

カラビ・ヤウ多様体の問題

学習院大学 細野 忍
(Shinobu Hosono, Gakushuin University)

1 はじめに

1980年代の半ばに弦理論の研究が注目を集め、特に複素3次元カラビ・ヤウ多様体に関心が集まった。弦理論の理論的な整合性の条件から、複素3次元でリッチ曲率が零となるようなケーラー計量を持つ多様体(カラビ・ヤウ多様体)が導かれたためであった。そのような多様体の存在は、YauによるCalabi予想の解決によって既に分かっていたが、いったいどれ程存在するのかという問いに関心が集まった。もし存在するカラビ・ヤウ多様体の種類が少数に限られるなら、それは弦理論に強い制限を与えることになり、(実験を上手く説明している)標準理論が含む基本粒子の質量など「理論に含まれる任意パラメーター」を決めてしまう可能性が期待されたためである。当時、3次元カラビ・ヤウ多様体の種類(可微分同型類)がどれ程存在するのか?という問いに、構成的に答える数学の文献が無かったために、物理学者を中心に3次元カラビ・ヤウ多様体を構成する作業が行われた。その結果、80年代終わり頃から90年代のはじめにかけて、重み付き射影空間の中で超曲面や完全交叉として表される3次元カラビ・ヤウ多様体が8,000種類ほど構成されることになるが、それは「存在するカラビ・ヤウ多様体の種類は少数であろう」という物理学者の期待には反するものであった。しかしながら、このような作業から得られたカラビ・ヤウ多様体をホッジ数で並べて整理してみると、ホッジ数の分布に現れる不思議な対称性、現在に言う「ミラー対称性」が観察されたのであった。

90年代半ばになると、カラビ・ヤウ多様体のこの不思議な対称性をめぐって物理学者だけでなく数学者をも巻き込んだ研究が行われて、対称性の理解が大きく発展することになる。研究集会では、このようなカラビ・ヤウ多様体の問題として、ミラー対称性に関連する数学の問題を取り上げて紹介した。すべての問題を取り上げることは浅学の筆者には不可能であり、また、問題を深く掘り下げて取り上げることに力不足を感じたが、筆者のこれまでの研究と関わりのある範囲で問題を取り上げることを試みた。専門家にとっては物足りないと思われるが、カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性について振り返ってみるきっかけとなればと思う。

講演では、「問題」に難易度に従って*を付けて紹介したが、報告集をまとめるにあたって幾つか新たに問題を付け加えることにした。区別のために新たに加えた問題には†を付けておいた。

2 カラビ・ヤウ多様体

2.1 カラビ・ヤウ多様体の可微分同型類

カラビ・ヤウ多様体の定義は、文献によって幾分違いがあるが、ここでは複素幾何学または理論物理学に近い以下の形で与えることにする。

定義 2.1. (複素) d 次元カラビ・ヤウ多様体とは、1) d 次元コンパクト、ケーラー多様体で、2) 接束の第1チャーン類が $c_1(T_X) = 0$ を満たし、3) $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 (1 \leq i \leq d-1)$ を満たす多様体.

注意. ここで、条件 1) を条件 1)' 非特異な射影的多様体、と置き換えることができるが、 $d = 2$ の場合に 1), 1)' の違いが出てくる. $d = 2$ の場合にミラー対称性を考察するときは 1)' の方が適していることが判明する. 条件 2) は標準束 K_X に関して $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ と置き換えて良い、また、 $d = 1$ のとき条件 3) は空であると読むことにする.

以下では、 $d = 1, 2, 3$ のカラビ・ヤウ多様体の性質を簡単に対比してみる.

- $d = 1$ の場合、条件から位相構造が実 2 次元トーラスと決まり、これに可微分構造を入れると自然に複素構造も (1次元の自由度を伴って) 定まって楕円曲線となる.
- $d = 2$ のカラビ・ヤウ多様体は、Kähler, Kodaira, Kummer に因んで K3 曲面と呼ばれ、また 3 氏による結果として、すべての K3 曲面は可微分同型で、その複素構造は 20 次元であることが知られている. 20 次元の変形族の中で、(Kodaira-Hodge の埋め込み定理から) 一般の複素構造を持った K3 曲面は射影的でないことが分かるので、ここで定義 2.1 の条件 1) と 1)' の違いが生ずる.
- $d = 3$ の場合. $d = 1, 2$ の場合可微分同型類が 1 つしかないのに対して、 $d = 3$ になると様子が一気に変わる. この場合、ホッジ数について

$$\begin{array}{cccccc}
 & & h^{0,0} & & & 1 \\
 & & h^{1,0} & h^{0,1} & & 0 \ 0 \\
 & & h^{2,0} & h^{1,1} & h^{0,2} & 0 \ h^{1,1} \ 0 \\
 h^{3,0} & h^{2,1} & h^{1,2} & h^{0,3} & = & 1 \ h^{2,1} \ h^{1,2} \ 1 \\
 & & h^{3,1} & h^{2,2} & h^{1,3} & 0 \ h^{2,2} \ 0 \\
 & & h^{2,3} & h^{3,2} & & 0 \ 0 \\
 & & h^{3,3} & & & 1
 \end{array} \tag{2.1}$$

が成り立ち、ベッチ数、オイラー数と $b_2 = h^{1,1}, \chi = 2(h^{1,1} - h^{2,1})$ のように関係が付けられるので、 $h^{1,1}, h^{2,1}$ は位相不変量となる. 従って、 $(h^{1,1}, h^{2,1})$ の値が可微分同型類を調べる 1 つの目安となる. しかし、 $(h^{1,1}, h^{2,1})$ の値が等しい場合でも、可微分同型にならない例は多く存在する. 例えば、 $d = 3$ の場合には互いに双有理なカラビ・ヤウ多様体のホッジ数は等しいことが示されている [1]. その他、可微分同型類に関して 60 年代の位相幾何学からの結果が知られている.

定理 2.2 (C.T.C Wall [24]). 実 6 次元多様体 M_6 について、条件: $H_*(M_6, \mathbb{Z})$ は *torsion* を持たない、Stiefel-Whitney 類について $w_2(M_6)$ が零に等しい、が成り立つとする. このような M_6 の可微分同型類は、 $H^2(M_6, \mathbb{Z}) = H^2$ の上に定まる

$$(1) \text{ 3重線形形式 } \mu : H^2 \times H^2 \times H^2 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (2) \text{ 線形形式 } p_1 : H^2 \rightarrow \mathbb{Z}$$

で $\mu(x, y, y) \equiv \mu(x, x, y) \pmod{2}, p_1(x) \equiv 4\mu(x, x, x) \pmod{24} (x, y \in H^2)$ を満たすものの同型類と 1 対 1 の対応を持つ. ここで、 p_1 はポントリヤーギン類とカップ積を取ることで定義される線形形式である.

前述したように、弦理論とのつながりが見つかった当初、カラビ・ヤウ多様体の可微分同型類は少ないことが期待されたのだが実際は非常に多いことが観察されている.

