代数多様体の有理性の問題

佐賀大学　岡田拓三 *
Takuzo Okada
Saga University

1　代数多様体の有理性問題

代数多様体は, 射影空間と双有理同値になるときに**有理的**であるという. 代数多様体の有理性に関する問題をいくつか提示したい. 本項では明示的に断らない限り基礎体は複素数体とする.

「単有理的な代数曲線は有理的である」という Lüroth の定理は, Castelnuovo により曲面の場合に拡張され, 「単有理的な代数曲面は有理的である」ことが示された. 更なる高次元への拡張可能性を問う Lüroth 問題の成否は, 少なからぬ研究者を惹きつけ, 有理性に関する研究を牽引してきた.

Lüroth 問題. 単有理的な代数多様体は有理的か.

この Lüroth 問題自体は 1970 年台初頭に反例の存在が知られており, 有理性に関する研究は現在では更に詳細なものが展開されている. その重要性に鑑み, それらの反例を構成手法とともに簡略に紹介する.

■3 次整係数コホモロジーの捩れ部分（Artin–Mumford）　Artin–Mumford [2] は, 3 次整係数コホモロジー群の捩れ部分が非特異射影多様体の間の双有理不変量であること, 及び非特異有理多様体に対してその捩れ部分が消滅することを示した. さらに, 単有理的な 3 次元非特異多様体 X_{AM} で $\mathrm{Tors}\, H^3(X_{\mathrm{AM}}, \mathbb{Z}) \neq 0$ となるものを構成し, Lüroth 問題の反例を与えた. X_{AM} は, （特定の位置にある）10 点で通常 2 重点をもつ 4 次超曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ で分岐する $\mathbb{P}^3$ の 2 重被覆 $V \to \mathbb{P}^3$ を, その 10 点の特異点で爆発して得られる多様体である.

■中間 Jacobi 多様体（Clemens–Griffiths）　Clemens–Griffiths [5] は, 非特異 3 次元 3 次超曲面 $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ の中間 Jacobi 多様体 $J(X) = H^{1,2}(X)/H^3(X, \mathbb{Z})$ が, 曲線の Jacobi 多様体の直和と同型にならないことを示すことにより, X の非有理性を示した.

* email: okada@cc.saga-u.ac.jp

任意次元の非特異 3 次超曲面は単有理的である（[20]）ため, これも Lüroth 問題の反例を与える.

■**自己双有理写像群（Iskovskikh–Manin）** Iskovskikh–Manin [14] は, 双有理不変量である自己双有理写像群に着目した. 非特異 3 次元 4 次超曲面 $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ の自己双有理写像群が自己同型群と一致し有限群となることを示し, X_4 の非有理性を導いた. 一部の非特異 3 次元 4 次超曲面が単有理的であることが知られていたため, これも Lüroth 問題の反例を与える. この議論は後に双有理（超）剛性の理論へと発展していった（第 5 節参照）.

上記 3 件の研究の後, それらの手法を拡張する形で, 様々な代数多様体の（非）有理性を調べる研究が行われた. 1995 年には, 正標数還元手法を用いる Kollár [19] による新しい手法が導入され, 研究の幅が広まった. さらに最近になって, Voisin [33], Colliot-Thélène–Pirutka [7], Totaro [31], Schreieder [29] らにより, 対角分解や普遍的 CH_0 自明性といった性質の特殊化を用いた強力な手法が導入・展開され, 有理性の研究が大きく前進しているところである. この辺りで序文を終え, 次節から問題を提示していくことにする.

本稿では, 高々端末特異点しか持たない $\mathbb{Q}$-分解的な正規射影多様体でその反標準因子が豊富であるようなものを**ファノ多様体**という.

2 有理性とその類似概念との関係

有理性にはいくつかの類似概念が存在する. それらを整理・比較する中で問題を提示したい.

定義 2.1. n 次元代数多様体 X に対して, 次の通り有理性に関連する諸概念が定義される.

- $X \times \mathbb{P}^m$ が有理的となるような整数 $m \geq 0$ が存在するときに, X は**安定有理的**であるという.
- 支配的有理写像 $\mathbb{P}^n \dashrightarrow X$ が存在するときに, X は**単有理的**であるという.
- X の一般の 2 点を通る有理性曲線が存在するときに, X は**有理連結的**であるという.
- $n-1$ 次元の多様体 Y 及び支配的有理写像 $Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$ が存在するときに, X は**単線織的**であるという.

