

Split Bregman methodに基づく4階の全変動流問題に対する数値計算

Yoshikazu Giga* and Yuki Ueda†

画像処理や結晶成長の記述に用いられる4階の全変動流問題に対する数値計算を行った。本講演では、2階の全変動問題に適用される計算手法である split Bregman method の枠組みに基づいた新たな数値計算手法を提案し、その計算結果を紹介する。Split Bregman method では、“ L^1 ”部と“ L^2 ”部を持つエネルギーを二つに分割し、それぞれに対する最小化問題で近似を与える極めて効率的な計算手法であり、その収束性も知られている。この枠組みに基づく我々の手法もまた非常に効率的である。また、我々はいくつかの計算例において、厳密解が満たす数学的性質を計算結果が再現していることを確認した。

1 導入

H をヒルベルト空間、 $E: H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を非負, proper, 下半連続かつ凸な汎関数とする。ここで、 E がエネルギーを表すと解釈すると、このエネルギーに対する勾配流

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in \partial_H E(u) \text{ for } t > 0 \quad (1)$$

はエネルギーを最も早く減少させる動きを表す、ここで $\partial_H E(u)$ は汎関数 E の u での劣微分を表す。すなわち、

$$\partial_H E(u) = \{p \in H : E(v) - E(u) \geq (p, v - u)_H \text{ for all } v \in H\}. \quad (2)$$

特に H が L^2 空間、 H^{-1} 空間の場合、(1) をそれぞれ L^2 勾配流、 H^{-1} 勾配流と呼ぶことにする。

画像処理や結晶成長の記述に用いられるいくつかの数理モデルは全変動を含むエネルギーを用いて記述され、 L^2 もしくは H^{-1} 勾配流と関連付けて研究されている。いくつか例を挙げると、Spohn [19] はラフニング転移が起こらない場合 (つまりファセットが現れるような) 結晶成長を記述する数理モデルとして

$$u_t = -\Delta \left(\operatorname{div} \left(\beta \frac{\nabla u}{|\nabla u|} + |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) \right) \quad (3)$$

を提案している、ここで $\beta > 0$, $p > 1$ 。これは以下のエネルギー汎関数に対する H^{-1} 勾配流として記述されることが示されている (Kashima, [11]):

$$E(u) = \beta \int_{\Omega} |Du| + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |Du|^p. \quad (4)$$

画像処理の分野においても、ノイズを除去する目的で全変動を含むエネルギーを応用する。Rudin, Osher, Fatemi により提案された ROF モデル [18] は、与えられた画像データを表す関数 f に対し

$$u = \operatorname{argmin}_{u \in L^2(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |Du| + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \quad (5)$$

を求める。このエネルギー最小化問題は、 L^2 勾配流

$$u_t = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda(u - f) \quad (6)$$

*Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo. E-mail: labgiga@ms.u-tokyo.ac.jp

†Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo. E-mail: yukiueda@ms.u-tokyo.ac.jp

に関連している。また, Osher, Solé, Vese により提案された OSV モデル [16] では

$$u = \operatorname{argmin}_{u \in H^{-1}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |Du| + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right\}, \quad (7)$$

というエネルギー最小化を考えるが, これは H^{-1} 勾配流

$$u_t = -\Delta \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) + \lambda(u - f). \quad (8)$$

に対応している。例として挙げた勾配流は, いずれも $|\nabla u|$ が分母に含まれている部分が存在している。すなわち $\nabla u = 0$ の場合に特異性を持ち, $\partial u / \partial t$ は u の局所的な量だけでは定まらない。いわゆる通常の偏微分方程式ではないため, 解の定義そのものも自明ではない。特に 4 階の問題に対しては, 比較原理も一般には成立しない ([5, Theorem 3.7]) ため, 粘性解の議論を適用することもできない。ただし上に例示した問題に関しては, maximal monotone operator の理論 (例えば [14, 2, 3]) を用いることで解の一意存在を証明できる。

以降, Spohn のモデル, OSV モデル及び 4 階の全変動流

$$u_t = -\Delta \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) \quad (9)$$

について, 周期境界条件を課した場合を考える。この場合の先行研究をいくつか紹介しよう: $H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T}^d)$ における劣微分の特徴付けは [12] で示されている。また, 4 階の全変動流の解の挙動は [5] で解析されている。特に, 初期条件が Lipschitz 連続であっても, 解が即座に不連続になることが証明されている。[6] では 4 階全変動流の解の extinction time についての評価が与えられている。[7] では 4 階全変動流に対し, forward-backward splitting を応用した数値計算スキームが提案されている。[13] では Spohn のモデルに対して緩和パラメータを導入し, 混合有限要素法を適用することで数値計算を行っている。

本講演では, 4 階の全変動流を始めとした問題に対し, split Bregman method (例えば [9]) の枠組みに基づいた新たな数値計算手法を提案する。Split Bregman method は, ROF モデルや 2 階の全変動流に対する数値計算手法として研究されているものであり, また level set method から導出される 2 階の問題に対する適用も研究されている (例えば [15, 17])。我々はこの手法を 4 階の問題に対しても適用することで, 極めて効率的な数値計算手法を導出した。提案された手法は split Bregman method に関する諸結果 (例えば収束性: [4]) をそのまま適用することが可能である。Split Bregman method や 全変動流に関する先行研究については, [5, 8] でも言及されている。なお, 本稿は [8] の内容に基づき, より詳細に紹介したものである。また, 本稿では空間分割幅を定義に含む記号を導入することで, 簡潔な記述が得られている。さらに, Split Bregman 法の説明, 及び Spohn のモデルに対しての Shrinkage operator の導出過程を詳しく述べる。数値計算例について, [8] は $\tau = O(h^3)$ とした結果を紹介しているが, ここでは $\tau = O(h^4)$ とした際の計算結果を挙げる。

2 トーラス上での全変動流れ

まず, $H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})$ を導入するために, トーラス上での Fourier 解析を振り返る。本講演では, 1 次元のトーラス \mathbb{T} を周期境界条件付きの区間 $[0, 1]$ と同一視することにする。 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ に対する (一般化) フーリエ変換 (例えば [10, Chapter 5]) により, フーリエ係数 $\widehat{f}_{\mathbb{T}}(\xi) \in \mathbb{C}$ を

$$\widehat{f}_{\mathbb{T}}(\xi) = \langle f, e^{-2\pi i \xi x} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{T}), \mathcal{D}(\mathbb{T})} \quad (10)$$

により定義する。通常のフーリエ変換と同様に,

$$\widehat{df/dx}_{\mathbb{T}}(\xi) = \left\langle f, \frac{d}{dx} e^{-2\pi i \xi x} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{T}), \mathcal{D}(\mathbb{T})} = -2\pi i \xi \widehat{f}_{\mathbb{T}}(\xi) \text{ for all } f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}), \quad (11)$$

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_T(\xi) e^{2\pi i \xi x} \text{ for all } f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \quad (12)$$

が成立する. さらに, フーリエ係数を用いることで

$$L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_T(\xi)|^2 < \infty \right\}, \quad (13)$$

$$H^1(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \xi^2 |\widehat{f}_T(\xi)|^2 < \infty \right\} = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} (1 + \xi^2) |\widehat{f}_T(\xi)|^2 < \infty \right\}, \quad (14)$$

$$H^{-1}(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} (1 + \xi^2)^{-1} |\widehat{f}_T(\xi)|^2 < \infty \right\}. \quad (15)$$

と表すことができる. 以降, 簡単のため

$$\langle f, g \rangle_{H^{-1}(\mathbb{T}), H^1(\mathbb{T})} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_T(\xi) \overline{\widehat{g}_T(\xi)} = \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (16)$$

という表記を用いることにする.