問題 1.*** 3次元カラビ・ヤウ多様体の可微分同型類は有限か？ また、オイラー数 $|\chi|$ は有界か？

この問題の難易度は高いと思われるが、「~のように構成される3次元カラビ・ヤウ多様体」という具合に、何かの制限を付け加えれば答えやすくなる。実際、重み付き射影空間 $\mathbb{P}^4(w)$ の中で一般の超曲面として実現され（その特異点解消が）カラビ・ヤウ多様体を定める場合が、90年代に物理学者を中心に調べられた。これらは、射影空間 \mathbb{P}^4 の中の一般5次超曲面として現れるカラビ・ヤウ多様体の拡張であるが、弦理論の Landau-Ginzburg 模型による記述法として研究が深められ、後のミラー対称性の発見に深く関わった。このようにしてカラビ・ヤウ多様体の構成が発展する中で Batyrev は、重み付き射影空間 $\mathbb{P}^4(w)$ を4次元の反射的 (reflexive) 多面体 Δ が定める射影的トーリック多様体 \mathbb{P}_Δ に一般化することが出来て、その様な \mathbb{P}_Δ の中で $-K_{\mathbb{P}_\Delta}$ の一般因子が定める超曲面が、MPCP(maximally, projective, crepant, partial resolution) と呼ばれる \mathbb{P}_Δ の特異点 (部分) 解消のもとで、3次元のカラビ・ヤウ多様体を定めることを見抜いた。反射的多面体の双対性から、双対多面体 Δ^* を用いて同様にカラビ・ヤウ多様体を得られることになって、こうして $\mathbb{P}_\Delta, \mathbb{P}_{\Delta^*}$ に対して得られるカラビ・ヤウ多様体 X, X^* が、 $h^{1,1}(X) = h^{2,1}(X^*)$, $h^{2,1}(X) = h^{1,1}(X^*)$ の関係を満たすことを示した。ホッジ数に関するこの関係式を広い意味でミラー対称性と呼ぶこともある。ミラー対称性という言葉は、 X, X^* に関するホッジ図形 (2.1) が互いに鏡映の関係にあることに由来している。

蛇足：Batyrev は92年に小田忠雄先生を訪ねて東北大学に滞在していて、その滞在中に上のアイデアに至ったと小田先生からお聞きした。

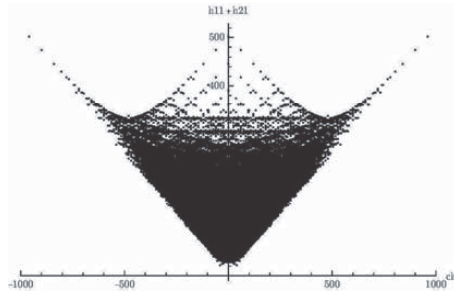


図1. Kreuzer, Skark によるホッジ数のプロット

Batyrev の構成によって、トーリック Fano 多様体の中で超曲面として実現されるカラビ・ヤウ多様体は、4次元の反射的な多面体の $(GL(4, \mathbb{Z}))$ の下での合同類の分類問題に読み換えられた。こうして問題は、コンピューターを駆使する組み合わせ問題となって、その後 Kreuzer, Skark[20] によってそのような合同類は、473,800,776 個存在することが示された。こうして、カラビ・ヤウ多様体が想像する以上に多数存在することが認識されるに至った。合同類のデータは一般に公開されているが、図1は Kreuzer-Skark に従って、それらをホッジ数を軸にとってプロットしている。500万個近くある反射的な多面体に対して、ホッジ数 $(h^{1,1}, h^{2,1})$ を決めてみると 30,108 個となっ

て非常に多くが同じホッジ数を持っている。これは、こうして得られるカラビ・ヤウ超曲面の多くが双有理であるためだと思われる。一応の問題として、

問題 2. 30,108 個の対 $(h^{1,1}, h^{2,1})$ の各々に対し、双有理である場合を除いていくつの微分同型類が存在するか？

と問うことが出来そうである。

2.2 弦理論からの背景

弦理論では、リッチ曲率が零となるケーラー計量 (カラビ・ヤウ計量) が理論の整合性から直接的に出てくるので簡単にまとめる。そこで、弦理論の定義らしいものを次のように与えることにする。 (Σ_g, h) を種数 g のリーマン面とその計量 h とする。また、 (X, G) を実 6 次元リーマン多様体として G をその計量として、 h, G, ϕ の汎関数 $S(h, G, \phi)$ (作用汎関数) を決める。重み $e^{-S(h, G, \phi)}$ を付けて考える C^∞ 写像 $\phi: \Sigma_g \rightarrow X$ 全体についての和 (経路積分)

$$Z_g^X = \sum_{\phi: \Sigma_g \rightarrow X} e^{-S(h, G, \phi)}$$

が弦理論の基本量で、これを種数 g の分配和と呼んでいる。弦理論は弦の散乱をファインマン図形で表し、それに対応する散乱振幅から量子論として物理量を導く理論形式である。ここで、分配和が定義されるための条件として、計量 G のリッチ曲率が零である、という必要条件が出てくる。また、超対称性を備える超弦理論では、6 次元多様体は (X, G, J) のように複素構造を持つことが要請され、さらに $N = 2$ 超対称性と呼ばれる対称性を要請することから (X, G, J) はケーラー多様体であることが導かれる。結果として、超弦理論から

(X, G, J) はリッチ曲率が零に等しい (コンパクト) ケーラー多様体

という制約がついて、カラビ・ヤウ多様体に至る。ここで、前節のカラビ・ヤウ多様体と上のようなケーラー計量の存在に関しては、有名な Yau の定理 [25] を用いる。

定理 2.3. X をカラビ・ヤウ多様体として、 $w \in H^{1,1}(X)$ をケーラー類とする。このとき、 $[\kappa_g] = w$ とするリッチ曲率が零に等しいケーラー計量が一意に定まる。

通常二重点 $xy - zw = 0$ を small resolution して得られる $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ の全空間の幾何学は非コンパクトなカラビ・ヤウ多様体となっている。この場合にはカラビ・ヤウ計量が具体的に求められている [5]。しかし、コンパクトなカラビ・ヤウ多様体でカラビ・ヤウ計量を具体的に書くことはとても難しいが一応問題に取り上げておきたい。

問題 3.*** カラビ・ヤウ計量を具体的に書き下せるような例を構成する。

楕円曲線やアーベル曲面によるファイバー構造を持ったカラビ・ヤウ多様体で、一般ファイバーの平坦計量を特異ファイバーに延ばす議論が役立つと思われる。

3 ミラー対称性 ***

3次元カラビ・ヤウ多様体を構成することから、次第に「カラビ・ヤウ多様体は対 (X, X^*) をなして現れる」という現象が観察されるようになり、ミラー対称性と呼ばれるようになった。この対称性を数学的に正確に記述するという問題は90年代以来の問題である。この節全体が、複素幾何学(きっとそれ以外の分野を含む数学)の「未解決問題」と言えるが、色々なアプローチが存在するので時系列を追ってまとめることにしたい。

3.1 A 構造と B 構造

カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性は、ホッジ数の間の関係 $(h^{1,1}(X), h^{2,1}(X)) = (h^{2,1}(X^*), h^{1,1}(X^*))$ に反映して現れるが、その背後にある幾何学はしばしばカラビ・ヤウ多様体の A 構造, B 構造と呼ばれている。X を 3次元カラビ・ヤウ多様体とする。

