リーマン面に関連する位相幾何学の問題

Riemann 面の moduli 空間上の微分形式、函数、tensor 場について

Problems on topology around Riemann surfaces

On differential forms, functions and tensor fields on the moduli space of Riemann surfaces

河澄 響矢 (東京大学大学院数理科学研究科) *
Nariya Kawazumi (University of Tokyo)

種数 g の向きづけられた C^∞ 閉曲面を Σ_g と表す。本稿では $g \geq 2$ とする。点 $P_0 \in \Sigma_g$ および 0 でない接 vector $v_0 \in T_{P_0}\Sigma_g$ をとっておく。また、$\Sigma_{g,1}$ を種数 g 向きづけられた連結コンパクト C^∞ 曲面であって連結な境界 $\partial\Sigma_{g,1}$ をもつものとする。$\Sigma_{g,1}$ の基本群の基点として境界上の点 $* \in \partial\Sigma_{g,1}$ をとる。点 $P_0 \in \Sigma_g$ において real oriented な blow-up を施して $\Sigma_{g,1}$ が得られ、v_0 に対応する $\partial\Sigma_{g,1}$ 上の点が $*$ であると理解することもできる。種数 g コンパクト Riemann 面のモジュライ空間 $\mathbb{M}_g$ つまり種数 g コンパクト Riemann 面 C の双正則同値類 $[C]$ 全体の空間は以下のような商空間と捉えることができる:

$$\mathbb{M}_g = \mathbb{J}^+(\Sigma_g)/\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g) = \mathcal{T}_g/\mathcal{M}_g. \tag{1}$$

ここで $\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)$ は Σ_g の向きを保つ微分同相写像全体のなす位相群であり、$\mathbb{J}^+(\Sigma_g)$ は向きづけられた C^∞ 曲面 Σ_g 上の正の向きの概複素構造全体の空間であり、群 $\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)$ が明らかなやり方で作用している。また、位相群 $\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)$ の単位連結成分 $\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ による $\mathbb{J}^+(\Sigma_g)$ の商空間が Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_g := \mathbb{J}^+(\Sigma_g)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ であり、ここには位相群 $\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)$ の連結成分群である写像類群 $\mathcal{M}_g := \pi_0(\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)) = \mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ が作用している。Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_g$ は可縮であって、そこへの写像類群 $\mathcal{M}_g$ の作用は固有不連続であるから標数 0 の体である実数体 $\mathbb{R}$ に係数をもつコホモロジー代数の同型

$$H^*(\mathbb{M}_g;\mathbb{R}) = H^*(\mathcal{M}_g;\mathbb{R}) = H^*(B\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g);\mathbb{R}) \tag{2}$$

がなりたつ。Madsen-Weiss [32] によりこれらのコホモロジー代数は安定域 $* < 2g/3$ においては Mumford-Morita-Miller 類（MMM 類） $e_i = (-1)^{i+1}\kappa_i \in H^{2i}(\mathbb{M}_g;\mathbb{R})$, $i \geq 1$, の生成する多項式代数に同型である

$$H^*(B\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g);\mathbb{R}) = \mathbb{R}[e_i;\, i \geq 1] \quad (* \leq 2g/3). \tag{3}$$

Madsen-Weiss による証明は代数トポロジーによるものである。そこで、

---

*東京大学大学院数理科学研究科, 〒 153-8914, 東京都目黒区駒場 3-8-1, kawazumi@ms.u-tokyo.jp
本研究は科研費 (課題番号: 18KK0071, 20H00115, 19H01784, 18K03283) の助成を受けたものである。

問題 1 (***)**.** ((2) と (3) を組み合わせた) 安定域における同型 $H^*(\mathbb{M}_g;\mathbb{R}) = \mathbb{R}[e_i;\, i \geq 1]$ を複素解析的ないしは微分幾何的に証明せよ。

ここで $\mathbb{M}_g$ の上のコホモロジー類としての MMM 類 e_i の定義 [40, 35, 34] を復習する。$\mathbb{C}_g$ を $\mathbb{M}_g$ 上のコンパクト Riemann 面の普遍族とする

$$\mathbb{C}_g := \coprod_{[C]\in\mathbb{M}_g} C/\mathrm{Aut}(C) \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}_g.$$

別の言い方をすると種数 g コンパクト Riemann 面 C と点 $P_0 \in C$ の組 (C, P_0) の双正則同値類 $[C, P_0]$ 全体の空間が $\mathbb{C}_g$ である。点の忘却写像 $\pi : \mathbb{C}_g \to \mathbb{M}_g$ は V-バンドルである。その相対接束を $T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}$ とする。これは複素 V 直線束である。その Euler 類

$$e := c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}) \in H^2(\mathbb{C}_g;\mathbb{R})$$

の冪の fiber 積分として MMM 類は定義される

$$e_i := \int_{\mathrm{fiber}} e^{i+1} \in H^{2i}(\mathbb{M}_g;\mathbb{R}), \quad i \geq 1.$$

例えば、任意の $i \geq 1$ について e_i の超楕円的ローカスへの制限は $\mathbb{R}$ 上のコホモロジー類としては 0 である。この事実にはいろいろな証明がある。なお、写像類群の上で同様に考えると e_i は整数係数のコホモロジー類として定義される [35]。 e_i の超楕円的写像類群への制限はトーションとしては非自明である（詳しくは [20] およびそこで引用されている文献を参照)。なお、空間

$$T^{\times}_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g} := T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g} \setminus (0\text{-section})$$

は、種数 g コンパクト Riemann 面 C と点 $P_0 \in C$ および 0 でない接ベクトル $v \in T_{P_0}C$ の三つ組 (C, P_0, v) の双正則同値類 $[C, P_0, v]$ 全体の空間であるが、これは写像類群

$$\mathcal{M}_{g,1} := \pi_0(\mathrm{Diff}^+(\Sigma_{g,1}, 1_{\partial\Sigma_{g,1}} \text{ on } \partial\Sigma_{g,1}))$$