周期境界条件に留意して

$$L^2_{\text{av}}(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \int_{\mathbb{T}} f(x) dx = 0 \right\}, \quad (17a)$$

$$H^1_{\text{av}}(\mathbb{T}) = L^2_{\text{av}}(\mathbb{T}) \cap H^1(\mathbb{T}) = \left\{ f \in H^1(\mathbb{T}) : \int_{\mathbb{T}} f(x) dx = 0 \right\}, \quad (17b)$$

$$H^{-1}_{\text{av}}(\mathbb{T}) = \{ f \in H^{-1}(\mathbb{T}) : \langle f, 1 \rangle_{H^{-1}(\mathbb{T}), H^1(\mathbb{T})} = 0 \}. \quad (17c)$$

と定めると, これはフーリエ係数を用いて以下のように表すことができる:

$$L^2_{\text{av}}(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) : \sum_{\xi \neq 0} |\widehat{f}_T(\xi)|^2 < \infty \text{ and } \widehat{f}_T(0) = 0 \right\}, \quad (18)$$

$$H^1_{\text{av}}(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) : \sum_{\xi \neq 0} \xi^2 |\widehat{f}_T(\xi)|^2 < \infty \text{ and } \widehat{f}_T(0) = 0 \right\}, \quad (19)$$

$$H^{-1}_{\text{av}}(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) : \sum_{\xi \neq 0} \xi^{-2} |\widehat{f}_T(\xi)|^2 < \infty \text{ and } \widehat{f}_T(0) = 0 \right\}. \quad (20)$$

また, 任意の $u \in H^1_{\text{av}}(\mathbb{T})$ に対し,

$$-\Delta u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} (\widehat{-\Delta u})_T(\xi) e^{2\pi i \xi x} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} 4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}_T(\xi) e^{2\pi i \xi x} \quad (21)$$

が成立する. ここで $\widehat{f}_T(\xi) = 4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}_T(\xi)$ とおくと, 右辺は $f \in H^{-1}_{\text{av}}(\mathbb{T})$ を与える. 従って,

$$\Delta u = f \iff u = (-\Delta_{\text{av}})^{-1} f \quad (22)$$

なる等長作用素 $(-\Delta_{\text{av}})^{-1} : H_{\text{av}}^1(\mathbb{T}) \rightarrow H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})$ を定義することができる。これを用いると

$$\|f\|_{H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})} = \|(-\Delta_{\text{av}})^{-1}f\|_{H_{\text{av}}^1(\mathbb{T})} = \|\nabla(-\Delta_{\text{av}})^{-1}f\|_{L^2(\mathbb{T})} \text{ for all } f \in H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T}) \quad (23)$$

が成立する。

次にトーラス上での全変動を考える。

$$\int_{\mathbb{T}} |Df| = \text{ess sup} \left\{ \sum_{j=1}^M |f(x_j) - f(x_{j-1})| : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = 1 \right\}, \quad (24)$$

ただし sup は $[0, 1]$ の全ての分割に対して考えている。また、有界変動関数を

$$BV(\mathbb{T}) = \left\{ v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) : \int_{\mathbb{T}} |Dv| < \infty \right\} \quad (25)$$

と定める。これらの定義において、 D は超関数の意味での微分 (distributional derivative) と解釈され、また Df は符号付きボレル測度と同一視される。以上を用いて、全変動エネルギー汎関数を次で定める： $H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})$ 上で非負、proper、下半連続かつ凸な汎関数 $E : H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{T} \cup \{\infty\}$ として

$$E(v) = \begin{cases} \int_{\mathbb{T}} |Dv| & \text{if } v \in BV(\mathbb{T}) \cap H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T}), \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (26)$$

このエネルギーに対する勾配流を考えると

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = -\Delta \left(\text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) \in -\partial_{H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})} E(u(t)) & \text{for a.e. } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T}), \end{cases} \quad (27)$$

が得られる、ここで $-\partial_{H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})}$ は劣微分である。

3 離散化

全変動エネルギーに対する $H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})$ 勾配流として得られた式 (27) に対し、時間について後退オイラー法での近似を適用する。時間ステップサイズ $\tau > 0$ に対し $t_k = k\tau$ と定め、

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} \in -\partial_{H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})} E(u^{k+1}) \quad (28)$$

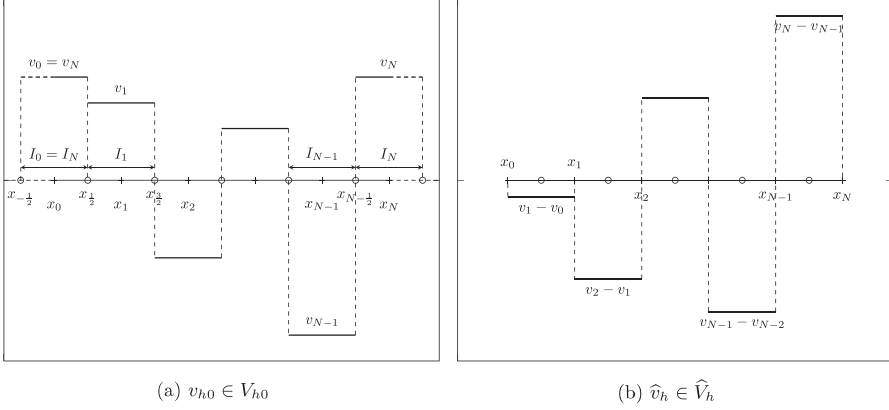
を考える。これを最小化問題として捉え直すと

$$u^{k+1} = \operatorname{argmin}_{u \in H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})} \left\{ E(u) + \frac{1}{2\tau} \|u - u^k\|_{H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})}^2 \right\}. \quad (29)$$

ここで E が凸であることから、与えられた $u^k \in H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})$ に対し、この最小化問題の解 u^{k+1} はただ一つ存在する。さらに $d = Du$ を導入することで、

$$u^{k+1} = \operatorname{argmin}_{u \in H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})} \left\{ \int_{\mathbb{T}} |d| + \frac{1}{2\tau} \|u - u^k\|_{H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})}^2 : d = Du \right\} \quad (30)$$