A 構造

X のケーラー形式を $\kappa \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ と表すと、ホッジ分解 $H^{p,q} = \oplus_{p,q} H^{p,q}$ の次数と両立する、べき零作用 $L_\kappa(-) = \kappa \wedge (-)$ が定まる。特に、 L_κ は部分空間 $H^{even} = \oplus_{i=0}^3 H^{i,i}(X, \mathbb{C})$ 上にべき零作用を定める。このとき

(A 構造) H^{even} とその上のべき零作用 L_κ の対 (H^{even}, L_κ) を X の A 構造という。

補足. (1) Hard Lefschetz の定理から、A 構 (H^{even}, L_κ) には L_κ と両立する直和分解 $H^{even} = \oplus_{i=0}^3 H^{i,i}(X, \mathbb{C})$ が備わっている。また、自然なケーラー形式は実形式なので、A 構造は $H_{\mathbb{R}}^{even} := H^{even} \cap H^*(X, \mathbb{R})$ 上で考えられる。さらに、 κ を整係数に取れば $H_{\mathbb{Q}}^{even}$ 上で考えることが出来る。(2) $H^*(X, \mathbb{C})$ にエルミート内積を入れて L_κ の共役演算を Λ_κ とするとき、 $\Lambda_\kappa w = 0$ となる (p, q) 形式を primitive 形式と呼んだ。ケーラー類を $\kappa_t = t_1^{\mathbb{R}} \kappa_1 + \dots + t_r^{\mathbb{R}} \kappa_r$ ($t_i^{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}_{>0}$) のように、ケーラー類 $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ の線形結合で表現するとき、これに対する primitive 形式は $t_i^{\mathbb{R}}$ と共に変化するが、Lefschetz 分解の形は変化しない。

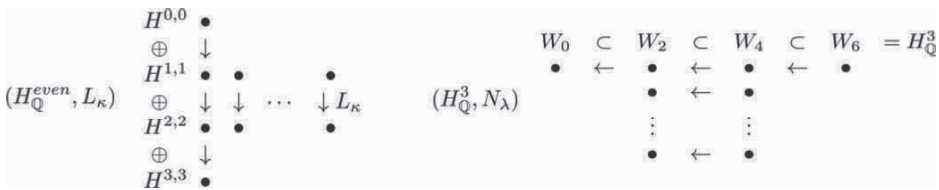


図 2. A 構造と B 構造

B 構造

多様体の族を考えて、A 構造に類似する構造を得ることが出来る。X の族を $\mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{M}_X$ を定めて、そのパラメーター空間 \mathcal{M}_X の ”よい” コンパクト化を行う。ここで、”よい” コンパクト化と

は、コンパクト化で付け加わる点集合が、いくつかの因子 D_i で表されるものである。例えば、代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^r$ をトーリック多様体でコンパクト化するとこのような状況が実現するが、このとき、族 $\pi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{M}_X$ に備わる局所系 $R^3\pi_*\mathbb{C}_{\mathfrak{X}}$ (または $R^3\pi_*\mathbb{Z}_{\mathfrak{X}}$) が境界因子に伸びることを要請する。すなわち、局所系 $R^3\pi_*\mathbb{C}_{\mathfrak{X}}$ を周期積分の満たす確定特異点型の微分方程式系で表すとき、この \mathcal{M}_X 上の微分方程式系が $\overline{\mathcal{M}}_X$ に境界因子 D_i に確定特異点をもって伸びることを要請する。

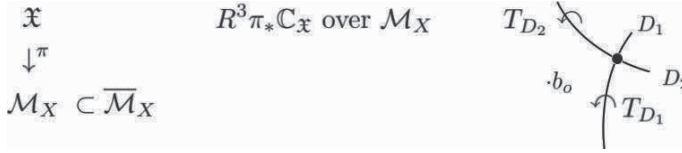


図 3. 族の退化から B 構造を読み取る

このようなコンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}_X$ を定めたときに、因子 $D_i (i = 1, \dots, r = \dim \mathcal{M}_X)$ の正規交叉として表される点 $o = D_1 \cap \dots \cap D_r$ に着目する。点 o の近くに基点 b_o を定め、各因子周りのモノドロミー T_{D_i} を $H^3(X_{b_o}, \mathbb{Z})$ に作用する整行列として表すとき、

$$(id - T_{D_1}), \dots, (id - T_{D_r}) \text{ の } H^3(X_{b_o}, \mathbb{Z}) \text{ 上の作用はすべてべき零}$$

という特別な境界点 $o = D_1 \cap \dots \cap D_r$ が存在を仮定する。このとき、 $\log T_{D_i}$ はすべてべき零となり $H^3(X_{b_o}, \mathbb{Q})$ の weight filtration を定める。

定理 3.1. (Cattani and Kaplan[7]) べき零行列 $N_\lambda = \sum_i \lambda_i \log T_{D_i} (\lambda_i > 0)$ が定める $H^3(X_{b_o}, \mathbb{Q})$ の weight filtration は $\lambda_i > 0$ に依らないで決まる (図 2 参照)。

以上のようなコンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}_X$ と境界点 o の存在を仮定して、

(B 構造) $H^3(X_{b_o}, \mathbb{Q})$ とべき零作用 N_λ の対 $(H^3(X_{b_o}, \mathbb{Q}), N_\lambda)$ を境界点 o の B 構造と呼ぶ。

3.2 ミラー対称性 ver 0

A 構造, B 構造を用いて、弱い形でミラー対称性を次のように述べる事が出来る :

ミラー対称性 ver 0. カラビ・ヤウ多様体 X に対して、別のカラビ・ヤウ多様体 X^* が存在して、 X の A 構造 $(H_{\mathbb{Q}}^{even}, L_\kappa)$ が定める $H_{\mathbb{Q}}^{even}$ の filtration と、 X^* の B 構造 $(H^3(X_{b_o}^*, \mathbb{Q}), N_\lambda)$ が定める $H_{\mathbb{Q}}^3$ の weight filtration が同型となる。A 構造と B 構造を入れ換えても同様な同型が成り立つ。

2 つの filtration が同型となるのは図 2 のようなときで、B 構造が定める weight filtration について $\dim_{\mathbb{C}} W_2/W_0$ は X^* の変形の次元 ($= h^{2,1}$) に一致するので、ホッジ数の関係 $(h^{1,1}(X), h^{2,1}(X)) = (h^{2,1}(X^*), h^{1,1}(X^*))$ が成り立つ。しかし、A 構造 $(H_{\mathbb{Q}}^{even}, L_\kappa)$ が定める $H_{\mathbb{Q}}^{even}$ の filtration は、 $h^{1,1}$ が等しい X, X' について同型となるので、非常に弱い形での対称性の記述になっている。

3.3 ミラー対称性 ver 1

$\overline{\mathcal{K}}_X$ を X のケーラー錐の閉包として, $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ ($r = h^{1,1}(X)$) を $\overline{\mathcal{K}} \cap H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ から取り, $\kappa_t = t_1^{\mathbb{R}} \kappa_1 + \dots + t_r^{\mathbb{R}} \kappa_r$ ($t_i^{\mathbb{R}} > 0$) が定める A 構造を $(H_{\mathbb{Q}}^{even}, L_{\kappa_t})$ と表す. 以下はミラー対称性 ver 0 を強い形で述べたものである.

