

## Trudinger-Moser 不等式の最大化問題の境界非線形項

京都大学数理解析研究所 (RIMS)  
中西賢次 (Kenji Nakanishi)

### 1. TRUDINGER-MOSER 不等式とは

Sobolev 不等式  $H^{1,p}(\mathbb{R}^p) = W^{1,p}(\mathbb{R}^p) \subset L^q(\mathbb{R}^p)$  ( $2 \leq \forall p \leq \forall q < \infty$ ) と  $H_p^1(\mathbb{R}^p) \not\subset L^\infty(\mathbb{R}^p)$  の狭間にある指数型不等式である。Moser(71) のバージョン (非線形項が最良の形) では、ある正定数  $C_p$  に対して、 $\mathbb{R}^p \supset \forall \Omega$ : 有界領域で

$$(TM) \quad \forall u \in H_0^{1,p}(\Omega), \quad \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq B_p := p^{p-1}|S^{p-1}| \implies \int_{\Omega} \exp(u^{p'}) dx \leq C_p |\Omega|. \quad (1)$$

なお  $B_p$  は  $u$  の定数倍で任意の正数に変えられるが、それに応じて指数の  $u^{p'}$  に係数が付く。

1.1. **本稿の主題.** (球体または全空間上で) 最大増大度を持つ一般の非線形項に対して、Trudinger-Moser (型) 不等式を等号にする関数  $u$  (最良定数の最大化元) が存在するかどうかを、非線形項から決定する。[12] の解説だが、 $p > 2$  への拡張と証明の改良も行う。

### 2. 全空間上の TRUDINGER-MOSER 型不等式

上記の Moser の形のままでは  $|\Omega| = \infty$  とくに  $\Omega = \mathbb{R}^p$  で意味を持たないので、幾つかの修正バージョンが考えられている。(以下  $\|u\|_p$  は  $L^p(\mathbb{R}^p)$  ノルム)

- 劣臨界型: Cao [4] ( $p = 2$ ), do Ó [8] ( $p \geq 2$ ).

$$(C) \quad \|\nabla u\|_p^p \leq B_p, \quad \alpha < 1 \implies \int_{\mathbb{R}^p} \exp_{p-1}^{\alpha|u|^{p'}} dx \leq C_{p,\alpha} \|u\|_p^p, \quad (2)$$

ここで  $\exp_k$  は  $k$  次未満を除去した  $\exp_k^t := \exp(t) - \sum_{j=0}^{k-1} t^j/j!$ .

但し、この形だと臨界指数  $\alpha = B_p$  では不成立 (Adachi-Tanaka [1])。

- 非斉次 Sobolev 型: Ruf [19] ( $p = 2$ ), Li-Ruf [14] ( $p \geq 2$ ).

$$(R) \quad \|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p \leq B_p \implies \int_{\mathbb{R}^p} \exp_{p-1}^{\alpha|u|^{p'}} dx \leq C_p. \quad (3)$$

但し、この形だとスケール不変性 ( $u(x) \mapsto u(\lambda x)$ ) が失われている。

- 非線形最良型: Ibrahim-Masmoudi-Nakanishi [11] ( $p = 2$ ), Masmoudi-Sani [16] ( $p \geq 2$ )

$$(IMN) \quad M_E(f) := \sup_{\|\nabla u\|_p^p \leq B_p} \int_{\mathbb{R}^p} \frac{f(u)}{\|u\|_p^p} dx < \infty \iff f(u) \lesssim \frac{e^{|u|^{p'}}}{|u|^{p'} + |u|^{-p}}. \quad (4)$$

必要十分条件なので、同じ形の不等式は全て含む。

- $L^p$  依存指数型: do Ó-de Souza [9] ( $p = 2$ ), de Souza [7] ( $p \geq 2$ ).

$$(OS) \quad \|u\|_{W^{1,p}}^p \leq B_p, \quad \alpha < 1 \implies \int_{\mathbb{R}^p} \exp_{p-1}^{(1+\alpha\frac{\|u\|_p^p}{B_p})^{p'-1}|u|^{p'}} dx \leq C_{p,\alpha}. \quad (5)$$

なお有界領域バージョンは Adimurthi-Druet [2] による。

なお (C)  $\Leftarrow$  (R)  $\Leftarrow$  (OS)  $\Leftarrow$  (IMN) の順に導ける。最初2つはほとんど明らかなので最後だけ示すと、 $\theta := 1 - \|u\|_p^p/B_p \in (0, 1)$  として (IMN) を  $\theta^{-1/p}u$  に適用すれば

$$\int_{\mathbb{R}^p} \frac{e^{\theta|u/\theta|^{p'}}}{|u/\theta|^{p'} + |u|^{-p}} dx \lesssim \|u\|_p^p = B_p(1 - \theta). \quad (6)$$

$b := \theta|u/\theta|^{p'}$  とおくと被積分関数は

$$\frac{e^b}{(1 - \theta)b(1 + b^{-p})} \geq C_\alpha \frac{e^{[\theta + \alpha(1 - \theta)\theta]^{p'} - 1} b}{\theta + b^{1-p}} \quad (7)$$

これを上の不等式に代入すれば (OS) を得る。[11] では (IMN)  $\implies$  (R) を示しているが、上の証明の方が単純である。他方、有界領域バージョン (TM) を導出することも可能だが、上記ほど単純ではない ([12, Appendix C] を参照)。

Trudinger-Moser 不等式には他にも高階微分や空間領域など沢山の拡張があるが、本稿では言及せず、以下では最良形 (IMN) と (TM) のみを考える。

### 3. 基底状態解と (IMN) の最大化問題

非線形エネルギー関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が  $C^1$  で  $f'(0) = 0 \leq f'(s)$  を満たすとして、対応する  $\mathbb{R}^2$  上の定常非線形 Schrödinger 方程式

$$-\Delta Q + \omega Q = f'(Q) \quad (\omega > 0)$$

を考えると、任意の解  $Q \in H^1(\mathbb{R}^2)$  は Pohozaev 等式を満たす：

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(Q) dx = \omega \int_{\mathbb{R}^2} \frac{Q^2}{2} dx. \quad (8)$$