という問題を考える。

Figure 1: 関数空間 V_{h0} と \hat{V}_h の元の具体例

さらに我々は区分的定数関数による空間離散化を用いる: トーラス \mathbb{T} を周期境界条件付きの区間 $[0, 1]$ と同一視し, $N \in \mathbb{N}$ を分割数, $h = 1/N$ を分割幅, 区間 $I = [0, 1]$ 上の点 $x_n = nh$, $x_{n+1/2} = (n + 1/2)h$ と, 区間

$$I_n = [x_{n-1/2}, x_{n+1/2}), \quad I_{n+1/2} = [x_n, x_{n+1}) \quad (31)$$

を定める. また, 区分的定数関数の空間

$$V_h = \{v_h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} : v_h|_{I_n} \in \mathbb{P}_0(I_n) \text{ for all } n = 0, \dots, N\} \quad (32a)$$

$$V_{h0} = \left\{ v_h = \sum_{n=1}^N v_n \mathbf{1}_{I_n} \in V_h : \sum_{n=1}^N v_n = 0 \right\}, \quad (32b)$$

$$\hat{V}_h = \{d_h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : d_h|_{I_{n+1/2}} \in \mathbb{P}_0(I_{n+1/2}) \text{ for all } n = 0, \dots, N\} \quad (32c)$$

を定める. これらを用いて $u^k \approx u_h^k \in V_{h0} \subset H_{av}^{-1}(\mathbb{T})$ と近似し, 制約条件 $d = Du$ は

$$D_h : \sum_{n=1}^N v_n \mathbf{1}_{I_n} \mapsto \sum_{n=1}^N \frac{v_n - v_{n-1}}{h} \mathbf{1}_{I_{n-1/2}} \quad (33)$$

を用いて $d_h = D_h u_h \in \hat{V}_h$ により近似する.

これらの近似に基づき,

$$u_h^{k+1} = \operatorname{argmin}_{u_h \in V_{h0}} \left\{ \int_I |d_h| dx + \frac{\tau^{-1}}{2} \|u_h - u_h^k\|_{H_{av}^{-1}(\mathbb{T})}^2 : d_h = D_h u_h \right\} \quad (34)$$

という問題を考える. さらに我々は, 制約条件の部分ペナルティ一項に置き換える: 2つの区分的定数関数 $u_h^{k+1} \approx u^{k+1}$ 及び $d_h^{k+1} \approx Du^{k+1}$ を

$$(u_h^{k+1}, d_h^{k+1}) = \operatorname{argmin}_{u_h \in V_{h0}, d_h \in \hat{V}_h} \left\{ \|d_h\|_{L^1(I)} + \frac{\tau^{-1}}{2} \|u_h - u_h^k\|_{H_{av}^{-1}(\mathbb{T})}^2 + \frac{\mu}{2} \|d_h - D_h u_h\|_{L^2(I)}^2 \right\} \quad (35)$$

の解として求める, ここで $\mu > 0$ はペナルティパラメータである. このようにして, 時間および空間について離散化された問題を構成する.

4 行列, ベクトルを用いた表記

離散化により得られた問題 (35) に対し, split Bregman 法を適用したい. そのために, まずは式を行列, ベクトルを用いた形式に書き直す. 与えられた $u_h \in V_{h0}$, $d_h \in \widehat{V}_h$ に対し

$$u_h = \sum_{n=1}^N u_n \mathbf{1}_{I_n} \in V_{h0}, \quad d_h = \sum_{n=1}^N d_n \mathbf{1}_{I_{n-1/2}} \in \widehat{V}_h \quad (36)$$

という表現ができる. これを基に,

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{N-1})^T \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad \mathbf{d} = (d_1, \dots, d_N)^T \in \mathbb{R}^N \quad (37)$$

というベクトルを定義する. また,

$$u_N = - \sum_{n=1}^{N-1} u_n \text{ for all } u_h \in V_{h0} \quad (38)$$

であることに注目し, (周期境界条件を考慮せず) u_h の要素全てを並べたベクトルを $\tilde{\mathbf{u}} = R\mathbf{u}$ と表す, ここで

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)} \quad (39)$$

は周期境界条件を考慮するために導入する行列である. 我々はこれに加えて, R の疑似逆行列

$$L = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} N-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & N-1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & N-1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N} \quad (40)$$

を用いることで, 周期境界条件を考慮した離散ラプラシアンを求める.

まず, 周期境界条件を考慮しない離散 gradient

$$\tilde{\nabla}_h = h^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1. \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (41)$$

に対し, $\nabla_h = \tilde{\nabla}_h R$ と定める. これは $\nabla_h \mathbf{u} = \tilde{\nabla}_h \tilde{\mathbf{u}}$ を満たし, 従って周期境界条件を考慮した離散 gradient になっている. 次に, 周期境界条件を考慮しない離散ラプラシアンが, 一般に $-\tilde{\Delta}_h = \tilde{\nabla}_h^T \tilde{\nabla}_h$ と定められることに注目し,

$$-\Delta_h = L \tilde{\nabla}_h^T \tilde{\nabla}_h R \quad (42)$$

と定める. これが周期境界条件を考慮した離散ラプラシアンである. 通常の離散ラプラシアンが $\det(\tilde{\Delta}_h) = 0$ となる (つまり逆行列を持たない) 一方で, $\det(\Delta_h) \neq 0$ であることを確認できる. このことから, 我々は逆ラプラシアン $(-\Delta_{av})^{-1}$ に対する離散近似として, 離散ラプラシアンの逆行列 $(-\Delta_h)^{-1}$ を用いることができる.

ここまでの記号を用いて, 離散化により得られた問題 (35) を書き直す. まず,

$$\|d_h\|_{L^1(I)} = h \|\mathbf{d}\|_1, \quad \frac{\mu}{2} \|d_h - D_h u_h\|_{L^2(I)}^2 = \frac{\mu h}{2} \|\mathbf{d} - \nabla_h \mathbf{u}\|_2^2 \quad (43)$$

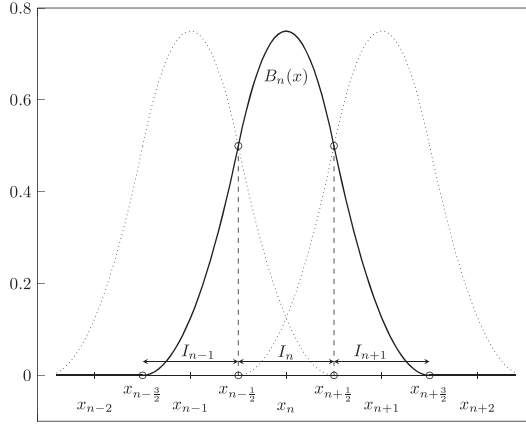


Figure 2: 2次 B-spline 基底関数

が成立する. $\|u_h - u_h^k\|_{H_{av}^{-1}(\mathbb{T})}^2 = \|\nabla(-\Delta_{av})^{-1}(u_h - u_h^k)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$ は以下のようにして計算する: まず, $(-\Delta_{av})^{-1}(u_h - u_h^k)$ は, 2階微分すると区分的定数関数になるものであり, 従って2次の B-spline 基底関数 (図 2)

$$B_n(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{n-\frac{3}{2}})^2}{2h^2} & \text{if } x \in I_{n-1}, \\ \frac{(x - x_{n-\frac{1}{2}})(x_{n+\frac{1}{2}} - x)}{h^2} + \frac{1}{2} & \text{if } x \in I_n, \\ \frac{(x_{n+\frac{3}{2}} - x)^2}{2h^2} & \text{if } x \in I_{n+1}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (44)$$