の分類空間である: $T^{\times}_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g} = B\mathcal{M}_{g,1}$. 実際、$\mathcal{M}_{g,1}$ は torsion-free だからである。

さて、MMM 類の非安定的な振舞いについて考える。$R_g \subset H^*(\mathbb{M}_g;\mathbb{R})$ を MMM 類 e_i, $i \geq 1$, たちの生成する $H^*(\mathbb{M}_g;\mathbb{R})$ の部分代数とする。実コホモロジー代数 $H^*(\mathbb{M}_g;\mathbb{R})$ ではなく Chow 環 $CH^*(\mathbb{M}_g)$ を考えるとき R_g は tautological ring と呼ばれる。また、その次数 $k \geq 0$ の成分を

$$R_g^k := R_g \cap H^{2k}(\mathbb{M}_g;\mathbb{R}) \quad \text{または } R_g \cap CH^k(\mathbb{M}_g)$$

と表す。ここで外すことができないのは Faber 予想である。Faber 予想の文献としては [7] が引用されるが、もっと以前から言われていた。たとえば Looijenga [31] の序文には

> On the basis of many calculations Carel Faber has made the intriguing conjecture that this ring has the formal properties of the even-dimensional cohomology ring of a projective manifold of dimension $g - 2$, i.e., satisfies Poincaré duality and a Lefschetz decomposition.

とある。(森田茂之先生から同様のお話をうかがった記憶がある。) Faber 予想のうち既に解決している部分として以下の結果がある。

- Looijenga [31]: $k > g-2$ のとき $R_g^k = 0$ である。(とくに実数体上で ${e_1}^{g-1} = 0$ である。)
- Looijenga-Faber [31, 8]: $\dim R_g^{g-2} = 1$.
- Morita [38], Ionel [15]: R_g は $e_1, \ldots, e_{[g/3]}$ によって生成され、次数 $\leq [g/3]$ では非自明な関係式をもたない。

カップ積
$$R_g^k \times R_g^{g-2-k} \to R_g^{g-2}$$
が非退化であるという部分は依然として未解決である。

Faber 予想に限らずコホモロジー類が与えられれば、その微分形式表示が欲しくなるのは人情というものである。

疑問 2. MMM 類 $e_i \in H^*(\mathbb{M}_g; \mathbb{R})$, $i \geq 1$, を代表する canonical な微分形式は何だろうか?

以下の議論で明らかになるはずだが、 canonical は unique を意味しない。言わば「多神教」的な状況にある。

まず i が奇数のときの e_i は、 Grothendieck-Riemann-Roch の定理によって、Siegel 上半空間 $\mathcal{H}_g$ 上の $Sp_{2g}(\mathbb{R})$-不変微分形式の引き戻しとして表されることがわかる。しかし、これだけが canonical な微分形式とは言えない。i が偶数の場合も含め e_i を代表する canonical な微分形式として、最初に考えなければならないのは、相対接束 $T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}$ の双曲計量から決まる微分形式であり、その計算は Wolpert [44] によって実行された。実際、Wolpert は、上半平面上の微分作用素についての Maass calculus というものを巧みに用いることで第一 Chern 形式
$$c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, \text{双曲計量}) \in \Omega^2(\mathbb{M}_g)$$
および、任意の $i \geq 1$ についてのファイバー積分
$$\int_{\text{fiber}} c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, \text{双曲計量})^{i+1} \in \Omega^{2i}(\mathbb{M}_g)$$
を具体的に計算した。とくに $i=1$ のとき、これは Weil-Petersson Kähler 形式 ω_{WP} に一致する。とくに ω_{WP} は第一 MMM 類 e_1 を代表する。一方、$i \geq 2$ のとき、この微分形式にはレゾルベント $(D_0 - 2)^{-1}$ が残ってしまう。ここで $D_0 = y^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right)$ は上半平面 $\{x + y\sqrt{-1};\ y > 0\}$ のラプラシアンである。

問題 3 (悪問)**.** Wolpert の微分形式たちを用いて Faber 予想を部分的にでも証明せよ。

これを悪問とする理由は Weil-Petersson Kähler 形式 ω_{WP} の非退化性 ${\omega_{\mathrm{WP}}}^{3g-3} \neq 0$ にある。既に述べたように Looijenga [31] の結果の系として ${e_1}^{g-1} = 0$ である。さらに、e_1 は超楕円的 locus において 0 だが、これも ω_{WP} の非退化性と相性が良くない。

唐突だが、ここで moduli 空間 $\mathbb{M}_g$ の第二 Betti 数が 1 であることを思い出しておく。

定理 4 (Harer[11] ほか). $g \geq 3$ のとき $H^2(\mathbb{M}_g;\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ である。

したがって、$g \geq 3$ であれば exact でない $\mathbb{M}_g$ 上の 2 次閉微分形式は全て、（適切なスカラー倍により）e_1 を代表する微分形式となる。

さて、相対接束 $T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}$ の上には、他にも canonical な計量が考えられる。種数 g コンパクト Riemann 面 C の正則 1-形式全体の空間を $H^0(C;K)$ と書くことにする。$\varphi, \psi \in H^0(C;K)$ に対して複素数 $\frac{\sqrt{-1}}{2}\int_C \varphi \wedge \overline{\psi}$ をとる対応は $H^0(C;K)$ 上の Hermite 内積である。この Hermite 内積に関する $H^0(C;K)$ の正規直交基底 $\{\psi_i\}_{i=1}^g$ をとり、Bergman 計量

$$B := \frac{\sqrt{-1}}{2g}\sum_{i=1}^{g}\psi_i \wedge \overline{\psi_i} \in \Omega^2(C)$$