$M_E(f)$  を (IMN) で与えられる不等式の最良定数とすれば、

- $0 < \omega < 2M_E(f)$  なら  $\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 < 4\pi$  を満たす基底状態解が存在する。
- $\omega = 2M_E(f)$  なら全ての解は  $\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \geq 4\pi$  を満たす。
- $\omega > 2M_E(f)$  なら  $\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq 4\pi$  を満たす解は存在しない。

もし  $\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 4\pi$  の (基底状態) 解が有れば、 $M_E(f)$  の最大化元。

逆に、(IMN) の商の最大化元  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  が有れば、適当なスケール変換  $Q(x) = u(\lambda x)$  で  $\|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 4\pi$  の基底状態解を得る。

### 4. 最大化元の存在・非存在

以下では、Trudinger-Moser 型不等式の非線形積分を最大化する関数  $u$  の存在・非存在を一般の非線形項  $f$  に対して調べる。変分直接法で直ちに最大化元が得られないのは、エネルギー集約によるコンパクト性の喪失が起こり得る場合なので、その場合を考える。

球体領域  $\mathbb{B}^p = \{x \in \mathbb{R}^p \mid |x| < 1\}$  での Trudinger-Moser (TM) に対しては、Carleson-Chang [5] が最大化元の存在を示した。証明は、集約列では最良定数に到達できないことを示す。それ以降、様々なバージョンに対して最大化元の存在証明がなされている。

エネルギー臨界の変分問題では、非線形項の増大度は同じでも、低階項の摂動に依り存在・非存在が変わることが知られている (Sobolev 不等式の場合は Brezis-Nirenberg [3])。即ちここで考える問題は、存在・非存在を低階摂動から決定することである。

## 5. 最大化の境界非線形項

Carleson-Chang の議論から、低階摂動が非線形項を大きくする方が最大化列のエネルギー集約を阻止できる ( $\Rightarrow$ 最大化元の存在) ことが分かる。そこで、存在と非存在の境目になるような非線形項を求める。その具体形として、[12] は以下を示した。

円盤  $\mathbb{B}^2$  上の Trudinger-Moser (TM) ( $p = 2$ ) の場合、境界非線形項は

$$f(u) = e^{u^2} [1 - u^{-2} - \mathbf{c}_D u^{-4} + O(u^{-6})] \quad (u \rightarrow \infty) \quad \mathbf{c}_D := \frac{3}{2} + 2\zeta(3), \quad (9)$$

ただし  $\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s}$  はゼータ関数。これより特に、元々の非線形項  $e^{u^2}$  は存在側に属することが分かる。他方、全平面  $\mathbb{R}^2$  上の最良型 (IMN) ( $p = 2$ ) の場合の境界は

$$f(u) = u^{-2} e^{u^2} [1 - \mathbf{c}_E u^{-4} + O(u^{-6})] \quad (u \rightarrow \infty) \quad \mathbf{c}_E := 5 + 2\zeta(3). \quad (10)$$

こちらは第2項 ( $u^{-2}$ ) が無いため、(IMN) の非線形項は (TM) の場合より境界に近い事がわかる。実際、 $u^{-2} e^{u^2}$  が精密な漸近形ならやはり存在側に属するが、 $\frac{e^{u^2}}{u^2 + cu^{-2}}$  の形では  $c = \mathbf{c}_E$  が境目となる。

正確には、非線形項を  $u \gg 1$  にカットする必要がある。 $\forall L > 0$  に対して

$$\mathfrak{e}_L^s := e^s \cdot 1_{s>L} \quad (11)$$

とおく。まず円盤  $\mathbb{B}^2$  の場合、 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  は連続で以下を満たすとする。

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-u^2} f(u) = 1, \quad f(0) = 0, \quad M_D(f) := \sup_{u \in H_0^1(\mathbb{B}^2), \|\nabla u\|_2 \leq 4\pi} \int_{\mathbb{B}^2} f(u) dx < \infty. \quad (12)$$

**Theorem 1.**  $0 < \forall p < 6, p < \forall q < \infty, \forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}$ ,

[存在条件]  $\forall L > 1, \forall \delta > 0$ ,

(1)  $f(s) \geq \mathfrak{e}_L^{s^2} [1 - s^{-2} - \mathbf{c}_D s^{-4} + as^{-p}]$  なら  $M_D(f)$  は達成される。

(2)  $f(s) \geq \mathfrak{e}_L^{s^2} [1 - s^{-2} - \mathbf{c}_D s^{-4} + bs^{-q}] + as^p$  なら  $M_D(f)$  は達成。

[非存在条件]  $\exists L > 1$

(3)  $f(s) \leq \mathfrak{e}_L^{s^2} [1 - s^{-2} - \mathbf{c}_D s^{-4} - as^{-p}]$  なら  $M_D(f)$  は非達成。

(4)  $f(s) \leq \mathfrak{e}_L^{s^2} [1 - s^{-2} - \mathbf{c}_D s^{-4} + bs^{-q}] - as^p$  なら  $M_D(f)$  は非達成。

また  $M_D(f) \geq e$  で、非達成なら等号。なお  $f(s)$  の不等式は全ての  $s \in \mathbb{R}$  で成り立つとする。

全平面  $\mathbb{R}^2$  の場合、 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  は連続で以下を満たすとする。

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^2 e^{-u^2} f(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} u^{-2} f(u) = 0, \quad M_E(f) < \infty. \quad (13)$$

**Theorem 2.**  $0 < \forall p < 6, p < \forall q < \infty, \forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}$ ,

[存在条件]  $\forall L > 1, \forall \delta > 0$ ,

(1)  $f(s) \geq s^{-2} \mathfrak{e}_L^{s^2} [1 - \mathbf{c}_E s^{-4} + as^{-p}]$  なら  $M_E(f)$  は達成される。