ミラー対称性 ver 1. カラビ・ヤウ多様体 X に対して, カラビ・ヤウ多様体 X^* が存在して, ある $\kappa_1, \dots, \kappa_r \in \overline{\mathcal{K}}_X \cap H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ に対して定める X の A 構造 $(H_{\mathbb{Q}}^{even}, L_{\kappa_t})$ と, ある境界点 o で定める X^* の B 構造 $(H^3(X_{b_o}^*, \mathbb{Q}), N_{\lambda})$ が $t_i^{\mathbb{R}} = \lambda_i$ の下で (任意の $\lambda_i > 0$ に対して) 同型となる.

ここで, A 構造と B 構造が同型であると言うとき, filtration だけでなく 2 つのべき零作用 $L_{\kappa_t}, N_{\lambda}$ が共役であることを要請する. この意味で ver 0 より強い条件を課している.

X, X^* が上のミラー対称性 ver 1 の条件を満たすとすると, X^* の B 構造を定める N_{λ} のべき零作用は (${}^t N_{\lambda}$ によって) 双対空間 $H_3(X_{b_o}^*, \mathbb{Q})$ に filtration $\{W_{2i}\}$ に双対な filtration $S_0 \subset S_2 \subset S_4 \subset S_6$ を定める. これらの filtration は X^* が X のミラーなので, L_{κ_t} が定める filtration $F_0 \subset F_2 \subset F_4 \subset F_6$ ($F_{2i} = \bigoplus_{k=0}^i H^{3-i, 3-i}(X, \mathbb{R})$) に同型で, $S_0 \simeq F_0 = H^{3,3} \simeq \mathbb{R}$ が成り立っている. S_0 の基底は不変サイクルであるが, これを $\alpha_0 \in H^3(X_{b_o}^*, \mathbb{Z})$ に取る. α_0 に整基底を加えて $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ が S_2 の基底になるように拡張して, 対応する周期積分を

$$w_I(x) = \int_{\alpha_I} \Omega(X_x^*) \quad (I = 0, 1, \dots, r)$$

と定める. ここで, $x = (x_1, \dots, x_r)$ は $o \in \overline{\mathcal{M}}_{X^*}$ を原点とする局所座標で, $\Omega(X_x^*)$ は x のファイバー X_x^* の正則 3 形式とする. 不変サイクル S_0 に対応する周期積分 $w_0(x)$ は正則関数である. 一方で, それ以外の周期積分は ${}^t N_{\lambda} S_2 = S_0$ が成り立つので

$$w_i(x) = w_0(x) \log x_i + C_i w_0(x) + (x \text{ の級数}) \quad (i = 1, \dots, r) \quad (3.1)$$

のように局所的に表されることになる. ここで, C_i は未知の定数を表す.

定義 3.2. 周期積分 (3.1) が定める比

$$t_i = \frac{1}{2\pi i} \frac{w_i(x)}{w_0(x)} = \frac{1}{2\pi i} \log x_i + C_i + (x \text{ の級数}) \quad (3.2)$$

をミラー写像という. また, (3.2) を x_i について解き返して得られる関係 $x_i = x_i(q_1, \dots, q_r)$ ($q_i = e^{2\pi\sqrt{-1}(t_i - C_i)}$) をミラー写像とも言う.

変形理論から $\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \Omega(X_x^*) \in H^{0,3}(X_x)$ が導かれるので, 積分

$$C_{ijk} = - \int_{X^*} \Omega(X_x^*) \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \Omega(X_x^*) \quad (3.3)$$

が考えられて、これを Griffiths-Yukawa 結合と呼ぶ。 C_{ijk} とミラー写像 (3.2) を用いて定める

$$Y_{abc}(t) = \frac{K}{w_0(x(q))^2} \sum_{i,j,k} C_{ijk}(x(q)) \frac{\partial x_i(q)}{\partial t_a} \frac{\partial x_j(q)}{\partial t_b} \frac{\partial x_k(q)}{\partial t_c}$$

を量子 Yukawa 結合と呼んでいる。ここで、 K は未知定数とする。

X と X^* がミラー対称 (ver 1) のとき、2つのべき零行列 L_{κ_t} と N_λ が $t_i^{\frac{R}{\kappa_i}} = \lambda_i$ のもとで同型となるので、以下のように、 $\kappa_1, \dots, \kappa_r \in \overline{\mathcal{K}}_X \cap H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ の各元とモノドロミー行列 T_{D_i} の対応、さらに境界因子との対応関係が付けられる；

$$\kappa_i \longleftrightarrow \log T_{D_i} \longleftrightarrow D_i = \{x_i = 0\}.$$

この対応関係から、ミラー写像の変数 t_i (3.2) と κ_i を対応させて次の発見に至る。発見は 92 年に Candelas et al [6] によって行われたもので、その後の研究の強い動機付けとなっている。

発見. 未知変数 C_1, \dots, C_r, K を上手く取ると X^* の量子 Yukawa 結合は、 X の (種数 0 の) Gromov-Witten 不変量 $N_0(\beta)$ ($\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$) を係数として以下のように展開される：

$$Y_{abc}(t) = \int_X \kappa_a \kappa_b \kappa_c + \sum_{0 \neq \beta} (\beta, \kappa_a)(\beta, \kappa_b)(\beta, \kappa_c) N_0(\beta) q^{(\kappa_t, \beta)}$$

上の発見は Gromov-Witten 不変量の定義が出来上がる前になされたもので、この発見の後に Kontsevich によって導入された安定写像のモジュライ空間 $\mathcal{M}_g(X, \beta)$ を用いて正確な定義が出来上がっている。今では安定写像を用いて広く複素多様体の量子コホモロジーが定義されて、その積構造と共に Gromov-Witten 不変量を理解している。3次元カラビ・ヤウ多様体の場合 $H^{even}(X)$ は $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ で生成されるので $\kappa_a * \kappa_b * \kappa_c = Y_{abc}(t)$ と定めて $H^{even}(X)$ の積構造の変形が決まり、これが量子コホモロジー $QH^{even}(X)$ の積構造に一致する、というのが上の発見と言える。

問題 4. **.* 3次元カラビ・ヤウ多様体 X に対して、ミラー対称 (ver 1) な族を $\mathfrak{X}^* \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{X^*}$ とする。境界点 $o \in \overline{\mathcal{M}}_{X^*}$ で $Y_{abc}(t)$ が定める変形は、量子コホモロジー $QH^{even}(X)$ に一致するか？

X をトーリック多様体の中で超曲面や完全交叉で与えるとき、Batyrev の構成法を用いれば X^* の構成は多面体の組み合わせ論で実行することが出来て、さらにモジュライ空間 $\overline{\mathcal{M}}_{X^*}$ (と境界点 o) の記述も二次扇を基礎にしてトーリック多様体を用いて与えることが出来る [16]。この場合、周期積分と量子コホモロジーの I -関数の理論とが結びついて上の問題は解決している [12, 21]。しかし、一般にはどのように I -関数の理論と結びつくか不明なので問題として取り上げた。