上記の性質たち及びファノ多様体との関係性を下図にまとめておく. ファノ多様体の有理連結性は [34] による.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \text{ファノ多様体} \arrow[dlll, Rightarrow, bend right, "\times"'] \arrow[dll, Rightarrow, bend right, "\times"'] \arrow[dl, Rightarrow, "?"'] \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{有理的} \arrow[r, Rightarrow] & \text{安定有理的} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, Rightarrow, bend left, "\times"] & \text{単有理的} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, Rightarrow, bend left, "\times"] & \text{有理連結的} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, Rightarrow, bend left, "?"] & \text{単線織的}
\end{tikzcd}$$

2.1 単有理性 vs. 有理連結性

3 次元以上においては，「単有理的 $\Longrightarrow$ 有理連結的」の逆は成立しないと信じられているが, 現在未解決である. 有理連結性は双有理分類上の振る舞いもよく, その判定も容易であるが, 単有理性の判定（特にその非自明な必要条件の構築）が困難である.

問題 1 $(***)$**.** 単有理的でない有理連結多様体を提示せよ.

上記の問題の主要な候補として次を提示しておく. n 次元非特異 d 次超曲面 $V_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ は, $d \leq n+1$ の場合はファノ多様体なので, 特に有理連結的である.

問題 2 $(***)$**.** n 次元非特異 $n+1$ 次超曲面 $V_{n+1} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ で単有理的でないものを見つけよ.

2.2 安定有理性 vs. 単有理性

「安定有理的 $\Longrightarrow$ 単有理的」の逆が成立しないことは, 例えば次の結果により従う.

定理 2.2 (Voisin [33])**.** 十分一般の非特異 4 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ で分岐する $\mathbb{P}^3$ の 2 重被覆は, 安定有理的でない単有理多様体である.

ここで, **十分一般**な対象とは, パラメーター空間において高々可算無限個の真閉部分集合の和集合の補集合に属する対象のことをいう. 非安定有理性の結果は次も有名である.

定理 2.3 (Schreieder [29])**.** $n \geq 3$, $d \geq 2 + \log_2 n$ を整数とする. このとき, 十分一般な n 次元非特異 d 次超曲面 $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ は安定有理的でない.

2.3 有理性 vs. 安定有理性

「有理的 $\Longrightarrow$ 安定有理的」の逆が成立しないことは次の結果により従う.

定理 2.4 (Beauville–Colliot-Thélène–Sansuc–Swinnerton-Dyer [3], Shepherd-Barron

[30]). 多項式 $p(t), q(t) \in \mathbb{C}[t]$ に対して,

$$P(x,t) := x^3 + p(t)x + q(t) \in \mathbb{C}[x,t]$$

と定め, $P(x,t)$ は既約多項式であると仮定する. また, 判別式 $\delta(t) := 4p(t)^3 + 27q(t)^2$ の次数が 5 以上と仮定する. このとき, アフィン超曲面

$$V := \{y^2 - \delta(t)z^2 = P(x,t)\} \subset \mathbb{A}^4$$

は安定有理的であるが有理的でない. また, $V \times \mathbb{P}^2$ は有理的である.

これに関連して次の問題を提示しておく. 下記の (2), (3) は幾分趣味的な問題であるが, 素朴に湧き起こる問題だと思うので今回提示することにする.

問題 3 ($** \sim ***$). (1) ($**$) 非有理的な安定有理多様体の他の例を提示せよ.

(2) ($***$) 定理 2.4 の V に対して, $V \times \mathbb{P}^1$ の（非）有理性を判定せよ.

(3) ($***$) $X \times \mathbb{P}^1$ が有理的かつ X が非有理的な X が存在するか.

2.4 有理連結性の特徴付け—Mumford 予想

X を非特異射影多様体とする. コホモロジーの消滅による有理連結性や単線織性の特徴付けである次の予想は有名である.

予想 2.5 (Mumford 予想)**.** 次は同値である.

(1) X は有理連結的である.

(2) 任意の $m \geq 1$ に対して, $H^0(X, (\Omega^1_X)^{\otimes m}) = 0$ となる.

予想 2.6 (単線織予想（or 非消滅予想）)**.** 次は同値である.

(1) X は単線織的である.

(2) 任意の $m \geq 1$ に対して, $H^0(X, mK_X) = 0$.

上記の 2 つの予想において, 「(1) $\Longrightarrow$ (2)」が成立することは知られている. また, 3 次元（以下）においては両予想ともに解決済みである（[21, Section 3] 参照）.

問題 4 ($** \sim ***$)**.** Mumford 予想（や単線織予想）を部分的にでも解決せよ.

「部分的」な解決について既知の結果を一つ紹介して本節を終えたいと思う. 予想 2.5 における, 「(2) $\Longrightarrow$ (1)」を示すことが目標であるが, (1) を予想 2.6 の (1) に弱めた次の予想がある.

予想 2.7. 非特異射影多様体 X の標準因子 K_X が擬有効である（つまり X は単線織でない）とする. このとき, $H^0(X, (\Omega^1_X)^{\otimes m}) \neq 0$ となる $m \geq 1$ が存在する.

これに関して次の結果が知られている.