(2)  $f(s) \geq s^{-2} \mathfrak{e}_L^{s^2} [1 - \mathbf{c}_E s^{-4} + bs^{-q}] + as^{2+p}$  なら  $M_E(f)$  は達成。

[非存在条件]  $\exists L > 1$

(3)  $f(s) \leq s^{-2} \mathfrak{e}_L^{s^2} [1 - \mathbf{c}_E s^{-4} - as^{-p}]$  なら  $M_E(f)$  は非達成。

(4)  $f(s) \leq s^{-2} \mathfrak{e}_L^{s^2} [1 - \mathbf{c}_E s^{-4} + bs^{-q}] - as^{2+p}$  なら  $M_E(f)$  は非達成。

また  $M_E(f) \geq e^{2-2\gamma}$  ( $\gamma$  は Euler 定数) で、非達成なら等号成立。

## 6. 存在境界に関する関連研究

Carleson-Chang 以来、存在結果は数多いが、非存在は比較的少ない。

- Pruss [18]: 抽象的な存在・非存在を  $M_D(f)$  に適用。
- Ishiwata [13]: (R) を  $e^{\alpha|u|^{p'}}$ ,  $0 < \alpha < 1$  に対する存在・非存在。
- Mancini-Thizy [15]: Adimurthi-Druet 型の  $0 < \alpha < 1$  に対する存在・非存在。
- Thizy [20]: (TM) ( $p = 2$ ) の境界非線形項を第2項まで決定。

$$f(u) = e^{u^2} [1 - (1 + \frac{2}{\epsilon})u^{-2} + o(u^{-2})] \quad (u \rightarrow \infty). \quad (14)$$

ここで [12] との係数のズレ  $+\frac{2}{\epsilon}$  は、 $f(u)$  内の  $u^2(u \rightarrow 0)$  を残しているため。

- Hashizume [10], Chen-Lu-Zhu [6]:  $e^{u^2 - \alpha u^2}$ ,  $\alpha > 0$  に対する存在・非存在。( [10] は  $\mathbb{B}^2$  の (TM)、[6] は  $\mathbb{R}^2$  の非斉次型 (R) )

7.  $\mathbb{B}^p, \mathbb{R}^p$  ( $p \geq 3$ ) での境界非線形項

[12] の結果と証明は  $p \geq 3$  の場合へ拡張でき、境界非線形項は

$$U := u^{p'}, \quad f(u) = \begin{cases} e^U [1 + c_1^B U^{-1} + c_2^B U^{-2} + O(U^{-3})], & (\mathbb{B}^p) \\ U^{-1} e^U [1 + c_1^E U^{-1} + c_2^E U^{-2} + O(U^{-3})], & (\mathbb{R}^p) \end{cases} \quad (15)$$

の形になる。係数  $c_1^*$  は  $p$  に依存する具体的な有限和で表せる有理数になり、 $c_2^*$  は更に  $\zeta(3)$  を加えた形 ( $\mathbb{Q} \oplus \zeta(3)\mathbb{Q}$ ) になる。その際、多重調和数が必要となる：

$$\sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_n \leq p-1} \frac{1}{k_1 \cdots k_n} \quad (n \leq 2^k). \quad (16)$$

[12] の証明の特に関第3項展開はあまりにも見通しが悪いため、 $p \geq 3$  でも同様に計算できるか全然明らかでないが、本稿で以下紹介する改良版は一般の  $p$  に適用できる。

## 8. 証明の大まかな流れ

8.1. 対数座標. まず再配分により、考える関数  $u(x)$  は球対称減衰として、対数座標

$$u(x) = u(r), \quad r = |x| = e^{-t/p}, \quad t := \log(|x|^{-p}), \quad \dot{u} = -\frac{r}{p} u_r(r) \geq 0 \quad (17)$$

に移行すると、最大化問題は次の形になる。

$$M(f) := \sup_u \langle f(u) | e^{-t} \rangle, \quad (18)$$

ただし  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  は  $L^2(\mathbb{R})$  の内積で、 $u(t) : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  の条件は

$$0 \leq \dot{u}, \quad \|\dot{u}\|_p^p \leq 1, \quad \begin{cases} u(0) = 0 & (\mathbb{B}^p) \\ 1 = \langle |u|^p | e^{-t} \rangle & (\mathbb{R}^p). \end{cases} \quad (19)$$

元の座標で  $|x| \rightarrow 0$  への集約は  $t \rightarrow \infty$  に対応する。

対数座標へ移行したときに、斉次 Sobolev ノルム ( $\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^p)}$ ) が再び斉次 Sobolev ノルム ( $\|\dot{u}\|_{L^p(\mathbb{R})}$ ) に移るのが Trudinger-Moser の場合、即ち Sobolev と Hardy が破綻する場合の特徴である。(Sobolev と Hardy が成立する場合は、非斉次ノルムに移るためエネルギー集約は無くなり、平行移動不変性だけになる。) 従って、 $u(t)$  のエネルギー分布について平行移動 (元の座標のスケール変換) 以上の情報を引き出す必要がある。

8.2. **集約パラメータによる問題の分解.** 最大化を考える関数集合  $X$  において、集約状態を表すパラメータ  $h \rightarrow \infty$  を導入し、 $h > 0$  毎に最大化問題を考える：

$$X = \bigcup_{h>0} X(h), \quad M(f) = \sup_{h>0} M(f, h), \quad M(f, h) := \max_{u \in X(h)} \langle f(u) | e^{-t} \rangle. \quad (20)$$

$X(h)$  では集約不能ゆえ  $M(f, h)$  は最大化され、問題は  $\sup_{h>0}$  になる：

$$\lim_{h \rightarrow \infty} M(f, h) \begin{cases} \leq M(f, h) (\exists h) & \iff \text{最大化元が存在} \\ > M(f, h) (\forall h) & \iff \text{最大化元は非存在} \end{cases} \quad (21)$$