たちの線形結合で記述することができる. これを1階微分したものは区分的線形関数であり, 従って $\nabla(-\Delta_{av})^{-1}(u_h - u_h^k)$ は区分的線形関数の基底関数 $\varphi_n(x)$ たちの線形結合で記述される. この L^2 ノルムは, 第 ij 成分が

$$m_{ij} = \int_{\mathbb{T}} \varphi_i \varphi_j \, dx \quad (45)$$

となる行列 M を用いることで, 以下のように記述できる:

$$\frac{\tau^{-1}}{2} \|u_h - u_h^k\|_{H_{av}^{-1}(\mathbb{T})}^2 = \frac{\tau^{-1}}{2} \|\sqrt{M} \nabla_h (-\Delta_h)^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)\|_2^2 \quad (46)$$

ここで, \sqrt{M} は $M = \sqrt{M}^T \sqrt{M}$ を満たす行列であり, 今回の場合は $a = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$, $b = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$ を用いて

$$T = \begin{pmatrix} a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \sqrt{M} = \sqrt{h} T \quad (47)$$

と表すことができる. ただし実際には

$$\begin{aligned} \frac{\tau^{-1}}{2} \|\sqrt{M} \nabla_h (-\Delta_h)^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)\|_2^2 &= \frac{\tau^{-1} h}{2} \|T \nabla_h (-\Delta_h)^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)\|_2^2 \\ &\approx \frac{\tau^{-1} h}{2} \|\nabla_h (-\Delta_h)^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)\|_2^2 \end{aligned} \quad (48)$$

と違って計算しても, 計算結果は大きく変わらない.

以上をまとめることで, 我々は得られた問題 (35) に対応する行列, ベクトルを用いた表現として

$$(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{d}^{k+1}) = \underset{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N-1}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|\mathbf{d}\|_1 + \frac{\tau^{-1}}{2} \|K(\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{d} - \nabla_h \mathbf{u}\|_2^2 \right\}, \quad (49)$$

を得る, ここで $K = \nabla_h (-\Delta_h)^{-1}$, もしくは $T \nabla_h (-\Delta_h)^{-1}$. なお, 我々は T^T ではなく T を採用しているが, こちらの方が $T \nabla_h$ の対称性がより良いと考えられる.

5 Split Bregman 法

我々はこの問題に対し split Bregman method に基づき, (u_h^{k+1}, d_h^{k+1}) を反復法により決定する. すなわち $(u_h^{k,m}, d_h^{k,m})$ から $(u_h^{k,m+1}, d_h^{k,m+1})$ を決定するアルゴリズムを考え, 十分大きい M について $(u_h^{k+1}, d_h^{k+1}) = (u_h^{k,M}, d_h^{k,M})$ とみなす. 具体的には, ノイズ $b_h^{k,m+1} = b_h^{k,m} - d_h^{k,m+1} + D_h u_h^{k,m+1}$ を導入し, $(u_h^{k,m+1}, d_h^{k,m+1})$ を決定する際に $b_h^{k,m+1}$ が小さくなることを要請する. この反復により $b_h^{k,M}$ が十分小さくなれば, これと $b_h^{k,M-1}$ の差である $b_h^{k,M-1} - b_h^{k,M} = d_h^{k,M} - D_h u_h^{k,M} = d_h^{k+1} - D_h u_h^{k+1}$ も十分小さくなることが期待でき, 制約条件 $d = Du$ の近似が自然と達成されるのである.

我々の提案手法について述べる前に, 抽象的な問題に対する Bregman 法及び split Bregman 法のアイデアを確認しよう. 最初に,

$$E(u) + \mu J(u) \quad (50)$$

を最小化する問題を考える, ここでは簡単のため, 適切な汎関数 E, J がヒルベルト空間 H 上で定義されているとする. Bregman [1] は, 与えられた u^m に対し, Bregman 距離

$$D_E^p(u, u^m) = E(u) - E(u^m) - (p^m, u - u^m)_H \quad (51)$$

を導入することで, この最小化問題に対する反復解法を提案している, ただし $m \geq 1$ に対し $p^m \in \partial_H E(u^m)$ であり, 従って $D_E^p(u, u^m) \geq 0$ が成立する. 実際にはこれに $E(u^m)$ を加えたものを最小化する u を探す: つまり,

$$\begin{aligned} u^{m+1} &= \underset{u}{\operatorname{argmin}} \{ D_E^p(u, u^m) + \mu J(u) \} \\ &= \underset{u}{\operatorname{argmin}} \{ E(u) - (p^m, u - u^m)_H + \mu J(u) \} \end{aligned} \quad (52)$$

により u^m を更新し, $u^{m+1} \approx u^m$ となったならば $(p^m, u^{m+1} - u^m)_H \approx 0$ なので u^{m+1} が $E(u) + \mu J(u)$ の最小化を近似的に達成していると思うことができるのである. なお, $p^{m+1} \in \partial_H E(u^{m+1})$ であるが, 一方で u^{m+1} が最小化問題 (52) の解であることから $0 \in \partial_H (D_E^p(\cdot, u^m) + \mu J(\cdot))(u^{m+1})$ が成立し, ここから $p^m - \mu \nabla J(u^{m+1}) \in \partial_H E(u^{m+1})$ が得られる. これを基に, Bregman の提案手法では $p^{m+1} = p^m - \mu \nabla J(u^{m+1})$ と更新する (簡単のため $p^0 = 0$ という状況を考えることにする). 特に線形作用素 A に対し $J(u) = \frac{1}{2} \|Au - b\|_H^2$ となっているときは

$$\begin{cases} u^{m+1} = \underset{u \in H}{\operatorname{argmin}} \left\{ E(u) - (p^m, u - u^m)_H + \frac{\mu}{2} \|Au - b\|_H^2 \right\} \\ p^{m+1} = p^m - \mu A^*(Au^{m+1} - b) \end{cases} \quad (53)$$

という反復計算をすることになるが、実はこれは

$$\begin{cases} u^{m+1} = \operatorname{argmin}_{u \in H} \left\{ E(u) + \frac{\mu}{2} \|Au - b^m\|_H^2 \right\} \\ b^{m+1} = b + b^m - Au^{m+1} \end{cases} \quad (54)$$

と同値である (例えば $b^0 = b$ とする). 実際, これは以下のように帰納法で証明することができる:

$$\left(E(u) - (p^m, u - u^m)_H + \frac{\mu}{2} \|Au - b\|_H^2 \right) - \left(E(u) + \frac{\mu}{2} \|Au - b^m\|_H^2 \right) \quad (55)$$

が u に依存しないと仮定する ($k = 0$ での成立はよいものとする). 式を展開して余計な項を省くと, この仮定は

$$\mu(Au, b^m - b)_H - (p^m, u)_H \quad (56)$$

が u に依存しないことと同値である. これを用いると

$$\begin{aligned} & \left(E(u) - (p^{m+1}, u - u^{m+1})_H + \frac{\mu}{2} \|Au - b\|_H^2 \right) - \left(E(u) + \frac{\mu}{2} \|Au - b^{m+1}\|_H^2 \right) \\ &= \mu(Au, b^{m+1} - b)_H - (p^{m+1}, u)_H + \frac{\mu}{2} (\|b\|_H^2 - \|b^{m+1}\|_H^2) + (p^{m+1}, u^{m+1})_H \\ &= \mu(Au, b^m - Au^{m+1})_H - (p^m - \mu A^*(Au^{m+1} - b), u)_H + \frac{\mu}{2} (\|b\|_H^2 - \|b^{m+1}\|_H^2) + (p^{m+1}, u^{m+1})_H \\ &= \mu(Au, b^m - b) - (p^m, u)_H + \frac{\mu}{2} (\|b\|_H^2 - \|b^{m+1}\|_H^2) + (p^{m+1}, u^{m+1})_H \end{aligned}$$

もやはり u に依存していない. 帰納法により, 2つの最小化問題 (53), (54) は汎関数が定数分違うだけであることが証明される.