定理 2.8 (Lazić–Peternell [23]). (1) $\dim X = n$ の場合の予想 2.7 が成立することと, $\dim X = n$ の場合の Mumford 予想が成立することは同値である.
(2) $\dim X = 4$ かつ $\nu(X, K_X) \neq 2$ の場合に予想 2.7 は正しい.

ここに, $\nu(X, K_X)$ は擬有効因子 K_X の**数値次元**と呼ばれるものである（例えば [23, Definition 2.1] 参照）.

3　有理性の族における挙動

有理性の族における挙動について議論する. 本節においては, $\phi\colon \mathcal{X} \to B$ を射影多様体の間の平坦射とし, $\mathcal{X}/B$ を**族**と呼ぶことにする. 射 ϕ が smooth の時に, $\mathcal{X}/B$ を**滑らかな族**という.

有理連結性が, 滑らかな族において良く振る舞うことは, 次の通り知られている. $\phi\colon \mathcal{X} \to B$ の**有理連結軌跡**を

$$B_{\mathrm{RC}} := \{\, b \in B \mid \mathcal{X}_b := \phi^{-1}(b) \text{ は有理連結的} \,\}$$

と定める. このとき, 滑らかな族 $\mathcal{X}/B$ に対して, $B_{\mathrm{RC}} \neq \emptyset$ であれば $B_{\mathrm{RC}} = B$ である（[21] 参照）.

有理性の挙動について考えるために, **有理軌跡**

$$B_{\mathrm{rat}} := \{\, b \in B \mid \mathcal{X}_b \text{ は有理的} \,\}$$

を導入しておく. 一般に, 族 $\mathcal{X}/B$ に対して, B_{rat} が高々可算無限個の B の局所閉集合の和集合になっていることが知られている（[10, Proposition 2.3]）. ここに現れる「局所閉集合」が「閉集合」であるか否か, つまり, 有理性が特殊化で閉じているか否か, についての結果を紹介する.

定理 3.1 (de Fernex–Fusi [10], Kontsevich–Tschinkel [18]). 滑らかな族 $\mathcal{X}/B$ に対して, B_{rat} は高々可算無限個の B の閉集合の和集合である.

これにより, 滑らかな族 $\mathcal{X}/B$ に対して, その十分一般メンバーが非有理的であることと, 非有理的メンバーが 1 つ存在することは同値であることがわかる.

注意 3.2. 族の滑らかさに関する条件をなくすと定理 3.1 は成立しない. 具体的には, 穏やかな特異点である端末特異点を持つ（4 次元以上の）多様体の族で反例が知られている（[32], [27] 参照）.

定理 3.1 により, 有理性が開条件でないことがわかったが, 閉条件については（わずかな）希望が残る. しかしながら, 次の結果により閉条件であることが（4 次元以上におい

て）否定される.

定理 3.3 (Hassett–Pirutka–Tschinkel [12])**.** $n \geq 4$ とする. n 次元射影多様体の滑らかな族 $\mathcal{X}/B$ で, $\emptyset \neq B_{\mathrm{rat}} \subsetneq B$ であり, さらに B_{rat} が閉集合でないものが存在する.

注意 3.2 や定理 3.3 は全て 4 次元以上における結果である. 高々対数端末特異点を持つ 3 次元射影多様体の族に関して定理 3.1 の結論が成立することが知られているなど, 3 次元における有理性の挙動についてはやや特殊性を垣間見ることができる. そこで次の問題を提示しておく.

問題 5 $(** \sim ***)$**.** 3 次元射影多様体の滑らかな族 $\mathcal{X}/B$ で, $\emptyset \neq B_{\mathrm{rat}} \subsetneq B$ となるものが存在するか. さらに, B_{rat} が閉集合でないものが存在するか.

4 個別の多様体の有理性

4.1 3 次元非特異ファノ多様体の有理性問題

3 次元非特異ファノ多様体は分類されており, 105 変形族からなることが知られている ([13], [25] 参照). これらの有理性判定は次の通りほぼ完成している（詳細については, [15] 参照).

- 特定の 87 族に属する任意のメンバーは有理的である.
- 特定の 16 族に属する任意のメンバーは非有理的である.
- 残る 2 族の一般（= Zariski general）メンバーは非有理的である. この 2 族とは次の通りである：
  - $(2,3)$ 型の完全交叉 $X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$.
  - ファノ指数 1, $-K_X^3 = 10$ の 3 次元非特異ファノ多様体 X.

次が解決すれば 3 次元非特異ファノ多様体の有理性問題が完全解決される.

問題 6 $(***)$**.** 上記 2 族の全メンバーの有理性を判定せよ.

$(2,3)$ 型の完全交叉 $X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$ については, 第 5.2 節で触れることとする.

4.2 射影空間の有理的非特異超曲面の存在

射影空間の非特異超曲面について考察する. それらの非有理性を論じることが主要問題であるが, その前に有理的なものの存在についての問題を提示しておく.