具体的に  $h$  は、運動エネルギーを半分に分ける高さで定める：

$$\exists T \in \mathbb{R}, \quad \|\dot{u}\|_{L^p(t<T)}^p \leq \frac{1}{2} \geq \|\dot{u}\|_{L^p(t>T)}^p, \quad u(T) = h. \quad (22)$$

外部領域 ( $t < T$ )、内部領域 ( $t > T$ ) はそれぞれ劣臨界状態になる。

8.3. **外部 ( $t < T$ ) と内部 ( $t > T$ ) に分割したメリット.**  $h \rightarrow \infty$  のとき漸近的に、最大化問題  $M(f, h)$  を各領域で別々の問題として扱うことができ、しかもその近似誤差は  $h \rightarrow \infty$  で指数的に小さい。現象的理由：非線形項  $f(u)$  は境界  $t = T$  よりずっと内側に集約して、質量項  $|u|^p$  は境界よりずっと外側に集約し、境界周辺は殆ど運動エネルギーの影響のみで等速度運動になるため。

この結果、分割された近似問題はそれぞれ

- 外部：非線形項は無視し、高さ  $h = u(T)$  を最大化 ( $T$  を最小化)。
- 内部：質量は無視し、非線形項を最大化。 ( $h$  は外部問題で与える)

外部問題は  $\mathbb{B}^p$  の場合は (質量が無いので) 自明になる (等速度運動)。内部問題は質量が無いので、 $\mathbb{B}^p$  と  $\mathbb{R}^p$  の違いが無く、結論の差は  $h = u(T)$  の外部最大化のみから来る。

8.4. **内部・外部問題の漸近展開.** 各最大化問題について、 $h \rightarrow \infty$  での挙動を第3項まで展開する。どちらも Euler-Lagrange 方程式 (EL) に基づく。

- 外部：EL の対数微分により自励系を得るので、ヘテロクリニック軌道の漸近挙動を求めれば良い。原理的には何項でも展開可能。また、質量項は異なる冪  $|u|^q$  でも、 $p, q > 1$  は非整数でも可能。
- 内部：EL から非線形項の局在化が従う。そこで非線形項の phase  $u^{p'}$  を線形近似 ( $u^{p'} \approx c_1 u + c_2$ ) すると、Liouville 方程式になって解ける。スケール変換後 ( $t \mapsto (p-1)t$ )、近似方程式とその解は

$$\begin{aligned} v &= -\log(1 + e^{-t}), \quad \dot{v} = \frac{1}{1 + e^t}, \quad \ddot{v} = \frac{-1}{(1 + e^t)(1 + e^{-t})} \\ &\implies -\partial_t(\dot{v})^{p-1} = (p-1)e^{pv-(p-1)t}, \quad \ddot{v} = \dot{v}(\dot{v} - 1). \end{aligned} \quad (23)$$

となる。つまり、 $\ddot{v}$  はソリトン (スパイク)、 $\dot{v}$  はキंक (フロント) にあたる。

結論の漸近展開の第1項はソリトンの位置、第2項はソリトンの形状、第3項はソリトンからのズレで与えられる。ズレは線形化作用素を使って求める。

9. 集約パラメータ ( $h \rightarrow \infty$ ) に対する漸近展開

以下、 $M(f, h)$  の  $h \rightarrow \infty$  での挙動を調べ、 $M(f, \infty)$  の方が大きくなる条件 (非存在) を求める。なお小さな  $h$  に対する情報は得られないので、非線形項のカットオフで排除する。

$u(T) = h \rightarrow \infty$  のとき、外部  $t < T$  では非線形項を無視して上昇効率を最大化し、内部  $t > T$  では質量項を無視して非線形項を最大化できる。基本的な道具は、Trudinger-Moser 不等式 ( $\mathbb{B}^p$  上) と、Trudinger-Moser 型の球対称 Sobolev 不等式 (各点評価) で、後者は外部問題 (最速上昇) と同値になる。

以下、 $U := u^{p'}$ ,  $H := h^{p'}$ ,  $\kappa := 2^{p'-1} = (2^{1/p})^{p'}$  とおく。臨界非線形増大度は

$$f(u) = U^{-\rho} e^U, \quad \rho := \begin{cases} 0 & (\mathbb{B}^p \text{ 上の場合}), \\ 1 & (\mathbb{R}^p \text{ 上の場合}). \end{cases} \quad (24)$$

また、指数的に小さい誤差量を次の記号で表す。 $t_{\pm} := \max(\pm t, 0)$  として

$$x(t) = \otimes_t \iff \exists c, C > 0 \text{ (定数)}, \quad |x| \leq C e^{-ct_{\pm}}. \quad (25)$$

対数座標変換から来る指数重み関数を

$$\mathbf{e} := e^{-t} \quad (26)$$

とおく。後の方で使う  $\mathbf{e}$  とは指数が異なるので要注意。

## 10. 外部 (最速上昇) 問題と指数型球対称 SOBOLEV 不等式

$h \rightarrow \infty$  で外部  $t < T$  では非線形項が無視できるので、 $h$  を最大化・ $T$  を最小化する問題になる。これは外部質量の最小化とも見なせて、

$$\mu_{p,q}(h) := \inf\{\langle |u|^q | \mathbf{e} \rangle_{t < 0} \mid u(0) = h, \quad \|\dot{u}\|_{L^p(t < 0)}^p \leq 1/2\} \quad (27)$$

を求める事になる。ただし質量の冪を  $q > 1$  に一般化した。漸近展開は

$$\begin{aligned} \mu_{p,q}(h) &= H^{-q/p} e^{\kappa H + c_{p,q}} [1 + c_1(\kappa H)^{-1} + c_2(\kappa H)^{-2} + O(H^{-3})] \quad (h \rightarrow \infty), \\ \kappa H &= 2^{p'-1} H = (2^{1/p} h)^{p'}, \quad c_1 := -\frac{q^2/p}{2}, \quad c_2 := \frac{q^4/p^2}{8} - \frac{q^3/p + q^4/p^2}{6}. \end{aligned} \quad (28)$$