Goldstein と Osher [9] はこのアイデアに基づき, 2つのベクトル \mathbf{u} , \mathbf{d} に関する最小化問題

$$\|\mathbf{d}\|_1 + H(\mathbf{u}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{d} - J(\mathbf{u})\|_2^2 \quad (57)$$

に対する Bregman 反復を提案している: $E(\mathbf{u}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{d}\|_1 + H(\mathbf{u})$, $A(\mathbf{u}, \mathbf{d}) = \mathbf{d} - J(\mathbf{u})$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ とおいて Bregman 法を適用することで

$$\begin{cases} (\mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{d}^{m+1}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u}, \mathbf{d}} \left\{ E(\mathbf{u}, \mathbf{d}) + \frac{\mu}{2} \|A(\mathbf{u}, \mathbf{d}) - \mathbf{b}^m\|_2^2 \right\}, \\ \mathbf{b}^{m+1} = \mathbf{b}^m - A(\mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{d}^{m+1}). \end{cases} \quad (58)$$

という反復解法が得られる. ここで, split Bregman 法は式 (58) の上の最小化問題を \mathbf{u}^{m+1} , \mathbf{d}^{m+1} それぞれに関する 2つの最小化問題に分割することにより導入される:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{m+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u}} \left\{ H(\mathbf{u}) + \frac{\mu}{2} \|A(\mathbf{u}, \mathbf{d}^m) - \mathbf{b}^m\|_2^2 \right\}, \\ \mathbf{d}^{m+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{d}} \left\{ \|\mathbf{d}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|A(\mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{d}) - \mathbf{b}^m\|_2^2 \right\}. \end{cases} \quad (59)$$

これらの内, 上の最小化問題は解くことができるであろう (実際, H や J に対して適切な仮定を置けば陽に解くことも可能である). 下の最小化問題に対しては, 対応するオイラー・ラグランジュ方程式

$$\left(\frac{d_i^{m+1}}{|d_i^{m+1}|} \right)_i + \mu(\mathbf{d}^{m+1} - J(\mathbf{u}^{m+1}) - \mathbf{b}^m) = 0 \quad (60)$$

を考える, ここで d_i^{m+1} はベクトル \mathbf{d}^{m+1} の第 i 成分である. これを解くことで

$$d_i^{m+1} = \operatorname{shrink}(\rho_i^{m+1}, \mu^{-1}) = \frac{\rho_i^{m+1}}{|\rho_i^{m+1}|} \max \left\{ |\rho_i^{m+1}| - \frac{1}{\mu}, 0 \right\} \quad (61)$$

が得られる, ただし $\rho_i^{m+1} = (J(\mathbf{u}^{m+1}) + \mathbf{b}^m)_i$. これが split Bregman 法のアイデアであり, 2階の全変動流などに対する効率的な数値解法として応用されている.

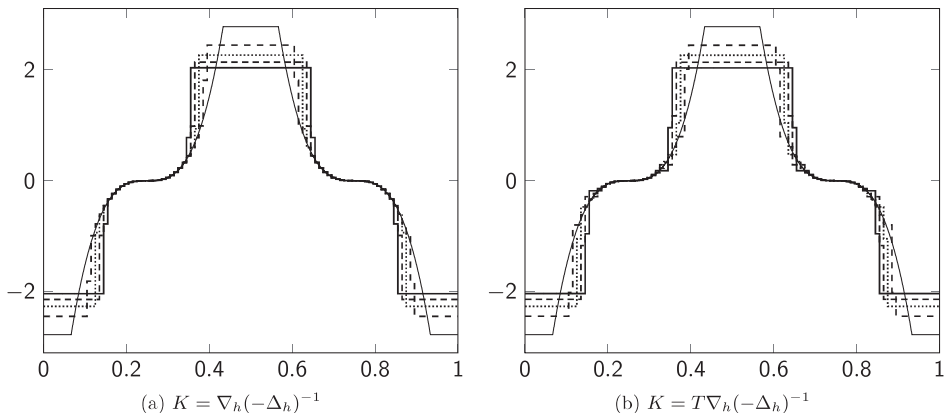


Figure 3: 全変動流問題に対する数値解の時間発展の様子。

6 提案手法

6.1 4階全変動流

我々は split Bregman 法のアイデアを4階の全変動流 (及び ROF モデル), さらには Spohn のモデルに対して適用する. まず, 式 (49) に対して split Bregman 法を適用する:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{k,m+1} = \underset{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N-1}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\tau^{-1}}{2} \|K(\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{d}^{k,m} - \nabla_h \mathbf{u} - \mathbf{b}^{k,m}\|_2^2 \right\}, \\ \mathbf{d}^{k,m+1} = \underset{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|\mathbf{d}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{d} - \nabla_h \mathbf{u}^{k,m+1} - \mathbf{b}^{k,m}\|_2^2 \right\}, \\ \mathbf{b}^{k,m+1} = \mathbf{b}^{k,m} - \mathbf{d}^{k,m+1} + \nabla_h \mathbf{u}^{k,m+1}. \end{cases} \quad (62)$$

ここから, 4階の全変動流問題 (ROF モデルもほぼ同じ) に対する我々の提案手法が導出される: 与えられた \mathbf{u}^k に対し, 例えば $\mathbf{u}^{k,0} = \mathbf{u}^k$, $\mathbf{d}^{k,0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b}^{k,0} = \mathbf{0}$ とし, 以下の反復法を解く,

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{k,m+1} = (\tau^{-1} K^T K + \mu \nabla_h^T \nabla_h)^{-1} (\tau^{-1} K^T K \mathbf{u}^k + \mu \nabla_h^T (\mathbf{d}^{k,m} - \mathbf{b}^{k,m})), \\ (\mathbf{d}^{k,m+1})_i = \operatorname{shrink}(\rho_i^{k,m+1}, \mu^{-1}), \\ \mathbf{b}^{k,m+1} = \mathbf{b}^{k,m} - \mathbf{d}^{k,m+1} + \nabla_h \mathbf{u}^{k,m+1}, \end{cases} \quad (63)$$

ただし $\rho_i^{k,m+1} = (\nabla_h \mathbf{u}^{k,m+1} + \mathbf{b}^{k,m})_i$. これにより, $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^{k,M}$ を決定することで, ある時間ステップでの近似解 \mathbf{u}_h^k から次の時間ステップにおける近似解 \mathbf{u}_h^{k+1} が得られるのである.