を考える。これは C の体積要素であって、正規直交基底 $\{\psi_i\}_{i=1}^g$ の取り方によらない。また、$\int_C B = 1$ となるようにしてある。

問題 5 (**). B に関する第一 Chern 形式

$$c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, B) \in \Omega^2(\mathbb{C}_g)$$

および、任意の $i \geq 1$ についてのファイバー積分

$$\int_{\mathrm{fiber}} c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, B)^{i+1} \in \Omega^{2i}(\mathbb{M}_g)$$

を具体的に計算せよ。

なお、接束 TC の Arakelov 計量とは、$c_1(TC, \mathrm{Arakelov}) = (2-2g)B$ をみたす計量のことであった。後述するように、$c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, \mathrm{Arakelov})$ および $i=1$ でのファイバー積分 $\int_{\mathrm{fiber}} c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, \mathrm{Arakelov})^2$ は具体的に計算できている。これらには Bergman 計量 B に関する Green 函数がゴチャゴチャ出てくる。

問題 6 (***). これらの微分形式たちを用いて Faber 予想を部分的にでも証明せよ。

ここまでは MMM 類の定義に則した微分形式の構成であったが、ここからは森田による拡大第一 Johnson 準同型 [36] を用いた MMM 類の構成 [37] に則した微分形式の構成を考える。Johnson 準同型の写像類群全体への拡張は [36] にはじまるが、本稿では、その後の北野-河澄-Massuyeau [29, 21, 33] による symplectic 展開を用いた構成法を述べる。

少し長い準備をする。基点 $* \in \partial\Sigma_{g,1}$ についての曲面 $\Sigma_{g,1}$ の基本群を π と表す: $\pi := \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$. これは階数 $2g$ の自由群であるが、その自由生成系 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ として symplectic 生成系をとる。とくに $\prod_{i=1}^g \alpha_i\beta_i{\alpha_i}^{-1}{\beta_i}^{-1} \in \pi$ は境界 $\partial\Sigma_{g,1}$ を負の向きに一周する loop である。また、$H := H_1(\Sigma_{g,1};\mathbb{R})$ と略記し、$x_i := [\alpha_i]$, $y_i := [\beta_i] \in H$ とおくと、これらは H の symplectic 基底となる。ここで一般に $\gamma \in \pi$ のホモロジー類を $[\gamma] \in H$ と書いた。

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^{g} x_iy_i - y_ix_i \in H^{\otimes 2}$$

は symplectic 基底によらない。これを symplectic 形式と呼ぶことにする。他方、ベクトル空間 H の完備テンソル代数 $\widehat{T}(H) := \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m}$ は standard な完備 Hopf 代数の構造をもつ。とくに余積

$$\Delta : \widehat{T}(H) \to \widehat{T}(H) \otimes \widehat{T}(H)$$

は、任意の $X \in H$ について $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ をみたす代数準同型である。なお、上式右辺の $\otimes$ は完備テンソル積を表し、以下も同様である。群的 (group-like) 元の全体の集合

$$G(\widehat{T}(H)) := \{u \in 1 + \prod_{m=1}^{\infty} H^{\otimes m};\ \Delta(u) = u \otimes u\}$$

は代数 $\widehat{T}(H)$ の乗法群の部分群である。

定義 7 (Massuyeau [33])**.** 写像 $\theta : \pi \to \widehat{T}(H)$ が symplectic 展開であるとは、次の 3 つの条件を充すことを言う。

(1) θ は群準同型 $\pi \to G(\widehat{T}(H))$ である。
(2) 任意の $\gamma \in \pi$ について $\theta(\gamma) \equiv 1 + [\gamma] \pmod{\prod_{m=2}^{\infty} H^{\otimes m}}$ がなりたつ。
(3) (symplectic 条件) $\theta\left(\prod_{i=1}^{g} \alpha_i\beta_i{\alpha_i}^{-1}{\beta_i}^{-1}\right) = \exp(\omega_0) (= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}{\omega_0}^m)$.

条件 (1) (2) だけを仮定したものを群的 (group-like) 展開という。たとえば上記の自由生成系 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ について $\theta_{\exp}(\alpha_i) = \exp(x_i)$, $\theta_{\exp}(\beta_i) = \exp(y_i)$, $1 \le i \le g$, をみたす群準同型 $\theta_{\exp} : \pi \to G(\widehat{T}(H)) \hookrightarrow \widehat{T}(H)$ は群的展開であるが、symplectic 展開ではない。symplectic 展開は実際に存在する。Massuyeau [33] による LMO 函手を用いた構成、久野 [30] による組み合わせ的な構成などもあるが、以下のように複素解析的にも構成できる [22]。

複素解析的に基本群 π からの準同型を構成するには、Riemann 面上の平坦接続を定義し、そのホロノミーをとるのが素直である。そこで、C を種数 g コンパクト Riemann 面、$P_0 \in C$, $0 \neq v \in T_{P_0}C$, とする。C 上の実カレントの全体を $A^*(C)$ と書くことにする。接ベクトル v を tangential basepoint にもつ $C \setminus \{P_0\}$ の基本群 $\pi_1(C \setminus \{P_0\}, v)$ とは、区分的 C^∞ path $\ell : [0,1] \to C$ であって、条件 $\ell(0) = \ell(1) = P_0$, $\ell(]0,1[) \subset C \setminus \{P_0\}$ および速度の条件 $\dot{\ell}(0) = -\dot{\ell}(1) = v$ をみたすもの全体の集合を、これらの条件を保つホモトピーで同一視した商集合である。v のところでスイッチバックすることで積が定まり、$\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$ と同型な群となる。$A^1(C)$ 上の Hodge $*$-作用素 $*$ は C の共形構造だけで決まることに注意する。P_0 におけるデルタ・カレントを $\delta_{P_0} \in A^2(C)$ とすると、完全列

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{const}} A^0(C) \xrightarrow{d*d} A^2(C) \xrightarrow{\int_C} \mathbb{R} \to 0$$

