A weak comparison principle and asymptotic behavior of viscosity solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms

北海道大学・大学院理学研究院数学部門　浜向 直 *
Nao Hamamuki
Department of Mathematics, Faculty of Science, Hokkaido University
北海道大学・大学院理学院数学専攻　三栖 邦康 †
Kuniyasu Misu
Department of Mathematics, Faculty of Science, Hokkaido University

1　序

方程式.　本稿では，駆動力項，およびソース項 (外力項) 付きの平均曲率流方程式：

$$u_t(x,t) - \Delta_1 u(x,t) + \nu|\nabla u(x,t)| = c\chi_\Omega(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \tag{1.1}$$

を，初期条件：

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \tag{1.2}$$

の下で考える．ここで未知関数は $u : \mathbf{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbf{R}$ で，$\nabla u = (u_{x_i})_{i=1}^n$ は空間変数 x についての勾配，$|\cdot|$ は通常のユークリッドノルムである．また $\nu, c > 0$ は正の定数，χ_Ω は空でない集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ の特性関数で，さらに，

$$\Delta_1 u(x,t) = \frac{|\nabla u(x,t)|}{n-1} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u(x,t)}{|\nabla u(x,t)|}\right) \tag{1.3}$$

である．初期値 $u_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は連続で台がコンパクト，すなわち $u_0 \in C_0(\mathbf{R}^n)$ と仮定する．本稿では，この初期値問題の粘性解に対する弱比較定理と一意性，そして解の長時間的な挙動について，論文 [11] で発表予定の結果の一部を紹介する．

*E-mail: `hnao@math.sci.hokudai.ac.jp`
†E-mail: `kuniyasu.misu@math.sci.hokudai.ac.jp`

物理的背景． (1.1) は，2 **次元核生成**と呼ばれる結晶成長現象を記述する方程式である ([1, 14, 15])．これは，結晶表面での核生成 (小さな丘の生成) をきっかけとして起きる結晶成長現象である．この核生成が起きる場所は，ステップ源とも呼ばれる．核生成による垂直方向の成長と，曲率・駆動力に依存する水平方向の成長との組み合わせで起きる成長を (1.1) は記述する．

方程式 (1.1) の導出を簡単に説明する．図 1 も参照．場所 $x \in \mathbf{R}^n$，時刻 $t \in [0, \infty)$ における結晶表面の高さを $u(x,t)$ で表す．結晶の水平方向の成長と垂直方向の成長について，それぞれ次の (A), (B) の成長法則を仮定する：

(A) 各 $l \in \mathbf{R}$ に対して，$u(\cdot, t)$ の l-等高面 $\Gamma_l(t) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid u(x,t) = l\}$ は，曲面の発展方程式：

$$V = \kappa - \nu \quad \text{on } \Gamma_l(t) \tag{1.4}$$

に従って水平方向に成長する．

(B) 集合 Ω (ステップ源) 上では，u は速さ $c > 0$ で垂直方向に成長する．

(A) の記号について説明する．$\mathbf{n} = \mathbf{n}(x,t) \in \mathbf{R}^n$ を，$x \in \Gamma_l(t)$ における $\Gamma_l(t)$ の単位法線ベクトルで，$\{x \in \mathbf{R}^n \mid u(x,t) > l\}$ から $\{x \in \mathbf{R}^n \mid u(x,t) < l\}$ へ向くものとする．そして $V = V(x,t)$ は $x \in \Gamma_l(t)$ における $\Gamma_l(t)$ の $\mathbf{n}$ 方向への法速度，$\kappa = \kappa(x,t)$ は $x \in \Gamma_l(t)$ における $\Gamma_l(t)$ の $\mathbf{n}$ 方向への平均曲率を表す．$\nu \in \mathbf{R}$ は駆動力と呼ばれる定数で，今回は $\nu > 0$ の場合を考えている．高さ関数 $u(x,t)$ を用いると，u が滑らかで $\nabla u \neq 0$ となる部分では，法速度 V と平均曲率 κ は次のように表示される：

$$V = \frac{u_t(x,t)}{|\nabla u(x,t)|}, \quad \kappa = \frac{1}{n-1} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x,t)}{|\nabla u(x,t)|} \right).$$

詳しい導出は [4, Chapter 1] を参照．これらを (1.4) に代入することで，

$$u_t(x,t) - \Delta_1 u(x,t) + \nu |\nabla u(x,t)| = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \tag{1.5}$$

が得られる．なお曲率 κ の符号について，例えば等高面が図 1 右のようなとき，その上の凸な部分では $\kappa < 0$，凹な部分では $\kappa > 0$ となる．駆動力は今 $\nu > 0$ であるから，法速度 (1.4) は等高面が凸な部分では必ず負となり，水平方向には u は縮むことになる．