93 年になると Bershadski-Cecotti-Ooguri-Vafa (BCOV) によって、上の発見は高次の種数への一般化がなされた。 \mathcal{M}_{X^*} 上の Weil-Petersson 計量が定めるケーラー幾何学を物理的に解釈したもので、発表から 30 年近くになるが種数 1 の場合を除いて未だに不明な点が多い。種数 1 に関しては \mathcal{M}_{X^*} 上の analytic torsion としての解釈が進んでいるようである [26]。 X が \mathbb{P}^4 の超曲面の場合に種数 $g \geq 2$ に関しても計算の正当化がなされている [8] が、この場合の特殊性に依存する部分が多いように思われる。

3.4 ミラー対称性 ver 2

前小節では, $H_3(X_{b_0}^*, \mathbb{Q})$ に構成する filtration $S_0 \subset S_2 \subset S_4 \subset S_6$ をもとに, 不変サイクル $\alpha_0 \in S_0$ から始めて S_2 の整基底 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ を構成し, それらの周期積分からミラー写像が構成された. ポアンカレ双対写像を $PD: H_3 \xrightarrow{\sim} H^3$ と表すとき, $S_{2i} = PD^{-1}(W_{2i})$ が成り立ち, 交点数に関して

$$(S_2, S_2) = \langle S_2, PD(S_2) \rangle = \langle S_2, W_2 \rangle = \langle S_2, N_\lambda^2 W_6 \rangle = \langle {}^t N_\lambda^2 S_2, W_6 \rangle = 0$$

となるので, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ は反対称形式 $(*, *): H_3(X_{b_0}^*, \mathbb{Z}) \times H_3(X_{b_0}^*, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ の等方部分加群を生成する. この形式は unimodular であるので, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ は $(\alpha_I, \beta_J) = \delta_{IJ}$ ($0 \leq I, J \leq r$) を満たす β_J と共に $H_3(X_{b_0}^*, \mathbb{Z})$ のシンプレクティック整基底 $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_r, \dots, \beta_1, \beta_0\}$ に拡張する.

ミラー対称な A 構造 $(H^{even}(X, \mathbb{Q}), L_{\kappa_t})$ に, 上のシンプレクティック基底に対応する整構造とそのシンプレクティック構造を探ることが出来る. そのために X 上の連接層が定める Grothendieck 群を $K(X)$ を考える. $K(X)$ には \mathbb{Z} 加群の構造があり, さらにカラビ・ヤウ条件から標準束について $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ であるので $\chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \dim Ext^i(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が反対称形式を定める. 層の Chern character をとる写像 $ch: K(X) \rightarrow H^{even}(X, \mathbb{Q})$ があるので, B 構造のシンプレクティック整基底 $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_r, \dots, \beta_1, \beta_0\}$ の対応物を $H^{even}(X)$ の上にある $K(X)$ に求めることは自然である.

予想 1. X, X^* がミラー対称性 ver 1 の意味でミラー対称であるとき, A 構造の上にある整構造 $(K(X), \chi(\cdot, \cdot))$ と B 構造の上にある整構造 $(H_3(X_{b_0}, \mathbb{Z}), (\cdot, \cdot))$ は同型である.

次節のミラー対称性 (ver 3) を考えると, 上の同型には canonical に決まるものがあり, その下で 2 つのサイクル α_0, β_0 はそれぞれ, 点 $p \in X$ にサポートを持つ摩天楼層 \mathcal{O}_p と構造層 \mathcal{O}_X に対応すると考えられている.

トーリック多様体の中で, 超曲面や完全交叉として構成するカラビ・ヤウ多様体の場合, 90 年代にミラー対称性 ver 1 の検証が系統的に進んだ. この場合, 周期積分は Gel'fand, Kapranov, Zelevinski (GKZ)[11] による超幾何級数で表されて, 上の予想は超幾何級数を用いて「中心荷電 (central charge) の整基底に関する予想」(「中心荷電予想」と言うのが良いかも知れない) という形で簡明に表される [14, 15].

問題 5. $\dagger^{**,*}$ 中心荷電の整基底に関する予想が正しいことを示す.

文献 [15] で提案されているように, 局所ミラー対称性と呼ばれる非コンパクトなカラビ・ヤウ多様体に限るなど, 何らかの条件の範囲で予想を議論すれば問題の難易度は下がるように思われる. また, 後にこの予想は Fano 多様体の量子コホモロジーに拡張した形で述べられて「 Γ 類予想」とも呼ばれている [10].

3.5 ミラー対称性 ver 3

90年代半ばから2000年にかけてミラー対称性の理解が深まり、ミラー対称性を現象から捉えるミラー対称性 ver 1 に対して、対称性を取める理論的枠組みの提唱がなされた。大きく分けて3つが提唱されているので、簡単に整理する。

ホモロジー論的(カテゴリー論的)ミラー対称性: Kontsevich が94年のICM講演で発表したもので、カラビ・ヤウ多様体 X の A 構造に対しては X 上の接続層のなす導来圏 $D^b(X)$ を考えて、一方で B 構造に対しては X のケーラー形式をシンプレクティック形式と見て、それに関するラグランジュ部分多様体から構成する導来深谷圏 $D^\pi Fuk(X, \kappa)$ を考える。このとき、カラビ・ヤウ多様体 X に対して、別のカラビ・ヤウ多様体 X^* が存在して、圏同値

$$D^b(X) \simeq D^\pi Fuk(X^*, \kappa_{X^*}), \quad D^\pi Fuk(X, \kappa_X) \simeq D^b(X^*) \quad (3.4)$$

が成り立つ、と述べられる。

圏同値 $D^b(X) \simeq D^\pi Fuk(X^*, \kappa_{X^*})$ が成り立っているとき両者の対象の間に対応があるが、 $D^b(X)$ の対象 \mathcal{E}^\bullet に対しては $\sum (-1)^i [\mathcal{E}^i] \in K(X)$ を対応させて、一方で右辺の深谷圏の対象に対してはラグランジアンサイクルのホモロジー類を対応させると、 $K(X)$ と $H_3(X^*, \mathbb{Z})$ の同型が得られる。小節3.4の予想1は、この同型に他ならない。さらに、超幾何級数で表された「中心荷電予想」はこの同型に canonical な同型対応があつて、その対応が ver 1 の境界点 $o \in \overline{\mathcal{M}}_{X^*}$ 近傍の周期積分に現れることを主張するものである。

Strominger-Yau-Zaslow (SYZ) ミラー対称性: 98年にSYZは境界点 $o \in \overline{\mathcal{M}}_{X^*}$ 上に現れる特異なカラビ・ヤウ多様体の様子から、境界点 o の近傍では(あるいは一般の位置においても)カラビ・ヤウ多様体 X^* は S^3 上の T^3 ファイブレーションの構造を持つことを予想した。 X^* のケーラー形式 κ_{X^*} をシンプレクティック形式と見て、 S^3, T^3 は共にラグランジュ部分多様体であり、さらに X^* の複素構造を用いて定義する特殊ラグランジュ部分多様体であることを要請すると、このようなファイブレーションは幾何学的に一意に決まると思われていて、SYZ torus ファイブレーションと呼ばれている。カラビ・ヤウ多様体 X^* をこのようなファイブレーションで表すとき、ファイバーの T^3 を dual torus $(T^3)^\vee$ で置き換えて(特異ファイバーの扱いも上手く処理をして多様体を得た後)、 $S^3, (T^3)^\vee$ を特殊ラグランジュ部分多様体とするようなシンプレクティック構造と複素構造を入れたものが、ミラーカラビ・ヤウ多様体 X を与える、と予想されている。