$n \geq 3$ とする. 非特異 2 次超曲面 $X_2 \subset \mathbb{P}^{n+1}$ が有理的であることは容易にわかる. 3 次超曲面について考える. $n = 2m$ を偶数とし, 非特異 3 次超曲面 $X_3 \subset \mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{P}^{2m+1}$

で, $\mathbb{P}^{2m+1}$ の交わらない 2 つの m 次元線型空間部分空間を含むものを考える. 2 つの線型部分空間（$\cong \mathbb{P}^m$）からそれぞれ点をとり, その 2 点を通る直線と X_3 の第 3 の交点を対応させることで, 双有理写像

$$\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^m \dashrightarrow X_3$$

を得る. よって, このような（特殊な）X_3 は有理的である. 奇数次元の非特異 3 次超曲面で有理的なものの存在は知られていない. また, 4 次以上の場合も全く知られていない.

問題 7 $(***)$**.** $n \geq 3$ を奇数とする. 非特異 3 次超曲面 $X_3 \subset \mathbb{P}^{n+1}$ で有理的なものが存在するか.

問題 8 $(***)$**.** 次数 $d \geq 4$ の非特異超曲面 $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ で有理的なものが存在するか.

偶数次元の非特異 3 次超曲面で有理的なものを構成することも興味深い問題と思える（4 次元における結果は例えば [11] を参照のこと）.

問題 9 $(** \sim ***)$**.** $n \geq 4$ を偶数とする. 非特異 3 次超曲面 $X_3 \subset \mathbb{P}^{n+1}$ で有理的なものを様々に構成せよ.

4.3 射影空間の非特異超曲面の有理性問題

射影空間の非特異超曲面の非有理性に関する既知の重要な結果を紹介する.

- 非特異 3 次超曲面 $X_3 \subset \mathbb{P}^4$ は非有理的である（Clemens–Griffiths [5]）.
- $n \geq 3$ について, 非特異 $n+1$ 次超曲面 $X_{n+1} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ は非有理的である（de Fernex [9], 定理 5.2 参照）.
- $n \geq 3$, $d \geq 2 + \log_2 n$ について, 十分一般の非特異 d 次超曲面 $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ は非安定有理的である（Schreieder, 定理 2.3）.

de Fernex の結果は双有理剛性の理論によるもので, これについては第 5 で後述する. Schreieder の結果は劇的な進歩を与えたが, これは, 対角分解/普遍的 CH_0 自明性の退化/特殊化の議論をさらに拡張することにより得られた結果である. また, これらの他にも, Nicaise–Ottem [26] などの結果もある. これらの結果を比較的低次元（9 次元以下）の場合に図 4.3 にまとめておく.

問題 10 $(***)$**.** 図 4.3 における未知の部分（ファノの領域で, 印のついていない部分）に対応する非特異超曲面の（安定）有理性を判定せよ.

図 4.3 における ■ 印の部分については, 非有理的メンバーの存在が抽象的に示されているのみであり, 具体的に与えられた非特異超曲面の有理性を判定することはできてい

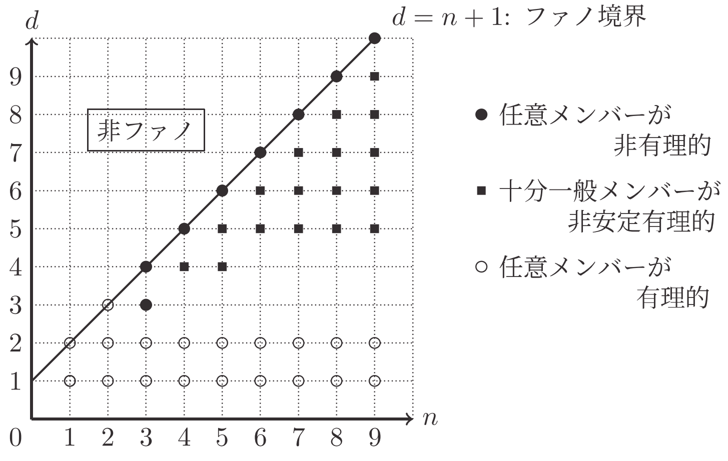

図 1　n 次元非特異 d 次超曲面 $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ の（非）有理性

ない．そこで次の問題を提示したい．

問題 11 ($** \sim ***$)**.** 図 4.3 における ■ 印に対応する非特異超曲面の族の「十分一般」以外のメンバーの有理性を判定せよ．また, 非有理性について明示的な結果を与えよ．

問題 10, 11 への一つのアプローチ方法を第 5.5 節で提案する．

4.4　4 次元非特異ファノ多様体の有理性判定

3 次元非特異ファノ多様体の有理性問題は概ね片付いているため, 今後の方針としては, 高次元を図る方向と, 特異点を持った 3 次元ファノ多様体を考察する方向が考えられる．