がなりたち、Green 作用素が決まる。まず、δ_{P_0} に関する Green 作用素を $\Phi_0 : A^2(C) \to A^0(C)/\mathbb{R}$ とする。任意の $\Omega \in A^2(C)$ について $d * d\Phi_0(\Omega) = \Omega - (\int_C \Omega)\delta_{P_0}$ がなりたつ。一方、Bergman 計量 B に関する Green 作用素を $\hat{\Phi} : A^2(C) \to A^0(C)$ とする。任意の $\Omega \in A^2(C)$ について $d * d\hat{\Phi}(\Omega) = \Omega - (\int_C \Omega)B$ および $\int_C \hat{\Phi}(\Omega)B = 0$ がなりたつ。

以上を踏まえて C 上に完備テンソル代数 $\widehat{T}(H_1(C;\mathbb{R}))$ に係数をもつ「平坦な」接続形式

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{(m)}, \quad \omega_{(m)} \in A^1(C) \otimes (H_1(C;\mathbb{R}))^{\otimes m}$$

を $m \geq 1$ について帰納的に構成する。まず、$m = 1$ のとき、双対 $(H_1(C;\mathbb{R}))^*$ を C 上の実調和 1-形式の全体と同一視して $A^1(C)$ の部分空間とみなす。恒等写像 $1_{H_1(C;\mathbb{R})} \in (H_1(C;\mathbb{R}))^* \otimes H_1(C;\mathbb{R}) \subset A^1(C) \otimes H_1(C;\mathbb{R})$ に対応する調和 1-形式を $\omega_{(1)} \in A^1(C) \otimes H_1(C;\mathbb{R})$ とする。$m=2$ のとき $d\omega_{(2)} = \omega_{(1)} \wedge \omega_{(1)}$ をみたす $\omega_{(2)}$ が欲しいが、そのようなものは存在しない。$\int_C \omega_{(1)} \wedge \omega_{(1)} = \omega_0 \in (H_1(C;\mathbb{R}))^{\otimes 2}$ だからである。そこで、$m \geq 2$ については、帰納的に

$$\omega_{(m)} := *d\Phi_0 \left(\sum_{p=1}^{m-1} \omega_{(p)} \wedge \omega_{(m-1-p)} \right) \in A^1(C) \otimes (H_1(C;\mathbb{R}))^{\otimes m}$$

と定義すると $d\omega = \omega \wedge \omega - \omega_0 \delta_{P_0}$ となる。つまり $C \setminus \{P_0\}$ 上で ω は平坦となる。さらに、$\dot{\ell}(0) = -\dot{\ell}(1) = v \neq 0$ をみたす path ℓ に沿うホロノミーは有限確定値をとるので、「平坦」接続 ω のホロノミーとして写像

$$\theta^{(C,P_0,v)} : \pi_1(C \setminus \{P_0\}, v) \to \widehat{T}(H_1(C;\mathbb{R}))$$

が得られる [22]。これは symplectic 展開であり、Harris [12] の調和体積の高次化なので調和的 Magnus 展開と命名した。

symplectic 展開の一般論にもどる。河澄-久野 [27] は、symplectic 展開 $\theta : \pi \to \widehat{T}(H)$ の線型拡張 $\theta : \mathbb{R}\pi \to \widehat{T}(H)$ が、曲面 $\Sigma_{g,1}$ の Goldman 括弧積を保つことを示した。また、Alekseev-河澄-久野-Naef [3] は、 Goldman 括弧積を保つ群的展開は symplectic 展開と共役であることを示した。曲面 $\Sigma_{g,1}$ に随伴する柏原 Vergne 問題 [2] は、群的展開に関する問題であって、二つの条件 (KVI) と (KVII) からなる。第一の条件 (KVI) は symplectic 展開の symplectic 条件に他ならない。 symplectic 展開について θ が Turaev 余括弧積を保つことと同値であるように (KVII) が定められている。このように定義する根拠は、オリジナルの柏原 Vergne 問題 [19, 5] （の共役）が、種数 0 の曲面の基本群の群的展開が Goldman 括弧積と Turaev 余括弧積を保つという条件に同値であることを [1] において証明したからである。Alekseev-Torossian [5] と Enriquez [6] の議論を用いると、$g \geq 2$ ならば曲面 $\Sigma_{g,1}$ に随伴する柏原 Vergne 問題は解をもつことがわかる。ここでは曲面をパンツ分解して、それぞれのパンツ上の解を張り合わせている。

柏原 Vergne 問題は群的展開についての問題であるわけだが、explicit な解は構成できるだろうか？　種数 0 の（つまりオリジナルの）柏原 Vergne 問題については Knizhnik-Zamonodchikov 接続のホロノミーが解を与える。Alekseev-Naef [4] は、このホロノミーが Goldman 括弧積と Turaev 余括弧積を保つことを直接証明している。次の問題は、まもなく解決されると思っている。

問題 8 (*). 調和的 Magnus 展開 $\theta^{(C,P_0,v)}$ は曲面 $\Sigma_{g,1}$ についての柏原 Vergne 問題の解を与えるだろう。

回り道が長かったが、拡大第一 Johnson 準同型を用いた MMM 類を代表する微分形式の構成に戻る。最初に、北野-河澄-Massuyeau のやり方で拡大第一 Johnson 準同型を構成する。$\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m$, $\theta_m : \pi \to H^{\otimes m}$, を $\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$ の symplectic 展開とする。任意の

$\gamma \in \pi$ について $\theta_0(\gamma)=1, \theta_1(\gamma)=[\gamma]$ であるが、θ が群的であることから $\theta_2(\gamma) \in \Lambda^2 H$ である。任意の $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}$ と $\gamma \in \pi$ について

$$\tau_1^\theta(\varphi)[\gamma] := \theta_2(\gamma) - \varphi\theta_2(\varphi^{-1}(\gamma)) \in \Lambda^2 H$$