次に条件 (B) を考える．垂直方向の成長速度は $u_t(x,t)$ で与えられるので，(B) は，

$$u_t(x,t) = c\chi_\Omega(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \tag{1.6}$$

と記述される．2 次元核生成においては (A) と (B) が同時に起きると考えられるので，(1.5) と (1.6) を組み合わせた方程式，つまり両者の時間微分を加えた方程式として (1.1) を得る．

[6, Section 3.1] では，2 つの方程式 (1.5) と (1.6) とを短い時間 $\tau > 0$ ずつ交互に解き，その時間幅の極限 $\tau \to +0$ を取って (1.1) を得る，いわゆる Trotter–加藤の積公式に基づく導出も述べられている．

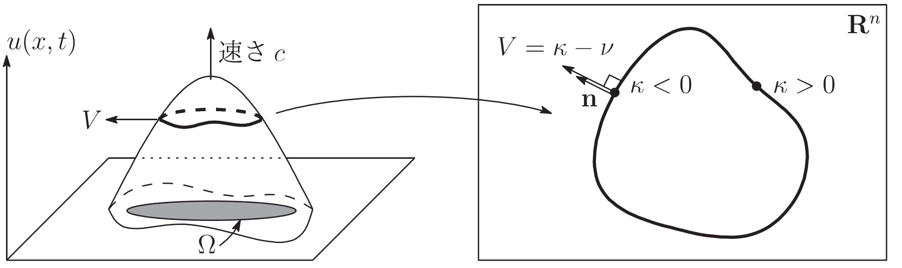

図 1: 成長法則について.

先行研究. 方程式が不連続である場合，一般には粘性解に対する比較定理が期待できず，それ故，解の一意性が問題になる．(1.1) の曲率項 $\Delta_1 u(x,t)$ が無い 1 階の方程式：

$$u_t(x,t) + \nu|\nabla u(x,t)| = c\chi_\Omega(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \tag{1.7}$$

さらにより一般の，不連続ソース項を持つハミルトン・ヤコビ方程式に対しては，初期値問題が一意可解となるような適切な解概念が [5] で導入された．また [9] では，その解の長時間挙動を調べている．

2 階方程式 (1.1) に対しては，$\nu < 0$ の場合に，最大粘性解の漸近速度を [6] で調べている．またソース項 $c\chi_\Omega(x)$ を連続関数 $f(x)$ で置き換えた場合の解の漸近挙動を，[7, 8] で明らかにしている．[8] では，方程式 (1.1) の左辺を一般の退化放物型作用素としている．

2　粘性解

中心 x，半径 $r > 0$ の開球を $B_r(x)$ で表す．まず，半連続包の概念を導入する．集合 $K \subset \mathbf{R}^N$ と関数 $h : K \to \mathbf{R}$ に対し，h の**上半連続包** $h^* : \overline{K} \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ と**下半連続包** $h_* : \overline{K} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を，

$$h^*(x) = \lim_{r\to+0} \sup\{h(y) \mid y \in B_r(x) \cap K\}, \quad h_*(x) = \lim_{r\to+0} \inf\{h(y) \mid y \in B_r(x) \cap K\}$$

$(x \in \overline{K})$ で定義する．

n 次の実対称行列全体の集合を $\mathbf{S}^n$ で表す．関数 $F : (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{S}^n \to \mathbf{R}$ を，

$$F(p,X) = -\frac{1}{n-1}\mathrm{trace}\left(\left(I - \frac{p\otimes p}{|p|^2}\right)X\right) \quad ((p,X) \in (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{S}^n) \tag{2.1}$$

で定める．ここで，ベクトル $p = (p_1,\dots,p_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して $p\otimes p = (p_ip_j)_{i,j=1}^n$ である．(2.1) は，(1.1) の $-\Delta_1 u(x,t)$ の項を表す関数である．すなわち，u が滑らかで $\nabla u(x,t) \neq 0$ となる点 (x,t) においては，$F(\nabla u(x,t), \nabla^2 u(x,t)) = -\Delta_1 u(x,t)$ である．ただし，$\nabla^2 u = (u_{x_ix_j})_{i,j=1}^n$ はヘッセ行列を表す．

注意 2.1. (2.1) の F は次の性質を満たす：

$$F \in C((\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{S}^n), \tag{2.2}$$

$$\text{任意の } p \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \text{ と } X \geqq Y \text{ を満たす } X, Y \in \mathbf{S}^n \text{ に対して，} F(p, X) \leqq F(p, Y), \tag{2.3}$$

$$-\infty < F_*(0, O) = F^*(0, O) < \infty, \tag{2.4}$$

$$\text{任意の } (p, X) \in (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{S}^n \text{ と } r > 0 \text{ に対して，} F(rp, X) = F(p, X). \tag{2.5}$$

粘性解の概念を定義しよう．粘性解の基本性質などは [2, 4] を参照のこと．以下，$C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times (0, \infty))$ は，x について C^2 級，t について C^1 級の関数 $\phi = \phi(x, t)$ の集合を表すとする．

定義 2.2 (粘性解). $u : \mathbf{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ を局所有界な関数とする．次の (i), (ii) が成り立つとき，u を (1.1)–(1.2) の**粘性劣解** (resp. **粘性優解**) と言う：

(i) $\mathbf{R}^n$ 上で $u^*(\cdot, 0) \leqq u_0$ (resp. $u_*(\cdot, 0) \geqq u_0$).