4 次元以上において, 射影空間内の完全交叉や射影空間の巡回被覆といった特定の対象以外について, その有理性問題は未解決なものが多い．4 次元非特異ファノ多様体は分類が完成していないが, それらの構成は色々と知られてきている．

- ファノ指数が 2 以上のものは分類済みであり, それらは 35 族からなる．
- ファノ指数が 1 のものは 700 族以上の存在が知られている（[22], [6], [17] 参照）．

問題 12 ($* \sim ***$)**.** 4 次元非特異ファノ多様体の有理性を判定せよ．

4.5　特異点を持つ 3 次元ファノ多様体の有理性判定

次に, 穏やかな特異点を持つ 3 次元ファノ多様体の有理性について考察する．3 次元の 4 次超曲面 $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ を考える．このとき, X_4 がファノ多様体であることは, X_4 が

$\mathbb{Q}$-分解的かつ端末特異点しか持たないことと同値である．非特異な X_4 の非有理性は Iskovskikh–Manin により示されている．最も穏やかな端末特異点とも言える通常 2 重点を持つ場合の結果が知られている．

定理 4.1 (Mella [24])**.** $\mathbb{Q}$-分解的であり, かつ高々通常 2 重点しか特異点を持たない 3 次元 4 次超曲面は非有理的である．

$\mathbb{Q}$-分解性の条件は必要である．高々通常 2 重点しか持たない（非 $\mathbb{Q}$-分解的）X_4 で有理的なものが存在する（[4] 参照）．「$\mathbb{Q}$-分解的かつ高々端末特異点しか持たない 3 次元 4 次超曲面 $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ は全て有理的であろう」と専門家の間で期待されている．

問題 13. (1) $(** \sim ***)$ 様々な端末特異点を持つ $\mathbb{Q}$-分解的な 3 次元 4 次超曲面（あるいは quartic double solid）の有理性を判定せよ．ここに, quartic double soild とは, 4 次曲面で分岐する $\mathbb{P}^3$ の 2 重被覆のことである．

(2) $(* \sim ***)$ 様々な端末特異点を持つ 3 次元ファノ多様体の有理性を判定せよ．

本問題へアプローチし得る方法を第 5.4 節で説明する．

5 ファノ多様体の双有理剛性

本節では, X をピカール数 1 のファノ多様体とする．X は, 構造射 $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ によって（自明な）森ファイバー空間とみなされる．因みに, 森ファイバー空間 $Y \to S$ が自明である（つまり, $\dim S = 0$ である）ことと, Y がピカール数 1 のファノ多様体であることは同値である．

定義 5.1. X と双有理同値な森ファイバー空間が X と同型なものに限るときに, X は**双有理剛的**であるという．X が双有理剛的であり, さらにその自己双有理写像群 $\mathrm{Bir}(X)$ が $\mathrm{Aut}(X)$ と一致するときに X は**双有理超剛的**であるという．

有理的ファノ多様体は射影空間と双有理同値であり, 射影空間はさまざまな森ファイバー空間（例えば $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ など）と双有理同値になるため双有理剛的でない．よって次の関係を得る：

$$\text{双有理超剛的} \implies \text{双有理剛的} \implies \text{非有理的}.$$

5.1 一般次元における重要問題

次の結果は, Iskovskikh, Manin, Pukhlikov, Cheltsov, Ein, Mustaţă らによる研究ののち, de Faernex により最終的な解決が与えられた．

定理 5.2 (de Fernex [9]). $n \geq 3$ とする. n 次元の非特異 $n+1$ 次超曲面 $X_{n+1} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ は双有理超剛的である.

射影空間の完全交叉への一般化も得られているが, まだ完全に解決していない.

定理 5.3 (Zhuang [35]). $n \geq 10r$, $r \geq 1$ とする. $\mathbb{P}^{n+r}$ における余次元 r, ファノ指数 1 の非特異ファノ完全交叉は双有理超剛的である.

問題 14 ($** \sim ***$). 定理 5.3 において, $n \geq 10r$ という条件を外した（弱めた）場合を検証せよ.

5.2　3 次元における問題

3 次元の非特異ファノ多様体に対する双有理剛性の研究はほぼ完成しているが, 次の定理における一般性条件を外した場合が重要な未解決問題として残っている

定理 5.4 (Iskovskikh–Pukhlikov [16]). 一般の非特異 $(2,3)$ 型完全交叉 $X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$ は双有理剛的である.

問題 15 ($***$). 任意の非特異 $(2,3)$ 型完全交叉 $X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$ の双有理剛性を調べよ.

定理 5.4 の証明は難解であり, Corti は [8] において, 極小モデル理論に基づく双有理幾何学の技巧を用いて証明を簡略化することを試みている. 残念ながらその試みは完成していないようだ.