とおく。右辺は φ を止めれば π からアーベル群 $\Lambda^2 H$ への準同型になっている。そこで $\tau_1^\theta(\varphi) \in H^* \otimes \Lambda^2 H$ とみなすことができる。ホモロジー群 H の交叉形式つまり Poincaré 双対性 $H = H^*$ によって $H^* \otimes \Lambda^2 H = H \otimes \Lambda^2 H$ とみなすと、ここには $\Lambda^3 H$ が含まれているが、θ が symplectic 展開であることから $\tau_1^\theta(\varphi) \in \Lambda^3 H$ であることがわかる。こうして得られる写像 $\tau_1^\theta : \mathcal{M}_{g,1} \to \Lambda^3 H$ は、写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の symplectic 群 $Sp(H)$ の加群 $\Lambda^3 H$ に値をもつねじれコサイクルである。そのコホモロジー類 $[\tau_1^\theta] \in H^1(\mathcal{M}_{g,1}; \Lambda^3 H)$ が森田 [36] による拡大第一 Johnson 準同型に他ならない。$T^\times_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g} = B\mathcal{M}_{g,1}$ および $T^\times_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g} \to \mathbb{C}_g$ の Gysin 列により、コホモロジー群の同型 $H^1(\mathcal{M}_{g,1}; \Lambda^3 H) = H^1(T^\times_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}; \Lambda^3 H) \cong H^1(\mathbb{C}_g; \Lambda^3 H)$ がなりたつ。ここで $Sp(H)$ 加群 $\Lambda^3 H$ の定める $\mathbb{M}_g$ 上の平坦ベクトル束 $\coprod_{[C]\in\mathbb{M}_g} \Lambda^3 H_1(C;\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_g$（の引き戻し）も $\Lambda^3 H$ と書いている。この同型によって対応する元を $\tilde{k} \in H^1(\mathbb{C}_g; \Lambda^3 H)$ と表すことにする。Poincaré 双対性によって $Sp(H)$ 加群の同型 $\Lambda^3 H \cong \Lambda^3 H^*$ がなりたつことに注意する。そこで $d \geq 0$ について $Sp(H)$-不変テンソル $\alpha \in (\Lambda^d(\Lambda^3 H))^{Sp(H)}$ を $Sp(H)$-準同型 $\alpha : \Lambda^d(\Lambda^3 H) \to \mathbb{R}$ とみなして、コホモロジー群の誘導準同型 $\alpha_* : H^*(\mathbb{C}_g; \Lambda^d(\Lambda^3 H)) \to H^*(\mathbb{C}_g; \mathbb{R})$ が定まる。次の森田 [37] の観察は MMM 類を作る一つのレシピを与えている。

定理 9 (森田のレシピ [37])**.** (1) $Sp(H)$-不変テンソル α_0 および $\alpha_1 \in (\Lambda^2(\Lambda^3 H))^{Sp(H)}$ がただ一つ存在して次をみたす

$$e = \alpha_{0*}(\tilde{k}^2), \quad e_1 = \alpha_{1*}(\tilde{k}^2) \in H^2(\mathbb{C}_g; \mathbb{R}).$$

(2) 写像

$$\tilde{k}_* : \Lambda^*(\Lambda^3 H)^{Sp(H)} \to H^*(\mathbb{C}_g; \mathbb{R}), \quad \alpha \mapsto \alpha_*(\tilde{k}^{\text{冪}})$$

は代数準同型であって、その像 $\operatorname{Im} \tilde{k}_*$ は部分代数 $\mathbb{R}[e, e_i;\, i \geq 1]$ を含む。

河澄-森田 [28] は（非安定域も含め）等式 $\operatorname{Im} \tilde{k}_* = \mathbb{R}[e, e_i;\, i \geq 1]$ がなりたつことを示した。Faber 予想に関する上述の森田の結果 [38] はこの等式に $Sp(H)$ の表現論を組み合わせて得られる。なお、コホモロジーの次数が 4 以上のところでは $\operatorname{Ker} \tilde{k}_*$ は 0 ではない。

このことから $\tilde{k}$ を代表する canonical な（ねじれ係数）1 次微分形式が得られれば森田のレシピを使って MMM 類を表す微分形式が得られる。とくに $e = [\alpha_{0*}(\tilde{k}^2)], e_1 = [\alpha_{1*}(\tilde{k}^2)]$ については canonical と言ってもよいだろう。その $\tilde{k}$ を代表する微分形式として、これから述べる Harris-Pulte の点付き調和体積 [12, 41] の第一変分をとることができる。

さきと同じく、C を種数 g コンパクト Riemann 面とし、点 $P_0 \in C$ と接ベクトル $v \in T_{P_0}C \setminus \{0\}$ を考える。$\varphi, \psi \in H_1(C;\mathbb{Z})$ および $\gamma \in \pi_1(C \setminus \{P_0\}, v)$ について、点付き調和体積 $I(\varphi, \psi; \gamma) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ が以下のように定まる。まず、Poincaré 双対性により同一視 $H_1(C;\mathbb{Z}) = H^1(C;\mathbb{Z})$ により φ, ψ を C 上の調和 1-形式とみなし、Chen の反復積分 $\int_\gamma \varphi\psi \in \mathbb{R}$ をとる。これはホモトピー不変ではないが、

$$I(\varphi, \psi; \gamma) = I^C_{P_0}(\varphi, \psi; \gamma) := \int_\gamma \varphi\psi - \int_\gamma *d\Phi_0(\varphi \wedge \psi) \bmod \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