これを平行移動すれば、今の設定に適用すると ( $\kappa := 2^{p'-1}$ )

$$u(T) = h \gg 1, \quad \|\dot{u}\|_{L^p(t < T)}^p \leq 1/2 \implies H^{-1} e^{\kappa H - T} \lesssim \langle |u|^p | \mathbf{e} \rangle_{t < T} \leq 1. \quad (29)$$

$u(0) = 0$  ( $\mathbb{B}^p$  上の問題) の場合は単純に Hölder より

$$h \leq \|\dot{u}\|_{L^p(t < T)} T^{1/p'} \leq 2^{-1/p} T^{1/p'} \implies \kappa H \leq T. \quad (30)$$

つまりどちらの場合も次の球対称 Sobolev 評価を得る：

$$\text{(RS)} \quad e^{\kappa H - T} \lesssim H^{\rho}. \quad (31)$$

## 11. 内部領域の質量無視と非線形集中

内部質量が(指数的誤差として)無視できるのは、非線形項の指数増大と積分有界性から容易に従う。他方、内部非線形項は  $u = 2h$  に集中する。これは一様凸性不等式

$$\forall p > 1, \quad \forall a, b \geq 0, \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p+b^p}{2} - C_p(a-b)^2(a+b)^{p-2} \quad (32)$$

と (TM), (RS) から従う。実際、 $V := (u-h)_+^{p'}$  とおくと

$$\begin{aligned} U + C(u-2h)^2 U/u^2 &\leq \kappa(V+H), \quad \|\dot{u}\|_p^p \leq 1, \\ \langle U^{-\rho} e^{U+C(u-2h)^2 U/u^2} |\mathbf{e}\rangle_{t>T} &\leq \langle H^{-\rho} e^{\kappa(V+H)} |\mathbf{e}\rangle_{t>T} \lesssim H^{-\rho} e^{\kappa H-T} \lesssim 1. \end{aligned} \quad (33)$$

$(u-2h)^2$  の因子より、 $|u-2h| > h^\delta$  の寄与は  $\otimes_h$  ( $\forall \delta > 0$ )。

更に、もし  $T$  が大きいと内部非線形項が消えてしまうが、その場合、 $u(t > T)$  を定数にして稼いだ運動エネルギーを使って外側非線形項を増幅する変形が可能なので、最大値の考慮からは除外して

$$e^{\kappa H-T} \sim H^\rho \quad (34)$$

に限定して良い。つまり  $T$  の位置は最速上昇と  $O(1)$  しか変わらない。

## 12. 外部領域の非線形項

$u(T_1) = 1$  で  $T_1$  を定め、 $\delta := \|\dot{u}\|_{L^p(t < T_1)}^p$  とおくと、Hölder より

$$\begin{aligned} h-1 &\leq \|\dot{u}\|_{(T_1, T)} |T-T_1|^{1/p'} \leq (1/2-\delta)^{1/p'} |T-T_1|^{1/p'}, \\ \therefore T-T_1 &\geq \kappa H (1-1/h)^{p'} (1-2\delta)^{1-p'}. \end{aligned} \quad (35)$$

$\mathbb{B}^p$  上では  $T_1 > 0$ .  $\mathbb{R}^p$  上の場合、(RS) より

$$1 \geq \langle |u|^p |\mathbf{e}\rangle_{t < T_1} \gtrsim \delta^{p'} e^{\delta^{1-p'} - T_1} \therefore T_1 \geq \delta^{1-p'} + p' \log \delta \gtrsim -1. \quad (36)$$

$T = \kappa H + O(\log H)$  と上の評価を合わせると、どちらの場合も

$$\delta \lesssim 1/h. \quad \therefore T_1 \gtrsim h^{p'-1}. \quad (37)$$

ゆえに (TM) より

$$\langle e^U |\mathbf{e}\rangle_{(T_1, T)} \lesssim e^{-T_1} \lesssim e^{-Ch^{p'-1}} = \otimes_h. \quad (38)$$

つまり外部非線形項においては  $u > 1$  の寄与が指数的に小さい。従って、[12] のように、 $f(u)$  の  $u < 1$  部分をカットすれば外部非線形項は無視できる。

しかし、[12] 以外の(通常)設定では、非線形項をカットしていない。この場合は、 $u \rightarrow +0$  (外部領域)の寄与も入れる必要がある。 $\mathbb{B}^p$  の場合、 $v$  を  $t < T$  での最速上昇とすると

$$v = (2T)^{-1/p} \min(t_+, T), \quad \|\dot{v}\|_{L^p(t < T)}^p = 1/2, \quad \hat{h} := v(T) = 2^{-1/p} T^{1/p'}. \quad (39)$$

$T = \kappa H + \tau$  とおくと  $(0, T)$  上の Hölder の剰余項より、

$$\begin{aligned} F &:= |\dot{u}|^p / \|\dot{u}\|_p^p = 2|\dot{u}|^p, \quad G := 1/\|1\|_{p'}^{p'} = 2|\dot{v}|^p \implies \\ \left\| \frac{(F-G)^2}{F+G} \right\|_1 &\lesssim 1 - \frac{\langle \dot{u} | 1 \rangle}{\|\dot{u}\|_p \|1\|_{p'}} = 1 - 2^{1/p} h T^{-1/p'} \lesssim \tau/T, \\ \left\| \frac{(F-G)^2}{F+G} \right\|_1 &\sim \|\dot{u} - \dot{v}\|^2 \|\dot{u}\| + |\dot{v}|^{p-2} \|\dot{u}\| \gtrsim \|\dot{u} - \dot{v}\|_2^2 T^{-1+2/p} \\ \therefore |u - v| &\lesssim \|\dot{u} - \dot{v}\|_2 t^{1/2} \lesssim (\tau T^{-2/p} t)^{1/2}. \end{aligned} \quad (40)$$