問題 16 ($**$). 一般の $X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$ に対する Iskovskikh–Pukhlikov の証明を簡略化せよ. あるいは Corti による証明（[8, 6.2 節] 参照）を完成させよ.

5.3　4 次元における問題

4 次元以上の高次元における双有理剛性の研究は多岐にわたり過ぎるため, 考察対象を重み付き完全交叉（= 重み付き射影空間における完全交叉）に制限する.

予想 5.5 (Pukhlikov). ファノ指数 1 の n 次元非特異ファノ重み付き完全交叉

$$X_{d_1,\dots,d_r} \subset \mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_{n+r}), \quad \sum d_i = n+r, n \geq 4$$

は双有理剛的である.

この予想は広く未解決であるが, 4 次元の場合の未解決部分を抽出し, 問題として提示する.

問題 17 ($** \sim ***$)**.** 表 1 の 4 次元非特異ファノ重み付き完全交叉の双有理剛性を判定せよ（No. 1, 2, 3, 6 が $**$, 残りが $***$）.

No.		No.	
1	$X_{6,6} \subset \mathbb{P}(1^3, 2^2, 3^2)$	11	$X_{3,3} \subset \mathbb{P}^6$
2	$X_{10} \subset \mathbb{P}(1^4, 2, 5)$	12	$X_{2,2,3} \subset \mathbb{P}^7$
3	$X_{4,6} \subset \mathbb{P}(1^4, 2^2, 3)$	13	$X_{2,2,2,2} \subset \mathbb{P}^8$
6	$X_{4,4} \subset \mathbb{P}(1^5, 2^2)$		

表 1　双有理剛性が未判定の指数 1 の 4 次元非特異ファノ重み付き完全交叉

5.4　重複度に関する局所不等式

ここでは, 3 次元における双有理剛性の証明手法を発展させることを目的とした問題を提示する. 双有理幾何学の知識をいくつか仮定し, やや技術的内容に踏み込むため, 必要に応じて読み飛ばしていただきたい.

X をピカール数 1 のファノ多様体とする. X が双有理超剛的でないとすると, 森ファイバー空間 Y/T への非同型な双有理写像 $X \dashrightarrow Y$ が存在することになる. 双有理（超）剛性の証明において, 次の結果が基本的である.

定理 5.6 (Noether–Fano–Iskovskikh 不等式)**.** X をピカール数 1 のファノ多様体とし, 森ファイバー空間 Y/T への非同型双有理写像 $f\colon X \dashrightarrow Y$ が存在するとする. Y 上の十分豊富因子 H を取り, その完備線形系の双有理変換を $\mathcal{M} := f_*^{-1}|H|$ とし, 有理数 $n > 0$ を $\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} -nK_X$ で定まるものとする. このとき, 組 $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ は標準的でない.

組 $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ が標準的でないような可動線形系 $\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} -nK_X$ の存在から矛盾を導く, というのが双有理（超）性の証明方針である. そこで, 組 $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ が標準的でないということを, もう少し定量的に理解したい. 3 次元において次の結果がその役割を担う.

定理 5.7 ($4n^2$-局所不等式, Pukhlikov)**.** $P \in X$ を非特異 3 次元多様体の芽, $\mathcal{M}$ を X 上の可動線形系とし, $n > 0$ を有理数とする. 組 $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ が標準的で無いならば, 一般メンバー $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ に対して, 不等式

$$\operatorname{mult}_P M_1 \cdot M_2 > 4n^2$$

が成立する.

3 次元非特異ファノ多様体の双有理剛性の証明において, $4n^2$-局所不等式は重要な役割を演じている. 端末特異点を持つ 3 次元多様体を考察する場合に, この不等式を拡張できれば有用である（問題 13 の解決につながることを期待）.

3 次元 Gorenstein 端末特異点を考える．それらは, cA_m 型, cD_m 型, cE_m 型と呼ばれる型に大別される．ここで, 3 次元の孤立超曲面特異点 $P \in X$ で, その一般超平面切断が A_m 型（あるいは D_m 型, E_m 型）の Du Val 特異点であるものを, cA_m 型（あるいは cD_m 型, cE_m 型）特異点という．

現状では未発表であるが, 次の結果を得ている．

定理 5.8 (cA_1 型特異点に対する $2n^2$-局所不等式, Krylov–Paemurru-O)**.** $P \in X$ を cA_1 型特異点の芽, $\mathcal{M}$ を X 上のカルティエ因子の可動線形系とし, $n > 0$ を有理数とする．組 $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ が $P \in X$ で標準的で無いならば, 一般メンバー $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ に対して, 不等式

$$\operatorname{mult}_P M_1 \cdot M_2 > 2n^2$$

が成立する．

注意 5.9. 定理 5.8 において, 特異点 P における重複度 $\operatorname{mult}_P M_1 \cdot M_2$ の定義をはっきりさせておく．$P \in X \subset \mathbb{C}^4$ は超曲面特異点なので, $M_i = D_i|_X$ なる $\mathbb{C}^4$ のカルティエ因子 D_i が取れるため,

$$\operatorname{mult}_P M_1 \cdot M_2 := \operatorname{mult}_P D_1 \cdot D_2 \cdot X$$