(ii) 任意の $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty)$ と $\phi \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times (0, \infty))$ に対し，$u^* - \phi$ (resp. $u_* - \phi$) が (x_0, t_0) で極大 (resp. 極小) を取るならば，

$$\phi_t(x_0, t_0) + F_*(\nabla\phi(x_0, t_0), \nabla^2\phi(x_0, t_0)) + \nu|\nabla\phi(x_0, t_0)| \leqq c(\chi_\Omega)^*(x_0)$$
$$(\text{resp. } \phi_t(x_0, t_0) + F^*(\nabla\phi(x_0, t_0), \nabla^2\phi(x_0, t_0)) + \nu|\nabla\phi(x_0, t_0)| \geqq c(\chi_\Omega)_*(x_0)).$$

u が粘性劣解かつ粘性優解であるとき，u を**粘性解**と呼ぶ．

注意 2.3. $(\chi_\Omega)^* = \chi_{\overline{\Omega}}$, $(\chi_\Omega)_* = \chi_{\Omega^\circ}$ である．ここで，Ω° は Ω の内部を表す．

後に楕円型方程式の粘性解も考えるが，定義は同様なので省略する．

本稿ではコンパクトな台を持つ初期値 u_0 を考えるため，粘性劣解，粘性優解のクラスとして次を定めておく：

$$\mathrm{SUB} := \left\{ u \;\middle|\; \begin{array}{c} u \text{ は (1.1)–(1.2) の粘性劣解，かつ全ての } T > 0 \text{ に対して，} \\ \text{ある } R > 0 \text{ が存在して，} B_R(0)^c \times [0, T] \text{ 上で } u \leqq 0 \end{array} \right\},$$
$$\mathrm{SUP} := \left\{ u \;\middle|\; \begin{array}{c} u \text{ は (1.1)–(1.2) の粘性優解，かつ全ての } T > 0 \text{ に対して，} \\ \text{ある } R > 0 \text{ が存在して，} B_R(0)^c \times [0, T] \text{ 上で } u \geqq 0 \end{array} \right\}.$$

ここで，^{c} は補集合を表す．また，$\mathrm{SOL} := \mathrm{SUB} \cap \mathrm{SUP}$ と定める．

例 2.4 (Ω が球のときの解). $\Omega = B_R(0)$ $(R > 0)$ の場合を，初期条件 $u_0 \equiv 0$ の下で考える．まず，(1.1) の時間微分項 $u_t(x, t)$ を除いて得られる楕円型方程式：

$$-\Delta_1 U(x) + \nu|\nabla U(x)| = c \quad \text{in } B_R(0) \tag{2.6}$$

に，ディリクレ境界条件：

$$U(x) = 0 \quad \text{on } \partial B_R(0) \tag{2.7}$$

を課した境界値問題を解いてみる．方程式 (2.6) は $B_R(0)$ 上でのみ考えるため，右辺は $c\chi_{B_R(0)} = c$ となる．それ故，不連続性が消えていることに注意しておく．今，滑らかな解 $U(x)$ が存在して球対称 $U(x) = \psi(|x|)$ と仮定すると，(2.6) と (2.7) よりそれぞれ，

$$-\frac{1}{r}\psi'(r) + \nu|\psi'(r)| = c \quad \text{in } (0, R),$$
$$\psi(R) = 0$$

が分かる．$(0, R)$ 上で $\psi' \leqq 0$ と仮定してこの常微分方程式を解けば，

$$\psi(r) = \frac{c}{\nu}(R - r) + \frac{c}{\nu^2}\log\frac{\nu r + 1}{\nu R + 1} \quad (0 \leqq r \leqq R)$$

を得る．そして，

$$U(x) := \psi(|x|) = \frac{c}{\nu}(R - |x|) + \frac{c}{\nu^2}\log\frac{\nu|x| + 1}{\nu R + 1} \quad (|x| \leqq R) \tag{2.8}$$

と定めると，これは (2.6)–(2.7) の粘性解である．実際 $U \in C^2(\overline{B_R(0)})$ であり，$B_R(0) \setminus \{0\}$ 上では，U は (2.6) を古典的な意味で満たす．原点 $x = 0$ では，

$$\nabla U(0) = 0, \quad \nabla^2 U(0) = -cI$$

であり，これより $F_*(0, -cI) = F^*(0, -cI) = -c$ となる．従って $x = 0$ においても，U は粘性解の定義の条件を満たすことが分かる．