非線形項が  $u \rightarrow 0$  で  $f(u) \approx u^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) とすると、

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\langle u^k - v^k | \mathbf{e} \rangle_{t < T}| \lesssim \tau^{1/2} T^{-k/p} \langle t^{k/2} + t^k | \mathbf{e} \rangle_{t > 0} \lesssim \tau^{1/2} H^{-k/p}. \quad (41)$$

他方、最速上昇の積分は具体的に

$$\langle v^k | \mathbf{e} \rangle_{t < T} = (2T)^{-k/p} \langle t^k | \mathbf{e} \rangle_{(0, T)} = (2T)^{-k/p} k! + \otimes_H \quad (42)$$

より、 $\tilde{v}$  を高さ  $h$  への最速上昇とするとその位置は  $\kappa H = T - \tau$  だから

$$|\langle v^k | \mathbf{e} \rangle_{t < T} - \langle \tilde{v}^k | \mathbf{e} \rangle_{t < \kappa H}| \lesssim T^{-k/p-1} \tau. \quad (43)$$

従って、 $u$  を同じ高さ  $h$  の最速上昇にしたとき外部のズレは

$$|\langle u^k | \mathbf{e} \rangle_{t < T} - \langle \tilde{v}^k | \mathbf{e} \rangle_{t < \kappa H}| \lesssim \tau^{1/2} H^{-k/p} + \tau T^{-k/p-1} \lesssim \tau^{1/2} H^{-k/p}. \quad (44)$$

その一方で、内部非線形項は  $\tau$  の平行移動により  $\sim \tau$  増える。ゆえに  $u$  が最速上昇に勝るには、 $\tau^{1/2} H^{-k/p} \gtrsim \tau$  すなわち  $\tau \lesssim H^{-2k/p}$  が必要で、このとき積分値のズレも  $\lesssim H^{-2k/p}$  となる。これは  $k > p/2$  の場合、展開第2項より小さいので、第2項を求めるには最速上昇で十分。特にこれから [12] と [20] の係数のズレ  $2/e$  が特定できる。 $k > p$  の場合は第3項展開でも最速上昇が採用される。

### 13. 内部非線形項の最大化（漸近展開）

以下、内部非線形積分の最大化を考える。外部最速上昇で与えられる  $T \sim H^{-\rho} e^{\kappa H}$  を  $t = 0$  へ平行移動・リスケールすると

$$\begin{aligned} m(h) &:= \max_u \langle f(u) | \mathbf{e} \rangle_{t > 0}, \quad u(0) = h, \quad \|\dot{u}\|_{L^p(t > 0)}^p \leq 1, \quad \mathbf{e} := e^{-(p-1)t}, \\ f(u) &= e^{\theta(u)}, \quad \theta(u) = (p-1)(U - \kappa H) - \rho \log(U/H) + O(U^{-1}). \end{aligned} \quad (45)$$

ここで  $t \mapsto (p-1)t$  とスケール変更したのは極限ソリトンの正規化の為である ( $p=2$  なら同じ)。対応する Euler-Lagrange 方程式は

$$\text{(EL)} \quad \exists \lambda > 0, \quad -\lambda \partial_t [\dot{u}]^{p-1} = f'(u) \mathbf{e}, \quad u(0) = h, \quad \dot{u}(0) =: a. \quad (46)$$

初期速度  $a > 0$  は未知だが  $h$  で漸近展開できる。実際、まず (EL) に  $\dot{u}, 1, u$  を掛けて積分等式を出し、(TM) と  $u = 2h$  への集中を使えば、 $a \sim h/H$ ,  $\lambda \sim H$  が分かる。更に、 $T_a > 0$  を

$$\dot{u}(T_a) = a/2 \quad (47)$$

で定めれば、(EL) と  $u = 2h$  への集中より、 $f(u) \mathbf{e}$  が  $t = T_a + O(1)$  に指数的局在することが分かる。



## 14. ソリトン近似

非線形項の指数的局在化により、以下の漸近形が分かる。

$$\begin{aligned} u(0) &= h, \quad \dot{u}(T_a) = a/2, \quad \dot{u}(0) = a = h/H[1 + O(H^{-1})], \quad H = h^{p'}, \\ u &= h + a[\min(t, T_a) + C\{t > T_a\} + \otimes_{|t-T_a|}], \end{aligned} \quad (48)$$

但し定数  $C$  はこの時点では不明。(EL) の対数微分より、

$$\begin{aligned} w &:= \dot{u}/a, \quad \ell(u) := \theta'(u) + \theta''/\theta' \implies \dot{w} = w(w-1) + R, \\ R &:= w^{2-p} \int_t^\infty [1 - \frac{a}{p}\ell(u)] \partial_t w^p dt = O(H^{-1}w^2(1-w)). \end{aligned} \quad (49)$$

これを積分してソリトン近似を得る：

$$\begin{aligned} w &= \mathbf{w}_0(t - T_a) + H^{-1}\otimes_{|t-T_a|}, \quad \dot{w} = \dot{\mathbf{w}}_0(t - T_a) + H^{-1}\otimes_{|t-T_a|}, \\ u &= h + a[\mathbf{v}_0(t - T_a) + T_a + H^{-1}\otimes_{T_a-t}], \\ \mathbf{v}_0(t) &:= -\log(1 + e^{-t}), \quad \mathbf{w}_0 := \dot{\mathbf{v}}_0 = (1 + e^t)^{-1}, \quad \dot{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{w}_0(\mathbf{w}_0 - 1). \end{aligned} \quad (50)$$

更に、これで非線形積分  $\langle f(u)|e \rangle_{t>0}$  を第2項まで展開できる。

## 15. 線形化近似

第3項はソリトン周りの線形化方程式を用いて計算できるが、第2項までは全て初等関数で計算できるのに対し、 $u$  の次の展開は重対数関数を含み、具体的に計算できない項が多く出てくる。以下では一般の  $p$  の場合に [12] と異なる手順を示す。ポイントは