として定める（右辺は $\mathbb{C}^4$ における重複度）．

問題 18 (**)**.** cA_m（$m \geq 2$）, cD_m, cE_m 型特異点の芽 $P \in X$ に対して, 次を満たす定数 c を求めよ：X 上の可動線形系 $\mathcal{M}$ と有理数 $n > 0$ について, 組 $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ が標準的で無いとき, 一般メンバー $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ に対して, 不等式

$$\operatorname{mult}_P M_1 \cdot M_2 > cn^2$$

が成立する．

5.5 双有理剛性の一般化

より広範囲のファノ多様体の非有理性判定を目指すために, 双有理剛性を弱めた概念を導入し, 関連する問題を提示する．

定義 5.10. X をピカール数 1 の n 次元ファノ多様体とし, $2 \leq m \leq n$ とする．X と双有理同値になる任意の森ファイバー空間 Y/T に対して, その相対次元が $\dim Y - \dim T \geq m$ となるときに, X は **birationally m-solid** であるという．

n 次元のファノ多様体に対する birational n-solidity は [1] において導入された概念で, そこでは単に (birationally) soild と呼ばれている．$m \neq n$ に対する m-solidity は今回初めて定式化した．有理的なピカール数 1 のファノ多様体はファイバー次元が 1 の

森ファイバー空間（例えば $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1/\mathbb{P}^{n-1}$）と双有理同値になるため, 次の関係がわかる：

$$\text{双有理剛的} \Rightarrow \text{bir. } n\text{-solid} \Rightarrow \text{bir. } (n-1)\text{-solid} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \text{bir. 2-solid} \Rightarrow \text{非有理的.}$$

n 次元の非特異 d 次超曲面 $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$（$d \leq n$）を考察する. $X = X_d$ のファノ指数は $\iota_X = n + 2 - d \geq 2$ である. 線型射影 $X \subset \mathbb{P}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{P}^k$（$0 \leq k \leq \iota_X - 1$）の一般ファイバーはファノ多様体であるので, X をその射影の中心である線型部分空間で爆発することにより, 森ファイバー空間 $Y_k \to \mathbb{P}^k$ を得る. $Y_k \to \mathbb{P}^k$ のファイバー次元は $n - k$ である. 最大値 $k = \iota_X - 1$ の場合を考えることにより, X は相対次元が $n - \iota_X + 1 = d - 1$ の森ファイバー空間と双有理同値になる. X は, これより相対次元の大きい森ファイバー空間と双有理同値になるであろうか. $\iota_X = 2$ の場合の次の結果が唯一の既知の結果である.

定理 5.11 (Pukhlikov [28])**.** $n \geq 16$ とする. 一般の非特異 n 次超曲面 $X = X_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ は birationally $(n-1)$-solid である.

そこで次の問題を提示する.

問題 19. $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ は birationally $(d-1)$-solid か.

5.6 正標数への展開

ここでは「複素幾何学の諸問題」から逸脱し, 正標数における話題を取り扱う. ファノ多様体に対する双有理剛性の定義そのものは, 任意の基礎体上でそのまま流用される. また, Iskovskikh–Manin[14] によるオリジナルの証明方法も任意の代数閉体上で有効である. 特に, 正標数の代数閉体上で定義された 3 次元非特異 4 次超曲面 $V_4 \subset \mathbb{P}^4$ は双有理超剛的であり, 非有理的である. 一方で, 双有理剛性の証明手法の多くは標数 0 に依存する議論を多く含むため, これまでに得られている多くの結果は正標数へと（少なくとも直接的には）翻訳されない.

正標数上で有効に適用される非有理性判定手法は, 標数 0 上にも増して限定的である. 従って, 双有理剛性の理論（証明手法）を正標数で本格的に展開することは意義のあることに思える.

問題 20 ($**$)**.** 双有理剛性の理論を正標数で展開せよ.

問題 21 ($***$)**.** k を正標数の代数閉体とする. $n \geq 4$ に対して, n 次元非特異 $n+1$ 次超曲面 $V_{n+1} \subset \mathbb{P}_k^{n+1}$ の双有理超剛性を示せ.

参考文献

[1] H. Ahmadinezhad and T. Okada, Birationally rigid Pfaffian Fano 3-folds. Algebr. Geom. **5** (2018), no. 2, 160–199.

[2] M. Artin and D. Mumford, Some elementary examples of unirational varieties which are not rational. Proc. London Math. Soc. (3) **25** (1972), 75–95.

[3] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and P. Swinnerton-Dyer, Variété stablement rationnelles non rationnelles. Ann. of Math. (2) **121** (1985), no. 2, 283–318.