と補正するとこれは $[C, P_0] \in \mathbb{C}_g$ と φ, ψ および $[\gamma] \in H_1(C;\mathbb{Z})$ だけに依存する量である。 $[C, P_0] \in \mathbb{C}_g$ を動かして考える。$\Lambda^3 H_{\mathbb{Z}}$ を $\mathbb{M}_g$ 上の平坦束 $\coprod_{[C]\in\mathbb{M}_g} \Lambda^3 H_1(C;\mathbb{Z}) \to \mathbb{M}_g$（の引き戻し）とし、Poincaré 双対性により自身の双対と同一視すると、I は平坦束 $\Lambda^3 H/\Lambda^3 H_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}_g$ の切断を与える。上述の調和的 Magnus 展開 θ はこの構成を高次に拡張したものであり、

$$(\varphi \wedge \psi \text{ part of } \theta_2(\gamma)) \equiv I^C_{P_0}(\varphi, \psi; \gamma) \pmod{\mathbb{Z}}$$

がなりたつ。上述の τ_1^θ の定義式と比較することで、点付き調和体積 I の第一変分 $\delta I \in \Omega^1(\mathbb{C}_g; \Lambda^3 H)$ は

$$\tilde{k} = [\delta I] \in H^1(\mathbb{C}_g; \Lambda^3 H)$$

をみたす。なお、Riemann 面 C 上の交叉数 $\cdot$ に関して $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot [\gamma] = [\gamma] \cdot \varphi = 0$ がなりたつならば、$I^C_{P_0}(\varphi, \psi; \gamma)$ は点 P_0 の取り方によらない。これが Harris [12] による調和体積である。また、C が超楕円曲線で、$P_0 \in C$ が Weierstrass 点のとき、超楕円対合を考えれば $I^C_{P_0}(\varphi, \psi; \gamma) \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ である。そこで第一変分 δI は超楕円的ローカスの上で 0 である。このことからも、超楕円的ローカスの上では任意の $i \geq 1$ について実コホモロジー類として $e_i = 0$ であることが示される。なお、田所勇樹は、ここで述べた超楕円曲線を含め、いくつかの具体的な Riemann 面についての点付き調和体積の計算を実行している。詳細は田所自身によるサーベイ [42] を参照。

そこで点付き調和体積の第一変分 δI の具体的な形が欲しくなるが、それは Harris [12] で計算されている。直和分解 $A^1(C) \otimes \mathbb{C} = A^{1,0}(C) \oplus A^{0,1}(C)$ にともなって $\varphi \in A^1(C) \otimes \mathbb{C}$ は $(\varphi', \varphi'') \in A^{1,0}(C) \oplus A^{0,1}(C)$ に対応しているとする。この記号を使うと、任意の $\varphi, \psi, \gamma \in H_1(C;\mathbb{Z}) = H^1(C;\mathbb{Z}) \subset A^1(C)$ について

$$(\delta I)(\varphi, \psi, \gamma) = \varphi'(*d\Phi_0(\psi, \gamma))' + \psi'(*d\Phi_0(\gamma, \varphi))' + \gamma'(*d\Phi_0(\varphi, \psi))'$$

となる。右辺は P_0 のみに高々 1 位の極をもつ C 上の有理型二次微分 $\in H^0(C; 2K + P_0) = T^*_{[C,P_0]}\mathbb{C}_g$ である。

以上の議論を合わせると e, e_1 を代表する canonical な微分形式

$$\begin{aligned} e^J &:= \alpha_{0*}((\delta I)^2) \in \Omega^2(\mathbb{C}_g), \\ e_1^J &:= \alpha_{1*}((\delta I)^2) \in \Omega^2(\mathbb{M}_g) \end{aligned}$$

が得られる。後者 e_1^J は本来 $\Omega^2(\mathbb{C}_g)$ の元であるが、一意的に定まる $\Omega^2(\mathbb{M}_g)$ の元の射影による引き戻しであることがわかる。しかし、e, e_1 を代表する canonical な微分形式はこれだけではない。

$$\begin{aligned} e^A &:= c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, \text{Arakelov}) \in \Omega^2(\mathbb{C}_g), \\ e_1^F &:= \int_{\text{fiber}} (e^J)^2 \in \Omega^2(\mathbb{M}_g) \end{aligned}$$

も canonical であり、各 $[C] \in \mathbb{M}_g$ について $e^A|_C = (2-2g)B = e^J|_C$ がなりたつ。また、微分形式としては $e_1^J \neq e_1^F$ である。

定理 10 (河澄 [22]).

$$e^A - e^J = \frac{1}{(2g-2)^2}(e_1^F - e_1^J) \in \Omega^2(\mathbb{C}_g)$$

$g \geq 3$ のとき $\mathbb{M}_g$ の佐武コンパクト化を用いると $\mathbb{M}_g$ 上の正則函数は定数函数しかない。したがって、$e_1^F - e_1^J = \partial\overline{\partial}(h)$ をみたす $\mathbb{M}_g$ 上の函数 h は存在してただ一つである。この函数は $g \geq 2$ のとき以下のように具体的に与えられる。C を種数 g コンパクト Riemann 面とし、$\{\psi_i\}_{i=1}^g \subset H^0(C;K)$ を正規直交基底とする。

$$a_g(C) := -\sum_{i,j=1}^{g} \int_C \psi_i \wedge \overline{\psi_j}\hat{\Phi}(\overline{\psi_i} \wedge \psi_j) \in \mathbb{R}_{>0}$$

と定める。ここで $\hat{\Phi}$ は B に関する Green 作用素である。この不変量は河澄 [23, 24]（a_g と書く）および Zhang [45]（φ と書く）が同じ不変量を別の文脈で独立に定義したもので、Kawazumi-Zhang 不変量または Zhang-Kawazumi 不変量と呼ばれている。この不変量をもちいると次がなりたつ。

定理 11 (河澄 [23]).
$$\frac{-2\sqrt{-1}}{2g(2g+1)}\partial\overline{\partial}(a_g) = \frac{1}{(2g-2)^2}(e_1^F - e_1^J).$$