- (1) ソリトン中心を  $T_a$  から平行移動してエネルギー制約を満たす形にする。新しい中心  $T_*$  は  $a$  から (ほぼ) 明示的に決まる。このソリトン近似を  $u_0$  とすると、 $u$  が条件付き最大であることから、 $u_a$  からの誤差は2次になり、しかもその2次項は線形化作用素で与えられる。
- (2) 上の2次項の計算は、線形化方程式に対する解作用素を使えば、 $u$  の第2近似を求めなくても、 $\mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0$  だけで実行できる。最終的に  $\langle (1 - \mathbf{w}_0)^2 | \mathbf{v}_0^2 \rangle$  から  $\zeta(3)$  が出てくる。これは  $\mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0$  の多項式の2乗積分で有理数にならない最も単純な形。
- (3)  $u_0$  による近似値から1次展開が出るが、その係数を求める際に  $a$  に対する最大化を使うと、 $a$  と  $h$  の関係式を高次展開しなくて済む。

15.1. ソリトン中心の移動調整.  $\dot{u}$  の中心を  $T_a$  から  $T_* \in \mathbb{R}$  に調整して、近似関数

$$\dot{u}_0 := a\mathbf{w}_0(t - T_*), \quad u_0 := h + \int_0^t \dot{u}_0(s) ds, \quad (51)$$

がエネルギー制約条件を満たすように取る。つまり

$$1 = \|\dot{u}_0\|_{L^p(t>0)}^p = a^p \|\mathbf{w}_0\|_{L^p(t>-T_*)}^p = a^p [-H_{p-1} + T_* + \otimes_{T_*}], \quad (52)$$

ただし  $H_k := \sum_{j=1}^k 1/j$  は調和数。  $a^{-p} = H + O(1)$  より

$$T_* = a^{-p} + H_{p-1} + \otimes_H. \quad (53)$$

$T_a$  でも近似的に条件を満たしていたことから  $T_* = T_a + O(H^{-1})$  で、この平行移動は  $u$  に対する近似精度 ( $O(H^{-1})$ ) には影響しない。

15.2. 非線形積分の2次展開.  $u = u_a + u_1$  において非線形積分を2次展開すると、

$$\langle f(u)|e \rangle = \langle f(u_0)|e \rangle + \langle f'(u)|e|u_1 \rangle - \frac{1}{2}\langle f''(u)|e|u_1^2 \rangle + O(H^{-3}) \quad (54)$$

1次項は(EL)により  $\dot{u}, \dot{u}_1$  の  $p$  次積分に変わり、エネルギー制約条件からその主要項は0。つまり1次項も2次のオーダーになり、元の2次項と併せて極限ソリトンで近似すると、

$$\langle f(u)|e \rangle = \langle f(u_0)|e \rangle + C\langle Lu_1|u_1 \rangle + O(H^{-3}). \quad (55)$$

線形作用素  $L$  はソリトン  $T_*$  を中心とする座標で書けば

$$L := -\partial_t \mathbf{w}_0^{p-2} \partial_t + p \mathbf{w}_0^{p-2} \dot{\mathbf{w}}_0. \quad (56)$$

これは  $\mathbf{v}_0$  の満たす方程式

$$-\partial_t [\dot{\mathbf{v}}_0]^{p-1} = (p-1)e^{p\mathbf{v}_0 - (p-1)t} \quad (57)$$

の線形化作用素である。なお [12] では  $\dot{u}$  に対する方程式の線形化を使っているなのでこの作用素  $L$  は出てこない。

$Lv_1$  に対する近似は(EL)をソリトン近似で展開すれば

$$v_1(t + T_*) = H^{-1} \mathbf{v}_1(t - T_*) + O(H^{-2}), \quad Lv_1 = \mathbf{w}_0^{p-2} \dot{\mathbf{w}}_0 P_2(\mathbf{v}_0) =: g, \quad (58)$$

但し以下、 $k$  次多項式は  $P_k$  で表す(行により異なる)。この解は

$$\mathbf{v}_1 = Rg := \int_{-\infty}^t \begin{vmatrix} \mathbf{k}_0(t) & \mathbf{k}_0(t) \\ \mathbf{k}_1(t) & \mathbf{k}_1(s) \end{vmatrix} g(s) ds, \quad \text{span}\{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1\} = \text{Ker}(L), \quad (59)$$

$$\mathbf{k}_0 := p\mathbf{w}_0 - (p-1), \quad \mathbf{k}_1 := c + (t+F)\mathbf{k}_0, \quad F = \mathbf{w}_0^{2-p} P_{p-2}(\mathbf{w}_0).$$

$\mathbf{k}_0 g =: \dot{G}$  とおくと  $\langle g|\mathbf{k}_0 \rangle = 0$  より  $G \in L_t^1$ , 部分積分で

$$G = P_2(\mathbf{v}_0)(\mathbf{w}_0^{p-1} - \mathbf{w}_0^p) - \frac{1}{p} P_2'(\mathbf{v}_0)(\mathbf{w}_0^p - 1) + \frac{1}{p} P_2''(\mathbf{w}_0^p/p + \dots + \mathbf{w}_0), \quad (60)$$

$$\langle Lv_1|v_1 \rangle = \langle g|Rg \rangle = -2\langle G\dot{G}|t+F \rangle - 2c\langle G|g \rangle = \langle G|G \rangle - 2\langle G|\mathbf{k}_0 g F + cg \rangle.$$

$gF = \dot{\mathbf{w}}_0 P_2(\mathbf{v}_0) P_{p-2}(\mathbf{w}_0)$  だから被積分関数は  $\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0$  の多項式だが、 $\dot{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{w}_0(\mathbf{w}_0 - 1)$  の因子があれば積分は多重調和数  $\in \mathbb{Q}$  になる。その因子が無いのは  $G^2$  内の  $[P_2'(\mathbf{v}_0)(\mathbf{w}_0 - 1)]^2$  のみで、これが  $\zeta(3)$  を与える。