数値例を図3に示す. 数学解析の結果から, 解はファセットを維持しつつ不連続になることが知られているが, 数値解では勾配が非常に大きくなることにより, この不連続性を近似的に表現することができている.

6.2 Spohn のモデル

また, 我々のアイデアは Spohn のモデルに対しても適用可能である. Spohn のモデルのエネルギー汎関数

$$E(u) = \beta \int_{\Omega} |Du| + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |Du|^p. \quad (64)$$

に対する $H_{\text{av}}^{-1}(\mathbb{T})$ 勾配流に対し, 時間について後退オイラー法, 空間について区分的定数関数での離散化を行うと

$$(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{d}^{k+1}) = \underset{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N-1}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \left\{ \beta \|\mathbf{d}\|_1 + \frac{1}{p} \|\mathbf{d}\|_p^p + \frac{\tau^{-1}}{2} \|K(\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{d} - \nabla_h \mathbf{u}\|_2^2 \right\} \quad (65)$$

が得られる. これに split Bregman 法を適用すると

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{k,m+1} = \underset{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N-1}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\tau^{-1}}{2} \|K(\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{d}^{k,m} - \nabla_h \mathbf{u} - \mathbf{b}^{k,m}\|_2^2 \right\}, \\ \mathbf{d}^{k,m+1} = \underset{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \left\{ \beta \|\mathbf{d}\|_1 + \frac{1}{p} \|\mathbf{d}\|_p^p + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{d} - \nabla_h \mathbf{u}^{k,m+1} - \mathbf{b}^{k,m}\|_2^2 \right\}, \\ \mathbf{b}^{k,m+1} = \mathbf{b}^{k,m} - \mathbf{d}^{k,m+1} + \nabla_h \mathbf{u}^{k,m+1}. \end{cases} \quad (66)$$

$\mathbf{u}^{k,m+1}$ に関する最小化問題は 4 階の全変動流に対するそれと同じである. 一方で, $\mathbf{d}^{k,m+1}$ に関する最小化問題は, 対応するオイラー・ラグランジュ方程式から考える:

$$\beta \left(\frac{d_i^{k,m+1}}{|d_i^{k,m+1}|} \right)_i + \left(d_i^{k,m+1} |d_i^{k,m+1}|^{p-2} \right)_i + \mu (\mathbf{d}^{k,m+1} - \nabla_h \mathbf{u}^{k,m+1} - \mathbf{b}^{k,m}) = 0. \quad (67)$$

ここでは $p = 3$ の場合に限りこれを解いてみよう. 記号の簡単のために $x = d_i^{k,m+1}$ とおくと

$$\beta \frac{x}{|x|} + x|x| + \mu(x - \rho_i^{k,m+1}) = 0 \quad (68)$$

となる. ここで

$$\beta \frac{x}{|x|} + \mu(x - \rho_i^{k,m+1}) = 0 \iff x = \operatorname{shrink}(\rho_i^{k,m+1}, \beta\mu^{-1}) \quad (69)$$

に注意すると, 式 (68) は

$$x|x| + \mu(x - \operatorname{shrink}(\rho_i^{k,m+1}, \beta\mu^{-1})) = 0 \quad (70)$$

と書き直すことができる. x の符号に注意してこれを解くことで

$$\begin{aligned} x &= \frac{\rho_i^{k,m+1}}{|\rho_i^{k,m+1}|} \cdot \frac{1}{2} \left(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\mu \frac{\rho_i^{k,m+1}}{|\rho_i^{k,m+1}|} \operatorname{shrink}(\rho_i^{k,m+1}, \beta\mu^{-1})} \right) \\ &= \frac{\mu \rho_i^{k,m+1}}{2|\rho_i^{k,m+1}|} \left(-1 + \sqrt{1 + 4\mu^{-1} \max\{|\rho_i^{k,m+1}| - \beta\mu^{-1}, 0\}} \right) \end{aligned} \quad (71)$$

が得られる. 以上をまとめると, $p = 3$ の場合の Spohn のモデルに対する我々の提案手法は

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{k,m+1} = (\tau^{-1} K^T K + \mu \nabla_h^T \nabla_h)^{-1} (\tau^{-1} K^T K \mathbf{u}^k + \mu \nabla_h^T (\mathbf{d}^{k,m} - \mathbf{b}^{k,m})), \\ (\mathbf{d}^{k,m+1})_i = \frac{\mu \rho_i^{k,m+1}}{2|\rho_i^{k,m+1}|} \left(-1 + \sqrt{1 + 4\mu^{-1} \max\{|\rho_i^{k,m+1}| - \beta\mu^{-1}, 0\}} \right), \\ \mathbf{b}^{k,m+1} = \mathbf{b}^{k,m} - \mathbf{d}^{k,m+1} + \nabla_h \mathbf{u}^{k,m+1}. \end{cases} \quad (72)$$

ただし $\rho_i^{k,m+1} = (\nabla_h \mathbf{u}^{k,m+1} + \mathbf{b}^{k,m})_i$.

6.3 2次元の場合への拡張

さらに我々の提案手法は2次元の場合に拡張することも可能である. 異方的 (anisotropic), 等方的 (isotropic) な場合の4階全変動流はそれぞれ

$$u_t = -\Delta \left(\operatorname{div} \left(\frac{\partial_x u}{|\partial_x u|}, \frac{\partial_y u}{|\partial_y u|} \right) \right), \quad u_t = -\Delta \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) \quad (73)$$

となるが, これに対する離散化は x, y それぞれに対する離散 gradient ∇_{xh}, ∇_{yh} を用いて表現することができる. 1次元の場合と同様に行列, ベクトルを用いた表記を考えると

$$(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{d}_x^{k+1}, \mathbf{d}_y^{k+1}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u}, \mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y} \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y) + \frac{\tau^{-1}}{2} (\|K_x(\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)\|_2^2 + \|K_y(\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)\|_2^2) \\ + \frac{\mu}{2} (\|\mathbf{d}_x - \nabla_{xh}\mathbf{u}^k\|_2^2 + \|\mathbf{d}_y - \nabla_{yh}\mathbf{u}^k\|_2^2) \end{array} \right\} \quad (74)$$

となる, ここで $K_x = \nabla_{xh}(-\Delta h)^{-1}$, $K_y = \nabla_{yh}(-\Delta h)^{-1}$,

$$\Phi(\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y) = \begin{cases} \|\mathbf{d}_x\|_1 + \|\mathbf{d}_y\|_1 & \text{for anisotropic TV flow,} \\ \|\mathbf{d}_{xy}\|_1 & \text{for isotropic TV flow} \end{cases} \quad (75)$$