次は是非考えるべき問題である。

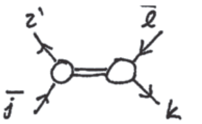
問題 12 (**). $i \geq 2$ についても $\int_{\text{fiber}}(e^A)^{i+1} \in \Omega^{2i}(\mathbb{M}_g)$ を研究せよ。とくに、これらを a_g と $\operatorname{Im}\tilde{k}_*$ の元を用いて表すことができるか？

後半の問いは、どちらとも見当がつかないが、後述する modular graph テンソルが関係するのかもしれない。

不変量 a_g について最も仕事をしているのは R. de Jong である。[16] において、Faltings delta 不変量 [9], Hain-Reed 不変量 [10] および Kawazumi-Zhang 不変量 a_g が線型従属であることを示し、[17] などで a_g の漸近的な振る舞いを研究し、[18] では定理 10 と定理 11 の別証明を与えている。これらとは別に、Wilms [43] は不変量 a_g の theta 定数を用いた表示を与えており、d'Hoker-Green [13] は種数 2 のときの不変量 a_2 と超弦理論との関係を論じている。

不変量 a_g の一般化として $\mathbb{M}_g \subset \mathfrak{H}_g/Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ 上のテンソル場を考えることができる [25, 26]。$[C] \in \mathbb{M}_g$ とし $\{\psi_i\}_{i=1}^g \subset H^0(C;K)$ を正規直交基底とする。

$\{\psi_i\}_{i=1}^g \subset H^0(C:K)$ o.n. basis

$A_{i\bar{j}k\bar{l}} := \int_C \psi_i \wedge \overline{\psi_j}\ \hat{\Phi}(\psi_k \wedge \overline{\psi_l}) \in \mathbb{C} \longleftrightarrow$ 

$\left(a_g = -\sum_{i,j=1}^{g} A_{i\bar{j}j\bar{i}} \right)$ $\quad (i,j,k,l \in \{1,\cdots,g\})$

と定義する。

定理 13 (河澄 [25, 26]). 微分形式

$$48\sqrt{-1}\sum_{i,j,k,l}(\psi_l\psi_j A_{i\bar{j}k\bar{l}}\overline{\psi_i\psi_k} - \psi_l\psi_j A_{i\bar{j}k\bar{i}}\overline{\psi_k\psi_l}) \in T^*_{[C]}\mathbb{M}_g \otimes \overline{T^*_{[C]}\mathbb{M}_g}$$

は $e_1 \in H^2(\mathbb{M}_g;\mathbb{R})$ を代表する。

この構成は、最近 d'Hoker-Schlotterer [14] によって modular graph tensors という名称のもとで一般化されている。注目すべきは、これらの modular graph tensors の間に非自明な関係式が見出されており、さらにそれらの関係式は Green 作用素 $\hat{\Phi}$ の形式的な性質だけから導かれているということである。これらは個人的には大いに励まされる結果である。そこで次の問いを立てたい。

問題 14 (**)**.** (1) $i \geq 2$ とくに i 偶数について第 i MMM 類 e_i を代表する微分形式が modular graph tensors たちから構成できないか？

(2) その上で e_i たちの（非安定域における）非自明な関係式が Green 作用素 $\hat{\Phi}$ の形式的な性質から導かれないか？

講演内容は以上であるが、質疑応答の際に世話人の高山茂晴さんから、問題5を $(TC)^{\otimes n}$, $n \geq 2$, に拡張するという興味深い示唆をいただいた。見当違いである心配があるが、私なりの解釈を書いておきたい。$(T^*C)^{\otimes n}$ すなわち nK の正則切断の空間 $H^0(C; nK)$ に計量 B をつかって Hermite 内積

$$\tfrac{(\sqrt{-1})^n}{2^n}\int_C u\overline{v}B^{1-n} \in \mathbb{C} \quad (u, v \in H^0(C; nK))$$

を定義する。局所座標 z について $u\overline{v} = f(z)\overline{g(z)}(dz)^{\otimes n}(\overline{dz})^{\otimes n}$ という形をしているから B^{1-n} をかけて $(1,1)$-形式が得られ、これを C 上で積分することができる。この内積に関する正規直交基底 $\{u_i\}_{i=1}^{(2n-1)(g-1)}$ をとり、

$$B_n := \tfrac{(\sqrt{-1})^n}{2^n(2n-1)(g-1)} \sum_{i=1}^{(2n-1)(g-1)} u_i\overline{u_i}B^{1-n} \in \Omega^2(C)$$

とおく。もちろんこれは正規直交基底のとり方によらない。標準束 K は底点をもたないので nK も底点をもたず、B_n は C の体積要素となる。

問題 15 (**)**.** (1) 第一 Chern 形式

$$c_1((T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}), B_n) \in \Omega^2(\mathbb{C}_g)$$

を計算せよ。

(2) 次をみたす $\mathbb{C}_g$ 上の実解析函数 $h_{n,g}$ を調べよ

$$\tfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}h_{n,g} = c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, B_n) - c_1(T_{\mathbb{C}_g/\mathbb{M}_g}, B).$$

これらの関数がモジュライ空間 $\mathbb{M}_g$ 上の determinant 直線束に関する Mumford の定理 [39][定理 5.10, p.64] と何か関係があってもよさそうだと思う。

References

[1] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, Adv. Math. **326** (2018), 1–53.

[2] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, arXiv:1804.09566.

[3] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, Goldman-Turaev formality implies Kashiwara-Vergne, Quantum Topol. **11** (2020), no. 4, 657–689.

[4] A. Alekseev and F. Naef, Goldman-Turaev formality from the Knizhnik-Zamolodchikov connection, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **355** (2017), no. 11, 1138–1147.

[5] A. Alekseev and C. Torossian, The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 415–463.