15.3. 近似積分の初速に対する最大化. 近似積分  $\langle f(u_0)|e \rangle$  の第1次係数は2次精度が必要なので、単純に展開すると  $a = \dot{u}(0)$  と  $h = u(0)$  の関係式を更に展開する必要が出てくる。[12] ではこの為にも  $u$  の2次近似を使ったが、これは以下で回避できる。

上の議論では最大化元  $u$  に対して  $a := \dot{u}(0)$  と定めていたが、 $a \sim h/H$  を独立パラメータとしても制約条件を指数誤差で満たす。そこで  $h = a^{1-p} + a\hat{h}$  とおいて、 $\hat{h} = O(1)$  を独立パラメータと見れば、

$$\langle f(u_0)|e \rangle = -e^{H^{p-1}} \langle \mathbf{w}_0^{p-2} \dot{\mathbf{w}}_0 | 1 + \varepsilon P_2(\mathbf{v}_0, \hat{h}) + \varepsilon^2 P_4(\mathbf{v}_0, \hat{h}) \rangle + O(\varepsilon^3), \quad (61)$$

と展開できる。但し  $\varepsilon := a^p = H^{-1}[1 + p'\hat{h}H^{-1} + O(H^{-2})]$ . 積分すると

$$\langle f(u_0)|e \rangle = C + \varepsilon P_2(\hat{h}) + \varepsilon^2 P_4(\hat{h}) + O(\varepsilon^3). \quad (62)$$

真の  $a = \dot{u}(0)$  は最大化元だから、 $P_2(\hat{h})$  の最大点を  $h_0$  とすると  $\hat{h} = h_0 + O(\varepsilon)$  で、この誤差は上の展開に影響しない。つまり

$$\langle f(u_0) | e \rangle = C + \varepsilon \max P_2 + \varepsilon^2 P_4(\hat{h}) + O(\varepsilon^3) \quad (63)$$

なので  $a$  と  $h$  の関係式は  $\hat{h}$  まで求めれば十分で、これはソリトン近似から (比較的容易に) 得られる。

#### REFERENCES

- [1] Shinji Adachi, Kazunaga Tanaka, *Trudinger type inequalities in  $\mathbb{R}^N$  and their best exponents*. Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 7, 2051–2057.
- [2] Adimurthi, O. Druet, *Blow-up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger-Moser inequality*. Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), no. 1-2, 295–322.
- [3] Haïm Brézis, Louis Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 4, 437–477.
- [4] D. M. Cao, D. M. *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in  $\mathbb{R}^2$* . Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), no. 3-4, 407–435.
- [5] Lennart Carleson, Sun-Yung A. Chang, *On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser*. Bull. Sci. Math. (2) **110** (1986), no. 2, 113–127.
- [6] Lu Chen, Guozhen Lu, Maochun Zhu, *Existence and nonexistence of extremals for critical Adams inequalities in  $\mathbb{R}^4$  and Trudinger-Moser inequalities in  $\mathbb{R}^2$* . Adv. Math. **368** (2020), 107143, 61 pp.
- [7] Manassés de Souza, *Some sharp inequalities related to Trudinger-Moser inequality*. J. Math. Anal. Appl. **467** (2018), no. 2, 981–1012.
- [8] João Marcos B. do Ó,  *$N$ -Laplacian equations in  $\mathbb{R}^N$  with critical growth*. Abstr. Appl. Anal. **2** (1997), no. 3-4, 301–315.
- [9] João Marcos do Ó, Manassés de Souza, *Trudinger-Moser inequality on the whole plane and extremal functions*. Commun. Contemp. Math. **18** (2016), no. 5, 1550054, 32 pp.
- [10] Masato Hashizume, *Maximization problem on Trudinger-Moser inequality involving Lebesgue norm*. J. Funct. Anal. **279** (2020), no. 2, 108513, 30 pp.
- [11] Slim Ibrahim, Nader Masmoudi, Kenji Nakanishi, *Trudinger-Moser inequality on the whole plane with the exact growth condition*. J. Eur. Math. Soc. **17** (2015), no. 4, 819–835.
- [12] Slim Ibrahim, Nader Masmoudi, Kenji Nakanishi, Federica Sani, *Sharp threshold nonlinearity for maximizing the Trudinger-Moser inequalities*. J. Funct. Anal. **278** (2020), no. 1, 108302, 52 pp.
- [13] Michinori Ishiwata, *Existence and nonexistence of maximizers for variational problems associated with Trudinger-Moser type inequalities in  $\mathbb{R}^N$* . Math. Ann. **351** (2011), no. 4, 781–804.
- [14] Yuxiang Li, Bernhard Ruf, *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in  $\mathbb{R}^n$* . Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), no. 1, 451–480.
- [15] Gabriele Mancini, Pierre-Damien Thizy, *Non-existence of extremals for the Adimurthi-Druet inequality*. J. Differential Equations **266** (2019), no. 2-3, 1051–1072.
- [16] Nader Masmoudi, Federica Sani, *Trudinger-Moser inequalities with the exact growth condition in  $\mathbb{R}^N$  and applications*. Comm. Partial Differential Equations **40** (2015), no. 8, 1408–1440.
- [17] J. Moser, *A sharp form of an inequality of N. Trudinger*. Indiana Univ. Math. J. **20** (1971) 1077–1092.
- [18] Alexander R. Pruss, *Nonexistence of maxima for perturbations of some inequalities with critical growth*. Canad. Math. Bull. **39** (1996), no. 2, 227–237.
- [19] Bernhard Ruf, *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in  $\mathbb{R}^2$* . J. Funct. Anal. **219** (2005), no. 2, 340–367.
- [20] Pierre-Damien Thizy, *When does a perturbed Moser-Trudinger inequality admit an extremal?* Anal. PDE **13** (2020), no. 5, 1371–1415.