であり, また \mathbf{d}_{xy} は $(\mathbf{d}_{xy})_i = \sqrt{(\mathbf{d}_x)_i^2 + (\mathbf{d}_y)_i^2}$ により定める. ここで split Bregman 法を適用すると,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{k,m+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u}} \left\{ \frac{\tau^{-1}}{2} (\|K_x(\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)\|_2^2 + \|K_y(\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)\|_2^2) \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} (\|\mathbf{d}_x^{k,m} - \nabla_{xh}\mathbf{u}^k - \mathbf{b}_x^{k,m}\|_2^2 + \|\mathbf{d}_y^{k,m} - \nabla_{yh}\mathbf{u}^k - \mathbf{b}_y^{k,m}\|_2^2) \right\}, \\ (\mathbf{d}_x^{k,m+1}, \mathbf{d}_y^{k,m+1}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y} \left\{ \Phi(\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y) + \frac{\mu}{2} (\|\mathbf{d}_x - \mathbf{r}^{k,m+1}\|_2^2 + \|\mathbf{d}_y - \mathbf{s}^{k,m+1}\|_2^2) \right\}, \\ \mathbf{b}_x^{k,m+1} = \mathbf{r}^{k,m+1} - \mathbf{d}_x^{k,m+1}, \quad \mathbf{b}_y^{k,m+1} = \mathbf{s}^{k,m+1} - \mathbf{d}_y^{k,m+1}, \end{array} \right\},$$

ただし $\mathbf{r}^{k,m+1} = \nabla_{xh}\mathbf{u}^{k,m+1} + \mathbf{b}_x^{k,m}$, $\mathbf{s}^{k,m+1} = \nabla_{yh}\mathbf{u}^{k,m+1} + \mathbf{b}_y^{k,m}$. ここから, 異方的4階全変動流に対する我々の提案手法は

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{k,m+1} = \left(\tau^{-1}(K_x^T K_x + K_y^T K_y) + \mu(\nabla_{xh}^T \nabla_{xh} + \nabla_{yh}^T \nabla_{yh}) \right)^{-1} \\ \quad \left(\tau^{-1}(K_x^T K_x + K_y^T K_y) + \mu \left(\nabla_{xh}^T (\mathbf{d}_x^{k,m} - \mathbf{b}_x^{k,m}) + \nabla_{yh}^T (\mathbf{d}_y^{k,m} - \mathbf{b}_y^{k,m}) \right) \right), \\ \left(\mathbf{d}_x^{k,m+1} \right)_i = \operatorname{shrink} \left(r_i^{k,m+1}, \mu^{-1} \right), \\ \left(\mathbf{d}_y^{k,m+1} \right)_i = \operatorname{shrink} \left(s_i^{k,m+1}, \mu^{-1} \right), \\ \mathbf{b}_x^{k,m+1} = \mathbf{r}^{k,m+1} - \mathbf{d}_x^{k,m+1}, \quad \mathbf{b}_y^{k,m+1} = \mathbf{s}^{k,m+1} - \mathbf{d}_y^{k,m+1} \end{array} \right.$$

となる. 等方的な場合は, \mathbf{d}_{xy} に関する最小化問題として

$$(\mathbf{d}_x^{k,m+1}, \mathbf{d}_y^{k,m+1}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y} \left\{ \|\mathbf{d}_{xy}\|_1 + \frac{\mu}{2} (\|\mathbf{d}_x - \mathbf{r}^{k,m+1}\|_2^2 + \|\mathbf{d}_y - \mathbf{s}^{k,m+1}\|_2^2) \right\} \quad (76)$$

を考えることになる. これを形式的に $\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y$ それぞれについての2つの最小化問題に分け, それぞれに対応するオイラー・ラグランジュ方程式を考えると

$$\frac{(\mathbf{d}_x^{k,m+1})_i}{|(\mathbf{d}_{xy}^{k,m+1})_i|} + \mu (\mathbf{d}_x^{k,m+1} - \mathbf{r}^{k,m+1})_i = 0, \quad (77a)$$

$$\frac{(\mathbf{d}_y^{k,m+1})_i}{|(\mathbf{d}_{xy}^{k,m+1})_i|} + \mu (\mathbf{d}_y^{k,m+1} - \mathbf{s}^{k,m+1})_i = 0 \quad (77b)$$

実際には $\mathbf{d}_{xy}^{k,m+1}$ は $\mathbf{d}_x^{k,m+1}$, $\mathbf{d}_y^{k,m+1}$ の両方に依存するため、このままでは陽に解くことはできない。そこでこの問題に対しては、我々は [9] と同様の近似を導入する:

$$\frac{(\mathbf{d}_x^{k,m+1})_i}{|(\mathbf{d}_{xy}^{k,m+1})_i|} \approx \frac{(\mathbf{d}_x^{k,m+1})_i}{|(\mathbf{d}_x^{k,m+1})_i|} \gamma_i^{k,m+1}, \quad \frac{(\mathbf{d}_y^{k,m+1})_i}{|(\mathbf{d}_{xy}^{k,m+1})_i|} \approx \frac{(\mathbf{d}_y^{k,m+1})_i}{|(\mathbf{d}_y^{k,m+1})_i|} \sigma_i^{k,m+1}, \quad (78)$$

ただし

$$\gamma_i^{k,m+1} = \frac{|(\mathbf{r}^{k,m+1})_i|}{\sqrt{(\mathbf{r}^{k,m+1})_i^2 + (\mathbf{s}^{k,m+1})_i^2}}, \quad \sigma_i^{k,m+1} = \frac{|(\mathbf{s}^{k,m+1})_i|}{\sqrt{(\mathbf{r}^{k,m+1})_i^2 + (\mathbf{s}^{k,m+1})_i^2}}. \quad (79)$$

この記号を用いると、オイラー・ラグランジュ方程式の近似が

$$\gamma_i^{k,m+1} \frac{(\mathbf{d}_x^{k,m+1})_i}{|(\mathbf{d}_x^{k,m+1})_i|} + \mu \left(\mathbf{d}_x^{k,m+1} - \mathbf{r}^{k,m+1} \right)_i = 0, \quad (80a)$$

$$\sigma_i^{k,m+1} \frac{(\mathbf{d}_y^{k,m+1})_i}{|(\mathbf{d}_y^{k,m+1})_i|} + \mu \left(\mathbf{d}_y^{k,m+1} - \mathbf{s}^{k,m+1} \right)_i = 0 \quad (80b)$$

となり、従って等方的 4 階全変動流に対する我々の提案手法は、 \mathbf{d} についての部分のみを以下のように取り換えればよい:

$$\begin{cases} \left(\mathbf{d}_x^{k,j+1} \right)_i = \text{shrink} \left(r_i^{k,m+1}, \mu^{-1} \gamma_i^{k,m+1} \right), \\ \left(\mathbf{d}_y^{k,j+1} \right)_i = \text{shrink} \left(s_i^{k,m+1}, \mu^{-1} \sigma_i^{k,m+1} \right), \end{cases} \quad (81)$$

最後に、2次元の Spohn のモデルに対する我々の提案手法を紹介する。 $\mathbf{u}^{k,m+1}$ に関する最小化問題は、やはり 4 階全変動流と同様である。一方で、 $\mathbf{d}_x^{k,m+1}$, $\mathbf{d}_y^{k,m+1}$ については、先ほどまでと同じ記号を用いると、

$$\left(\mathbf{d}_x^{k,m+1}, \mathbf{d}_y^{k,m+1} \right) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y} \left\{ \beta \|\mathbf{d}_{xy}\|_1 + \frac{1}{p} \|\mathbf{d}_{xy}\|_p^p + \frac{\mu}{2} \left(\|\mathbf{d}_x - \mathbf{r}^{k,m+1}\|_2^2 + \|\mathbf{d}_y - \mathbf{s}^{k,m+1}\|_2^2 \right) \right\}$$