[4] I. Cheltsov and C. Shramov, Two rational nodal quartic 3-folds. Q. J. Math. **67** (2016), no. 4, 573–601.

[5] C. H. Clemens and P. A. Griffiths, The intermediate Jacobian of the cubic threefold. Ann. of Math. (2) **95** (1972), 281–356.

[6] T. Coates, A. Kasprzyk and T. Prince, Four-dimensional Fano toric complete itersections. Proc. A. **471** (2015), no. 2175, 20140704, 14 pp.

[7] J.-L. Colliot-Thélène and A. Pirutka, Hypersurfaces quartiques de dimension 3: non rationalité stable, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **49** (2016), no. 2, 371–397.

[8] A. Corti, Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry. *Explicit birational geometry of* 3*-folds*, 259–312, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[9] T. de Fernex, Birationally rigid hypersurfaces. Invent. Math. **192** (2013), no. 3, 533–566.

[10] T. de Fernex and D. Fusi, Rationality in families of threefolds. Rend. Circ. Mat. Parelmo (2) **62** (2013), no. 1, 127–135.

[11] B. Hassett, Cubic fourfolds, K3 surfaces, and rationality questions. *Rationality problems in algebraic geometry*, 29–66, Lecture Notes in Math., **2172**, Fond. CIME/CIME Found. Subser., Springer, Cham, 2016.

[12] B. Hassett, A. Pirutka and Y. Tschinkel, Stable rationality of quadric bundles over surfaces. Acta Math. **220** (2018), no. 2, 341–365.

[13] V. A. Iskovskih, Fano threefolds I, II. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), no. 3, 516–562, 506–549.

[14] V. A. Iskovskih and Ju. I. Manin, Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem. Mat. Sb. (N.S.) **86** (1971), 140–166.

[15] V. A. Iskovskikh and Yu. G. Prokhorov, Fano varieties. *Algebraic geometry, V*, 1–247, Encyclopaedia Math. Sci., **47**, Springer, Berlin, 1999.

[16] V. A. Iskovskikh and A. V. Pukhlikov, Birational autormorphisms of multidimensional algebraic manifolds. Algebraic geometry, 1. J. Math. Sci. **82** (1996), no. 4, 3528–3613.

[17] E. Kalashnikov, Four-dimensional Fano quiver flag zero loci. Proc. A. **475** (2019), no. 2225, 20180791, 23 pp.

[18] M. Kontsevich and Y. Tschinkel, Specialization of birational types. Invent. Math. **217** (2019), no. 2, 415–432.

[19] J. Kollár, Nonrational hypersurfaces, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 1, 241–249.

[20] J. Kollár, Unirationality of cubic hypersurfaces. J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), no. 3, 467–476.

[21] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori, Rationally connected varieties. J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 3, 429–448.

[22] O. Küchle, On Fano 4-fold of index 1 and homogeneous vector bundles voer Grassmannians. Math. Z. **218**, no. 4, 563–575.

[23] V. Lazić and T. Peternell, Rationally connected varieties—on a conjecture of Mumford. Sci. China Math. **60** (2017), no. 6, 1019–1028.

[24] M. Mella, Birational geometry of quartic 3-folds. II. The importance of being $\mathbb{Q}$-factorial. Math. Ann. **330** (2004), no. 1, 107–126.

[25] S. Mori and S. Mukai, Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$. Manuscripta Math. **36** (1981/82), no. 2, 147–162.

[26] J. Nicaise and J. C. Ottem, Tropical degenerations and stable rationality. Duke Math. J., to appear.

[27] A. Perry, Rationality does not specialize among terminal fourfolds. Algebra Number Theory **11** (2017), no. 9, 2193–2196.

[28] A. V. Pukhlikov, Birational geometry of Fano hypersurfaces of index two. Math. Ann. **366** (2016), no. 1-2, 721–782.

[29] S. Schreieder, Stably irrational hypersurfaces of small slopes. J. Amer. Math. Soc. **32** (2019), no. 4, 1171–1199.

[30] N. I. Shepherd-Barron, Stably rational irrational varieties. *The Fano Conference*, 693–700, Univ. Torino, Turin, 2004.

[31] B. Totaro, Hypersurfaces that are not stably rational, J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), no. 3, 883–891.

[32] B. Totaro, Rationality does not specialize among terminal varieties. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **161** (2016), no. 1, 13–15.

[33] C. Voisin, Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycle, Invent.

Math. **201** (2015), no. 1, 207–237.

[34] Q. Zhang, Rational connectedness of log Q-Fano varieties. J. Reine Angew. Math. **590** (2006), 131–142.

[35] Z. Zhuang, Birational superrigidity and K-stability of Fano complete intersections of index 1. With an appendix by Zhuang and Charlie Stibitz. Duke Math, J. **169** (2020), no. 12, 2205–2229.