SYZ ミラー対称性は、カラビ・ヤウ多様体 X が与えられたとき幾何学的に X^* が構成されるので幾何学的ミラー対称性とも呼ばれている。しかし、特殊ラグランジュ部分多様体による torus ファイブレーションの構成という難しい問題を含んでいて、コンパクトなカラビ・ヤウ多様体でこのSYZによるプログラムが実行された例はまだ知られていない(と思う)。ミラー対称性 ver 2 では、 B 構造のシンプレクティック整基底 $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_r, \dots, \beta_1, \beta_0\}$ の対応物が $K(X)$ に存在することが観察されたが、各サイクルを $(T^3)^\vee$ ファイブレーションに変換(実 Fourier・向井変換または T -dual 変換)すると、対応する $K(X)$ の元を表す代数的なサイクルが得られると予想さ

れる．実際， X^* の torus ファイブレーションを仮定するとき，ファイバー $T^3 \subset X^*$ を T -dual 変換すると点 $p \in X$ となり， $S^3 \subset X^*$ を (零切断と置いて) 変換すると $X \subset X$ となることが議論される．それぞれを，接続層として $\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_X$ と表したものが，小節 3.4 での $\alpha_0 = T^3, \beta_0 = S^3$ と $\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_X$ の対応である．他のサイクルの T -dual 変換の大まかな予想は付けられるが，正確な記述はよく分かっていない (少なくとも筆者は知らない)．

Gross-Siebert プログラム：Gross, Siebert は境界点 $o \in \overline{\mathcal{M}}_{X^*}$ 上に現れる特異なカラビ・ヤウ多様体を多様体のトーリック多様体への退化として記述する． X_x^* は $x \rightarrow o$ のとき $\deg(X^*)$ 個の \mathbb{P}^3 の和として表されるトーリック多様体へ退化するが，それは位相的には S^3 上の T^3 ファイブレーションの構造を持つ．特異ファイバーの周りのモノドロミーのデータを与えて，トーリック退化から X^* のシンプレクティック構造と複素構造を復元するのが Gross-Siebert プログラムである [13]．このとき，双対なトーリック退化とモノドロミーのデータが自然に決まり，それを用いてプログラムを実行すればミラー多様体 X が得られる，というアイデアである．SYZ ミラー対称性が特殊ラグランジアン部分多様体の構成と言う難しい問題を含む所を，変形理論で回避している．しかし，シンプレクティック構造の復元は比較的易しく行われるが，複素構造の復元は具体的に環構造を入れることによって実現することになり，ここで scattering と呼ばれる無限の操作が入って，存在定理にとどまってしまうようである．

ミラー対称性 ver 3 に幾何学の問題が多数存在することは間違いないが，筆者の守備範囲から遠い位置にあるので，以上の概略に止めることにする．

4 周期積分と周期領域

ミラー対称性 ver 0,1,2 はカラビ・ヤウ多様体の族を用いて記述されるため，必然的に周期領域の理論と深く関わっている．さらに，高次種数の Gromov-Witten 不変量の計算処方を与える BCOV 理論 [3] は，周期領域上の Weil-Petersson 計量の幾何学を出発点にしている．複素 1, 2 次元の場合，これらは上半平面あるいは IV 型対称領域のケーラー幾何学の枠組みで捉えられるが，複素 3 次元の場合には局所理論にとどまっていて大局的な様子は殆ど分かっていない．複素 2 次元と 3 次元を対比して問題の整理を試みる．

4.1 周期写像とホッジ構造の変形 (d=1,2)

●周期写像：楕円曲線または K3 曲面の族 $\pi: \mathfrak{X}^* \rightarrow \mathcal{M}_{X^*}$ を構成したとする．このとき， \mathcal{M}_{X^*} 上の局所定数層 $R^d \pi_* \mathbb{C}_{\mathfrak{X}^*}$ を，各点 m 上のファイバーを $H^d(X_m^*, \mathbb{C})$ とするベクトル束とその平坦接続 (Gauss-Manin 接続) の対と考える．基点 b_o を一般の位置に定め，その上のファイバーを $H^d(X_o^*, \mathbb{C})$ とするとき周期積分が

$$\mathcal{P}: \mathcal{M}_{X^*} \rightarrow \mathbb{P}(H^d(X_o^*, \mathbb{C})), \quad m \mapsto \left[\int_{\alpha_1} \Omega(X_m^*), \dots, \int_{\alpha_s} \Omega(X_m^*) \right] =: w$$

として定められる. ここで, $\Omega(X_m^*)$ を族 X_m^* の正則 d 形式として $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in H_d(X_o^*, \mathbb{Z})$ ($s = \dim H^d(X_o^*, \mathbb{C})$) は整サイクルにとる. 各サイクルのポアンカレ双対 $PD(\alpha_i) \in H^d(X_o^*, \mathbb{C})$ を用いて $w = \sum (\int_{\alpha_i} \Omega(X_m^*)) PD(\alpha_i)$ と表すと, 周期写像の像は周期領域

$$D := \{w \in \mathbb{P}(H^d(X_o^*, \mathbb{C})) \mid (w, w) = 0, (\overline{w}, w) > 0\}$$

に含まれることが分かる (射影化の記号 $[x]$ は適宜外して理解する). 周期領域は 2 つの連結成分からなり, 像はそのどちらか (D^+) に含まれることになる. $d = 1$ のとき, D^+ は上半平面である.

K3 曲面のミラー対称性では, X_m^* の代数的サイクルがなす格子 $Pic(X_m^*) = H^{1,1}(X_m^*) \cap H^2(X_m^*, \mathbb{Z})$ が $Pic(X_o^*)$ を含むような族 \mathfrak{X}^* を考える. より正確に Gauss-Manin 接続を用いて両者を比較するとき, どの経路をとっても $Pic(X_o^*) \subset Pic(X_m^*)$ が成り立つことを要請する. $M \simeq Pic(X_o^*)$ を抽象格子として, このような K3 曲面の族を M 偏極 K3 曲面の族と呼ぶ. M 偏極 K3 曲面は, K3 曲面のミラー対称性を考えるときにミラー族として現れる [9]. 代数的サイクル α に対して $\int_{\alpha_i} \Omega(X_m^*) = 0$ が成り立つので, このような族に対する周期写像の像は, 超越格子 $T_{X_o^*} := (Pic(X_o^*))^\perp$ が定める周期領域

$$D(T_{X_o^*}) = \{w \in \mathbb{P}(T_{X_o^*} \otimes \mathbb{C}) \mid (w, w) = 0, (\overline{w}, w) > 0\} \simeq SO(2, 20 - r) / (S(O(2) \times O(20 - r))) \tag{4.1}$$

の連結成分に含まれることになる. ここで, $r = \text{rank } Pic(X_o^*)$ として, 超越格子の符号数を $(2, 20 - r)$ と表した.