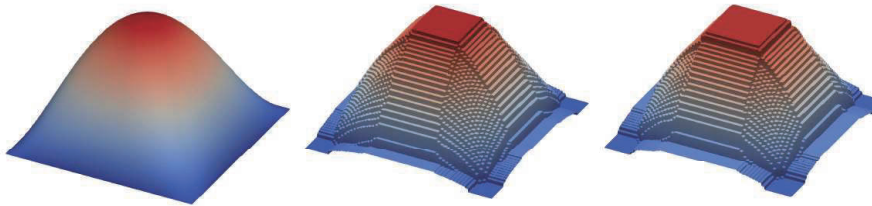
という最小化問題を考えることになる。やはり (78) 式による近似を用いることで、 \mathbf{d}_x , \mathbf{d}_y それぞれについての 2 つの最小化問題に分割すると、1次元の場合の Spohn のモデルから得られたものと同様のオイラー・ラグランジュ方程式が導出される:

$$\beta \gamma_i^{k,m+1} \frac{(\mathbf{d}_x^{k,m+1})_i}{|(\mathbf{d}_x^{k,m+1})_i|} + (\gamma_i^{k,m+1})^{2-p} (\mathbf{d}_x^{k,m+1})_i |(\mathbf{d}_x^{k,m+1})_i|^{p-2} + \mu \left(\mathbf{d}_x^{k,m+1} - \mathbf{r}^{k,m+1} \right)_i = 0, \quad (82a)$$

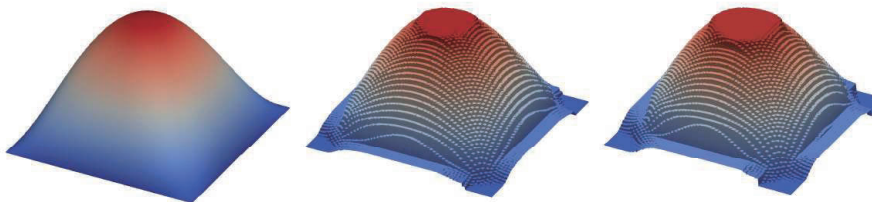
$$\beta \sigma_i^{k,m+1} \frac{(\mathbf{d}_y^{k,m+1})_i}{|(\mathbf{d}_y^{k,m+1})_i|} + (\sigma_i^{k,m+1})^{2-p} (\mathbf{d}_y^{k,m+1})_i |(\mathbf{d}_y^{k,m+1})_i|^{p-2} + \mu \left(\mathbf{d}_y^{k,m+1} - \mathbf{s}^{k,m+1} \right)_i = 0. \quad (82b)$$

これを解くことで、我々の提案手法が導出される: $p = 3$ のときは

$$\begin{cases} \left(\mathbf{d}_x^{k,j+1} \right)_i = \frac{\gamma_i^{k,m+1} \mu r_i^{k,m+1}}{2 |r_i^{k,m+1}|} \left(-1 + \sqrt{1 + 4(\gamma_i^{k,m+1})^{-1} \mu^{-1} \max\{|r_i^{k,m+1}| - \beta \gamma_i^{k,m+1} \mu^{-1}, 0\}} \right), \\ \left(\mathbf{d}_y^{k,j+1} \right)_i = \frac{\sigma_i^{k,m+1} \mu s_i^{k,m+1}}{2 |s_i^{k,m+1}|} \left(-1 + \sqrt{1 + 4(\sigma_i^{k,m+1})^{-1} \mu^{-1} \max\{|s_i^{k,m+1}| - \beta \sigma_i^{k,m+1} \mu^{-1}, 0\}} \right). \end{cases}$$



(a) Fourth order isotropic total variation flow



(b) Fourth order anisotropic total variation flow

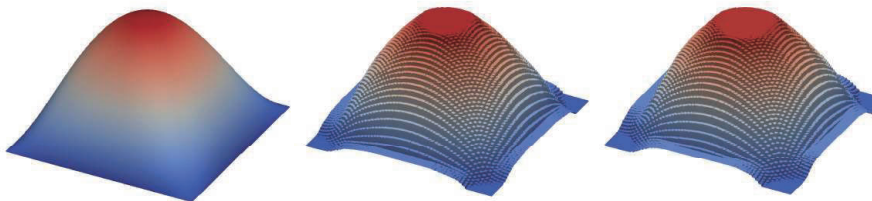
(c) Spohn's fourth order model on \mathbb{T}^2

Figure 4: 2次元の問題に対する数値計算結果

References

- [1] L. M. Brègman. A relaxation method of finding a common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. *Ž. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 7:620–631, 1967.
- [2] H. Brézis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).
- [3] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

- [4] J.-F. Cai, S. Osher, and Z. Shen. Split Bregman methods and frame based image restoration. *Multiscale Model. Simul.*, 8(2):337–369, 2009/10.
- [5] M.-H. Giga and Y. Giga. Very singular diffusion equations: second and fourth order problems. *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, 27(3):323–345, 2010.
- [6] Y. Giga and R. V. Kohn. Scale-invariant extinction time estimates for some singular diffusion equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 30(2):509–535, 2011.
- [7] Y. Giga, M. Muszkieta, and P. Rybka. A duality based approach to the minimizing total variation flow in the space H^{-s} . *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, 36(1):261–286, 2019.
- [8] Y. Giga and Y. Ueda. Numerical computations of split Bregman method for fourth order total variation flow. *J. Comput. Phys.*, 405:109114–109137, 2020.
- [9] T. Goldstein and S. Osher. The split Bregman method for $L1$ -regularized problems. *SIAM J. Imaging Sci.*, 2(2):323–343, 2009.
- [10] G. Grubb. *Distributions and operators*, volume 252 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2009.
- [11] Y. Kashima. A subdifferential formulation of fourth order singular diffusion equations. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 14(1):49–74, 2004.
- [12] Y. Kashima. Characterization of subdifferentials of a singular convex functional in Sobolev spaces of order minus one. *J. Funct. Anal.*, 262(6):2833–2860, 2012.
- [13] R. V. Kohn and H. M. Versieux. Numerical analysis of a steepest-descent PDE model for surface relaxation below the roughening temperature. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48(5):1781–1800, 2010.
- [14] Y. Kōmura. Nonlinear semi-groups in Hilbert space. *J. Math. Soc. Japan*, 19:493–507, 1967.
- [15] A. Oberman, S. Osher, R. Takei, and R. Tsai. Numerical methods for anisotropic mean curvature flow based on a discrete time variational formulation. *Commun. Math. Sci.*, 9(3):637–662, 2011.
- [16] S. Osher, A. Solé, and L. Vese. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the H^{-1} norm. *Multiscale Model. Simul.*, 1(3):349–370, 2003.
- [17] N. Požár. On the self-similar solutions of the crystalline mean curvature flow in three dimensions. arXiv:1806.02482, 2018.
- [18] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Phys. D*, 60(1-4):259–268, 1992. Experimental mathematics: computational issues in nonlinear science (Los Alamos, NM, 1991).
- [19] H. Spohn. Surface dynamics below the roughening transition. *J. Phys. I*, 3(1):69–81, 1993.