上の CR 多様体で $\psi_h|_M$ と Q_h の関係式を与えよ．

$\psi_h|_M$ と Q_h(の定数倍) のずれば θ から決まる Tanaka-Webster 接続の曲率とトーションを用いて記述することができる．どちらの積分も消えるという条件からこのずれをある程度決定できるように思う．これは球面の場合でも未解決である（これは星一つの問題）．逆に $\psi_h|_M$ と Q_h の関係式から $\overline{\psi}=0$ を示すことができれば微分幾何的な問題解決で非常に嬉しい．

CR 多様体上の積分で定義される不変量の全体を調べることも面白い問題設定である．θ から決まる Tanaka-Webster 接続の曲率とトーションの微分の多項式で与えらるスカラー関数 $I(\theta)$ を考える．Q 曲率と ψ_h はこの条件を満たす．

問題 I* 任意の $\Upsilon\in C^\infty(M)$ に対して

$$\int_M I(\theta)\theta\wedge(d\theta)^n=\int_M I(\widehat{\theta})\widehat{\theta}\wedge(d\widehat{\theta})^n,\quad \widehat{\theta}=e^{2\Upsilon}\theta,$$

を満たす I_θ を全て構成せよ．ベクトル場の発散で表せる項は積分が 0 になるので無視する．

問題 II** 上の問題で θ を擬アインシュタイン，$\Upsilon \in C^\infty(M)$ の動く範囲を多重調和関数に制限した場合はどうなるか？

M^3 においてはどちらも解決済みである [H2014]．問題 I は $I(\theta)=0$ のみ．問題 II は $I(\theta)$ が Q'_h の定数倍に限る．問題 I の例は $I(\theta)$ が局所 CR 不変量である場合，すなわち積分する前に

$$I(\theta)\theta \wedge (d\theta)^n = I(\widehat{\theta})\widehat{\theta} \wedge (d\widehat{\theta})^n$$

が成り立つような例しか知られていないが 4 次元共形多様体では局所不変量であるワイル曲率のノルムの積分が重要な共形不変量を与える．CR 幾何でも面白いことがあるかも知れない．

一方，問題 II は多くの例が知られている．丸亀 [M2016] では (Ω, g_+) に関する Chern-Gauss-Bonnet 公式を導く過程で境界積分で与えられる CR 不変量を定義している (これは M^3 での Burns-Epstein 不変量の一般化である)．M^5 ではこの不変量と Q' の一次結合で全ての $I(\theta)$ が得られることが示された [M2021b]．より高い次元での例も丸亀 [M2021a] によって与えられている．沢山の不変量が構成されるのは Ω 上にはチャーン類が沢山あるということに起因する．M^3 は複素 2 次元領域 Ω の境界であり Ω 上には c_2, $(c_1)^2$ の二つのチャーン類が存在する．これらから有限の積分を得るには一次結合を作る必要があり，結果として１次元の自由度しか残らない．M^5 では Ω は複素 3 次元であり $c_3, c_2c_1, (c_1)^3$ の 3 つのチャーン類が定義できるが有限の積分を与える一次結合は 2 次元分の自由度しかない．これが一般化できれば M^{2n+1} では $I(\theta)$ の積分で得られる不変量は n 次元あると予想できる．Ω のチャーン類から $I(\theta)$ を作るにはさらに工夫が必要である．

問題 I は部分可積分 CR 多様体で考えれば多くの非自明な例を含むと予想できる．可積分性を外すと Q 曲率の積分は 0 になるとは限らない．

問題** 部分可積分な CR 多様体上での Q 曲率の積分の性質を調べよ．

以前は $\overline{Q}$ が消えるのが可積分 CR 多様体に限ると安直に予想していたが実際はもう少し広いようである．$\overline{Q}=0$ となる部分可積分 CR 多様体の具体例を見ることができれば嬉しい．

講演で述べた擬アインシュタイン構造の標準形を作る問題 (星一つ) は少し考えたら解けてしまったので省略する [H2021]．

文　献

[A2008] M.T. Anderson, Einstein metrics with prescribed conformal infinity on 4-manifolds, Geom. Funct. Anal. 18 (2008), 305–366.

[B2000] O. Biquard, Métriques d’Einstein asymptotiquement symétriques, Astérisque 265 (2000), vi+109.

[Ch2018] S.-Y. Alice Chang, Conformal geometry on four manifolds — Noether lecture, in Proc. ICM2018. vol. I, 119–146, World Sci. Publ.

[CY1980] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman’s equation, Comm. Pure Appl. Math. 3 (1980), 507–544.

[FG2012] C.R. Graham, C.L. Fefferman, The ambient metric, Annals of Math. Studies, 178, Princeton Univ. Press, Princeton, 2012.

[GL1991] C.R. Graham, J.M. Lee, Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball, Adv. Math. 87 (1991), 186–225.

[GH2017] M.J. Gursky and Q. Han, Non-existence of Poincaré-Einstein manifolds with prescribed conformal infinity, Geom. Funct. Anal. 27 (2017), 863–879.

[GS2020] M.J. Gursky, G. Székelyhidi, A Local Existence Result for Poincaré-Einstein metrics, Adv. Math. 361 (2020), 106912–106962.

[H2014] K. Hirachi, Q-prime curvature on CR manifolds, Differential Geom. Appl. 33 (2014), no. suppl., 213–245.

[H2021] K. Hirachi, Normal form for pseudo-Einstein contact forms and intrinsic CR normal coordinates, arXiv:2112.08079.

[HMM2017] K. Hirachi, T. Marugame, and Y. Matsumoto, Variation of total Q-prime curvature on CR manifolds, Adv. Math. 306 (2017), 1333–1376.

[K2004] S. Kichenassamy, On a conjecture of Fefferman and Graham, Adv. Math. 184 (2004), 268–288.

[L1988] J.M. Lee, Pseudo-Einstein structures on CR manifolds, Amer. J. Math. 110 (1988), 157–178.

[L2006] J.M. Lee, Fredholm operators and Einstein metrics on conformally compact manifolds, Mem. Amer. Math. Soc. 183 (2006), no. 864.

[M2016] T. Marugame, Renormalized Chern-Gauss-Bonnet formula for complete Kähler-Einstein metrics, Amer. J. Math. 138 (2016), 1067–1094.

[M2018] T. Marugame, Some Remarks on the Total CR Q and Q'-Curvatures, SIGMA 14 (2018), 010, 8pp.

[M2019] T. Marugame Self-dual Einstein ACH metrics and CR GJMS operators in dimension three, Pacific J. Math. 301 (2019), 519–546.

[M2021a] T. Marugame, Renormalized characteristic forms of the Cheng–Yau metric and global CR invariants, Adv. Math. 377 (2021), 107468–107468.

[M2021b] T. Marugame, Global secondary CR invariants in dimension five, Differential Geom. App. 78 (2021), 101804–101804.

[Ma2020] M. Matsumoto, Deformation of Einstein metrics and L^2 cohomology on strictly pseudoconvex domains, Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020), 5685–5705.

[T2018] Y. Takeuchi, Nonnegativity of the CR Paneitz operator for embeddable CR manifolds, Duke Math. J. 169 (2018), 3417–3438.

[T2019] Y. Takeuchi, Stability of the existence of a pseudo-Einstein contact form, Pacific J. Math. 303 (2019), 757–765.