● ホッジ構造の変形: 族 $\pi : \mathfrak{X}^* \rightarrow \mathcal{M}_{X_o^*}$ の各点に対して filtration を

$$F_m^d \subset F_m^{d-1} \subset \dots \subset F_m^0 \quad (F_m^i := \oplus_{p \geq i} H^{p, d-p}(X_m^*))$$

によって定めると, これが $\mathcal{M}_{X_o^*}$ 上の正則ベクトル束の列を定める. 平坦接続を用いて $H^d(X_m, \mathbb{C})$ の filtration を $H^d(X_o^*, \mathbb{C})$ の中に表現し. これを旗多様体 Fl の点 $[F_m^d, F_m^{d-1}, \dots, F_m^0]$ と思うと, $\mathcal{M}_{X_o^*}$ から旗多様体への写像となる. $d = 1$ の場合, 旗多様体は $Fl = Fl(1, 2)$ となって周期写像と同じになる. $d = 2$ の場合, $Fl(1, 21 - r, 22 - r)$ であるが, $F^2 = \mathbb{C}P(m)$ かつ $(F^2)^\perp = F^1$ が成り立つのでやはり周期写像が分かれば旗多様体への写像も決まる. 従って, $d = 1, 2$ の場合, 周期写像はホッジ分解 $H^{p,q}(X_m^*) = F_m^p \cap \overline{F_m^q}$ を決め, X_o^* の複素構造の変形を表す. さらに, $d = 1, 2$ については周期写像の全射性, Global Torelli の定理など大局的な性質もあって, 周期積分に関してさらに詳細な性質を問題にすることが可能である.

4.2 周期写像とホッジ構造の変形 (d=3)

ホッジ数が $h^{1,1}(X) = r, h^{2,1}(X) = s$ である 3 次元カラビ・ヤウ多様体のミラー族 $\mathfrak{X}^* \rightarrow \mathcal{M}_{X_o^*}$ についても, 前小節と同様に周期写像を定める ($\dim H^3(X_o^*, \mathbb{C}) = 2r + 2$). しかし $d = 3$ の場合, 周期写像とホッジ構造の変形は $F^3 = \mathbb{C}P(m)$ と $(F^3)^\perp = F^1$ によって関係が付けられるが, F^2 が決まらない. そこで, 正則 3 形式 $\Omega(X_m)$ のパラメーターに関する微分 $\partial_{m_k} \Omega(X_m^*)$ が F_2/F_1 を生成する (Griffiths transversality) を仮定して, 周期積分を拡張した Griffiths 周期写像 $P_{Gr} : \mathcal{M}_{X_o^*} \rightarrow Fl(1, r, H^3(X_o^*, \mathbb{C}))$ を

$$m \mapsto F_m := \left(\begin{array}{ccc} \int_{\alpha_0} \Omega(X_m^*) & \cdots & \int_{\alpha_{2r+1}} \Omega(X_m^*) \\ \int_{\alpha_0} \partial_{m_1} \Omega(X_m^*) & \cdots & \int_{\alpha_{2r+1}} \partial_{m_1} \Omega(X_m^*) \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\alpha_0} \partial_{m_r} \Omega(X_m^*) & \cdots & \int_{\alpha_{2r+1}} \partial_{m_r} \Omega(X_m^*) \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} H^{3,0}(X_m^*) \\ \\ \\ H^{2,1}(X_m^*) \end{array}$$

によって定める. ここで, F_m の第 1 行は $\alpha_0, \dots, \alpha_{2r+1} \in H^3(X_o, \mathbb{Z})$ の整基底に関する周期積分で F_m^3 を生成する 1 つのベクトルを表し, $r+1$ 個の全体の行が F_m^2 を生成する.

Griffiths 周期写像の像に関して, $F_m^2 \oplus \overline{F_m^2} = H^3(X_m, \mathbb{C})$ から定める同型 $F_m^2 \simeq H^3(X_m, \mathbb{R})$ の下で, F_m^2 に $Sp(2(r+2), \mathbb{R})$ の作用を考えて $F_m^3 \subset F_m^2$ の固定化群を考慮すると

$$\text{Im } \mathcal{P}_{Gr} \subset Sp(2(r+1), \mathbb{R}). F_m^2 \simeq Sp(2(r+1), \mathbb{R}) / (U(1) \times U(r))$$

であることが分かる. ここに K3 曲面のときの (4.1) 式への類似が見られるが, カラビ・ヤウ多様体の変形パラメータの空間の次元が $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{X^*} = 2r$ であるのに対して, $\dim_{\mathbb{R}} Sp(2(r+1), \mathbb{R}) / (U(1) \times U(r)) = r^2 + 5r + 2$ と計算されるので, $\text{Im } \mathcal{P}_{Gr}$ の余次元は高く, 周期写像の全射性からは程遠い. 全射性は諦めたとしても, そもそも周期写像の像が良い (正則) 部分多様体になっているのかも良く分からない.

問題 6.*** Griffiths 周期写像 \mathcal{P}_{Gr} の像を決定する, または, 具体的に決定できる 3 次元カラビ・ヤウ多様体の例を構築する.

5 具体例からのアプローチ

前節で対比したように, 高次元カラビ・ヤウ多様体については, 周期領域の理論が良く分かっていなくて $d=1, 2$ の場合に比べてかなり状況は複雑になっている. しかし, 正にそこに Gromov-Witten 理論への応用 (ミラー対称性 ver 1) を始め「深い数理現象」が潜んでいると言える. このような数理現象を調べる手法として, 理論的背景をよく反映している具体例を見つけ出すことは有効であると思われる.

5.1 ミラー族 $\mathfrak{X}^* \rightarrow \mathcal{M}_{X^*}$ を大局的に調べること

$d=1, 2$ の場合に見られる周期領域は, どんな族 $\mathfrak{X}^* \rightarrow \mathcal{M}_{X^*}$ についても周期写像を介して, 周期領域上の族として扱うことを可能にする. これは, 楕円曲線, K3 曲面の可微分同型類が 1 つであることに由来しており, 3 次元の場合そのような周期領域が存在するのかどうか良く分からない. そこで, 個々のミラー族 $\mathfrak{X}^* \rightarrow \mathcal{M}_{X^*}$ を \mathcal{M}_{X^*} 上で大局的に調べることは意味のあることと思われる. 実際, ミラー対称性の視点から次のような観察をすることが出来る.

観察. カラビ・ヤウ多様体 X がいくつかの双有理モデル, または (双有理ではないが, 導来同値な) フーリエ・向井対 X_1, \dots, X_m を持つとする. このとき X のミラー族 $\mathfrak{X}^* \rightarrow \mathcal{M}_{X^*}$ を構成し, パラメータ空間の”良い”コンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}_{X^*}$ を構成すると, X にミラー対称な境界点 o_X の以外に X_1, \dots, X_m にミラー対称な境界点 o_{X_1}, \dots, o_{X_m} がすべて現れる.