[6] B. Enriquez, Elliptic associators, Selecta Math. (N.S.) **20** (2014), no. 2, 491–584.

[7] C. Faber, A conjectural description of the tautological ring of the moduli space of curves, in: *Moduli of curves and abelian varieties*, Aspects Math., E33, Vieweg, Braunschweig, 109–129 (1999)

[8] C. Faber, A non-vanishing result for the tautological ring of $\mathcal{M}_g$, preprint, arXiv:math/9711219 (1997)

[9] G. Faltings, Calculus on arithmetic surfaces, Ann. Math., **119**, 387–424 (1984)

[10] R. Hain and D. Reed, On the Arakelov geometry of the moduli space of curves, J. Differential Geom., **67** 195-228 (2004)

[11] J. Harer, The second homology group of the mapping class group of an orientable surface, Invent. math., **72**, 221–239 (1983)

[12] B. Harris, Harmonic volumes, Acta Math., **150**, 91–123 (1983)

[13] E. D'Hoker and M. B. Green, Zhang-Kawazumi invariants and superstring amplitudes, J. Number Theory, **144** 111–150 (2014)

[14] E. D'Hoker and O. Schlotterer, Identities among higher genus modular graph tensors, preprint, arXiv: 2010.00924 (2020)

[15] E. Ionel, Relations in the tautological ring of Mg, Duke Math. J., **129**, 157–186 (2005)

[16] R. de Jong, Second variation of Zhang's λ-invariant on the moduli space of curves, Amer. J. Math., **135** 275–290 (2013)

[17] R. de Jong, Asymptotic behavior of the Kawazumi-Zhang invariant for degenerating Riemann surfaces. Asian J. Math., **18**, 507–524 (2014)

[18] R. de Jong, Torus bundles and 2-forms on the universal family of Riemann surfaces, in: *Handbook of Teichmuller theory*, ed. A. Papadopoulos, Volume VI, EMS Publishing House, Zurich, 195–227 (2016)

[19] M. Kashiwara and M. Vergne, The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions, Invent. math. **47** (1978), no. 3, 249–272.

[20] N. Kawazumi, Weierstrass points and Morita-Mumford classes on hyperelliptic mapping class groups, Topology and its appl. **125**, 363–383 (2002)

[21] N. Kawazumi, Cohomological aspects of Magnus expansions, preprint, math.GT/0505497 (2005)

[22] N. Kawazumi, Harmonic Magnus expansion on the universal family of Riemann surfaces, preprint, math.GT/0603158 (2006)

[23] N. Kawazumi, Johnson's Homomorphisms and the Arakelov-Green function, preprint, math.0801,4218 (2008)

[24] N. Kawazumi, Canonical 2-forms on the moduli space of Riemann surfaces, in: *Handbook of Teichmuller theory*, ed. A. Papadopoulos, Volume II, EMS Publishing House, Zurich, 217–237 (2009)

[25] N. Kawazumi, Some tensor field on the Teichmüller space, in Lecture at MCM2016, OIST (2016) http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawazumi/OIST1610_v1.pdf.

[26] N. Kawazumi, Differential forms and functions on the moduli space of Riemann surfaces, in Séminaire Algèbre et topologie, Université de Strasbourg. (2017) http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawazumi/1701Strasbourg_v1.pdf.

[27] N. Kawazumi and Y. Kuno, The logarithms of Dehn twists, Quantum Topology **5**, 347–423 (2014)

[28] N. Kawazumi and S. Morita, The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the stable characteristic classes, Math. Res. Lett., **3**, 629–641(1996)

[29] T. Kitano, Johnson's homomorphisms of subgroups of the mapping class group, the Magnus expansion and Massey higher products of mapping tori, Topology Appl., **69**, 165–172 (1996)

[30] Y. Kuno, A combinatorial construction of symplectic expansions, Proc. Amer. Math. Soc., **140**, 1075–1083 (2012)

[31] E. Looijenga, On the tautological ring of $\mathcal{M}_g$, Invent. math., **121**, 411–419 (1995)

[32] I. Madsen and M. Weiss, The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford's conjecture, Ann. of Math., **165**, 843–941 (2007).

[33] G. Massuyeau, Infinitesimal Morita homomorphisms and the tree-level of the LMO invariant, Bull. Soc. Math. France, **140**, 101–161 (2008)

[34] E. Y. Miller, The homology of the mapping class group, J. Differemtial Geom., **24**, 1–14 (1986).

[35] S. Morita, Characteristic classes of surface bundles, Invent. math., **90**, 551–577 (1987).

[36] S. Morita, The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group, Invent. math., **111**, 197–224 (1993)

[37] S. Morita, A linear representation of the mapping class group of orientable surfaces and characteristic classes of surface bundles, in *Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996, 159–186.

[38] S. Morita, Generators for the tautological algebra of the moduli space of curves, Topology, **42**, 787–819 (2003)

[39] D. Mumford, Stability of projective varieties, L'Enseignement Mathématique, **23**, 39–110 (1977)

[40] D. Mumford, Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, in *Arithmetic and Geometry*, Progr. Math., **36**, Birkhäuser, Boston, 1983, 271–328.

[41] M. J. Pulte, The fundamental group of a Riemann surface: Mixed Hodge structures and algebraic cycles, Duke Math. J., **57** 721–760 (1988)

[42] Y. Tadokoro, Harmonic volume and its applications, Handbook of Teichmuller theory, ed. A. Papadopoulos, Volume VI, EMS Publishing House, Zurich, 167–193 (2016).

[43] R. Wilms, New explicit formulas for Faltings' delta-invariant, Invent. math., **209**, 481–539 (2017)

[44] S. Wolpert, Chern forms and the Riemann tensor for the moduli space of curves, Invent. math., **85**, 119–145 (1986).

[45] S.-W. Zhang, Gross-Schoen cycles and dualising sheaves, Invent. math., **179** 1–73 (2010)