X が双有理モデルを持つようなカラビ・ヤウ多様体の例は、トーリック多様体の中で超曲面や完全交叉として構成する X に多数見られる。一方でフーリエ・向井対を持つような X は限られ、射影双対など古典的な射影幾何と深く関係する例 [4, 17] で観察することが出来て、そのようなカラビ・ヤウ多様体を構成すること自体興味深い。上の観察に関連して以下の2つの問題が上げられる。

問題 7.*** 上の観察はどれ程一般性を持って成り立つか。特に、フーリエ・向井対を持つ具体的な例を多数構成して調べる。

問題 8.*** X とそのフーリエ・向井対の幾何学を、幾何学的なミラー対称性 (ver 3) と合わせて記述する。

5.2 アーベル曲面をファイバーとするカラビ・ヤウ多様体の例

前小節の観察の具体例として、アーベル曲面をファイバーとするカラビ・ヤウ多様体の例について、詳細な結果が得られている [18]。ミラー対称性 ver 0~ver 3 を実現する具体的な例として、さらに深く調べることが出来ると思われる。講演では、モジュライ空間の大局的な記述とミラー対称性 (ver1) の具体的な計算結果について紹介して、そこに派生する問題を文献 [18] に基づいて取り上げたが、ここでは割愛する。

6 おわりに

「カラビ・ヤウ多様体の問題」というタイトルであるが、結果として「ミラー対称性の問題」となってしまった。さらに、ミラー対称性を理解すること自体が問題であるという現状報告となってしまったが、まとめとして

問題 9.*** 3次元カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性を、カラビ・ヤウ多様体の変形空間の大局的な記述と共に理解する。

という問題にまとめて置きたい。 $d = 1, 2$ に存在する周期領域の理論に対応するものは $d = 3$ では何か、と問う問題と言って良いと思われる。もちろん、筆者は個別に具体例の構築する以外に良い手立てを知らないで、星3つとした。

講演終了後に、以下の指摘を受けた：(1) 3次元カラビ・ヤウ多様体の変形空間 $\overline{\mathcal{M}}_{X^*}$ は、多様体が退化する境界点で、特異点解消を通して別のカラビ・ヤウ多様体 Y の変形空間 $\overline{\mathcal{M}}_Y$ につながる (この場合 $\dim \mathcal{M}_Y < \dim \mathcal{M}_{X^*}$)、または、(2) 逆に X^* の縮小 (contraction) として得られる特異なカラビ・ヤウ多様体の smoothing を通して別のカラビ・ヤウ多様体の変形空間 $\overline{\mathcal{M}}_Z (\dim \mathcal{M}_Z > \dim \mathcal{M}_{X^*})$ につながる、これらの操作 (1),(2) によって、カラビ・ヤウ多様体の変形空間はすべて連結につながっているだろう (Ried's fantasy) という期待がある ([22] 参照)。問題 9 は、この fantasy の中で、ミラー対称性を捉えることと言える。

参考文献

- [1] V. Batyrev, *Birational Calabi-Yau n -folds have equal Betti numbers*, New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., 264, 1–11.
- [2] V. Batyrev and L. Borisov, *On Calabi-Yau Complete Intersections in Toric Varieties*, Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994), 39–65, de Gruyter, Berlin, 1996.
- [3] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Comm. Math. Phys. 165 (1994), no. 2, 311–427.
- [4] L. Borisov and A. Caldararu, *The Pfaffian-Grassmannian derived equivalence*, J. Algebraic Geom. 18 (2009), no. 2, 201–222.
- [5] P. Candelas and X.C. de la Ossa, *Comments on conifolds*, Nuclear Phys. B 342 (1990), no. 1, 246–268.
- [6] P. Candelas, X.C. de la Ossa, P.S. Green and L.Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl.Phys. B356(1991), 21–74.
- [7] E. Cattani and A. Kaplan, *Polarized mixed Hodge structures and the local monodromy of a variation of Hodge structure*, Invent. Math. 67 (1982), no. 1, 101–115.
- [8] H-L. Chang, S. Guo and Jun Li, *Polynomial structure of GromovWitten potential of quintic 3-folds*. Ann. of Math. (2) 194 (2021), no. 3, 585–645.
- [9] I.V. Dolgachev, *Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces*, Algebraic geometry, 4. J. Math. Sci. 81 (1996) 2599–2630.
- [10] S. Galkin, V. Golyshev and H. Iritani, *Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: gamma conjectures*, Duke Math. J. 165 (2016), no. 11, 2005–2077.
- [11] I.M. Gel’fand, A. V. Zelevinski, and M.M. Kapranov, *Equations of hypergeometric type and toric varieties*, Funktsional Anal. i. Prilozhen. 23 (1989), 12–26; English transl. Functional Anal. Appl. 23(1989), 94–106.
- [12] A. Givental, *Equivariant Fromov-Witten invariants*, International Math. Res. Notice 13(1996)43–96.
- [13] M. Gross and B. Siebert, *Mirror symmetry via logarithmic degeneration data I*, Journal of Differential Geometry, 72(2):169–338, 2006.
- [14] S. Hosono, *Local Mirror Symmetry and Type IIA Monodromy of Calabi-Yau Manifolds*, Adv. Theor. Math. Phys. 4 (2000), 335–376.
- [15] S. Hosono, *Central charges, symplectic forms, and hypergeometric series in local mirror symmetry*, in “Mirror Symmetry V”, S.-T.Yau, N. Yui and J. Lewis (eds), IP/AMS (2006), 405–439.
- [16] S. Hosono, B.H. Lian, and S.-T. Yau, *GKZ-Generalized hypergeometric systems in mirror*

- symmetry of Calabi-Yau hypersurfaces*, Commun. Math. Phys. 182 (1996) 535–577.
- [17] S. Hosono and H. Takagi, *Double quintic symmetroids, Reye congruences, and their derived equivalence*, J. Differential Geom. 104 (2016), no. 3, 443–497.
- [18] S. Hosono and H. Takagi, *Mirror symmetry of Calabi-Yau manifolds fibered by (1,8)-polarized abelian surfaces*, arXiv:2103.08150.
- [19] M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994) Birkhäuser (1995) pp. 120–139.
- [20] M. Kreuzer and H. Skarke, *Complete classification of reflexive polyhedra in four dimensions*, Adv. Theor. Math. Phys. 4 (2000), no. 6, 1209–1230.
- [21] B. Lian, K. Liu and S.-T. Yau, *Mirror principle I*, Asian J. Math 1 (1997) 729–763.
- [22] 並河良典, 「カラビ・ヤウ多様体の問題」RIMS 講究録 vol.1731(2011)127–136.
- [23] A. Strominger, S.-T. Yau and E. Zaslow, *Mirror symmetry is T-Duality*, Nucl. Phys. B479 (1996) 243–259.
- [24] C.T.C. Wall, *Classification problems in differential topology. V. On certain 6-manifolds*, Invent. Math. 1 (1966), 355–374; corrigendum, ibid. 2 (1966), 306.
- [25] S.-T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I*, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), no. 3, 339–411.
- [26] 吉川謙一, 「3次元 CALABI-YAU 多様体のモジュライに関する問題」RIMS 講究録 vol.1731(2011)151–161.