さて，(2.8) の U を用いて，

$$u(x,t) := \begin{cases} \min\{U(x),\, ct\} & (x \in B_R(0)), \\ 0 & (x \notin B_R(0)) \end{cases} \tag{2.9}$$

と定めると，u は (1.1)–(1.2) の粘性解となる．(理由はここでは省略する．) グラフは図 2 のようになる．u は，最初のうちは，時間経過と共に平らな面が垂直方向に速さ c で動きつつ，周囲からは U のグラフが現れてくる，という挙動を示す (図 2 左)．結晶が $B_R(0)$ 上で垂直方向の供給を受けつつ，水平方向には削れながら降り積もっている，とも理解できる．しばらくして，高さ ct が U の最大値を超えると，それ以降は，解は動かず定常形となる (図 2 右)．これは，垂直方向の供給と，水平方向に縮む動きとが釣り合った平衡状態と思える．この定常形に達する時刻 t_0 は，

$$M_0 = \max_{B_R(0)} U = U(0) = \frac{cR}{\nu} + \frac{c}{\nu^2}\log\frac{1}{\nu R + 1}$$

とおくとき，$t_0 = M_0/c$ で与えられる．

後の定理 4.3 で，より一般の Ω と初期値の場合でも，解が同様に定常形に達すること，そして特に初期値が 0 であれば，解が (2.9) のように表示されることを示す．

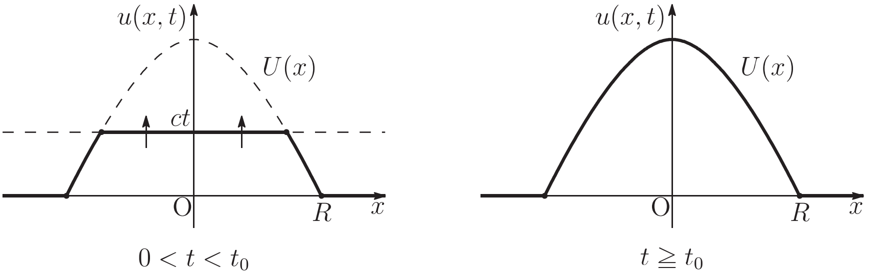

図 2: 解 $u(x,t)$ のグラフ.

3 弱比較定理

初期値問題の粘性解に対する通常の比較定理は，粘性劣解 u と粘性優解 v が $\mathbf{R}^n$ 上で $u^*(\cdot,0) \leqq v_*(\cdot,0)$ を満たすとき，

$$u^* \leqq v_* \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \tag{3.1}$$

が成立することを主張する．この比較定理の下で，粘性解の一意性と，一意解の連続性が導かれる．またこのような比較定理は，方程式に適当な連続性を課して証明される ([2])．一方，(1.1) や (1.7) のようなソース項が不連続な方程式に対しては，初期値問題の粘性解は一意とは限らず，また不連続解も存在し得る ([5, 6])．それ故，(3.1) を結論とする比較定理は一般には期待できない．そこで今回は，(3.1) よりも弱い，

$$(u^*)_* \leqq v_*, \quad u^* \leqq (v_*)^* \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \tag{3.2}$$

という形の不等式を導く．半連続包の定義より $(u^*)_* \leqq u^*$, $v_* \leqq (v_*)^*$ であるので，(3.2) の主張は，(3.1) の主張よりも実際に弱い．この (3.2) を結論とする比較定理を，ここでは，**弱比較定理**と呼ぶことにする．

(3.2) は，Ω が原点に関して**星型**，すなわち，

$$\text{任意の } \lambda > 1 \text{ に対して，} \overline{\Omega}/\lambda \subset \Omega^\circ \tag{3.3}$$

という仮定の下で示す．ここで，$\overline{\Omega}/\lambda = \{x/\lambda \mid x \in \overline{\Omega}\}$ である．証明では，粘性劣解 u，粘性優解 v の一方をスケール変換する．そのため，集合 Ω をスケール変換したときの情報として (3.3) を用いる．弱比較定理を示すために，このようなスケール変換をする手法は，[13, Appendix C] で楕円型方程式に対して用いられている．不連続粘性解に対する弱い意味での比較定理の結果として，[3] も挙げておく．

定理 3.1 (弱比較定理)．有界集合 Ω は星型 (3.3) であると仮定する．$u \in \mathrm{SUB}$, $v \in \mathrm{SUP}$ とする．このとき，(3.2) が成り立つ．

証明の概略． 簡単のため，u^*, v_* をそれぞれ u, v で表す．$u_* \leqq v$ の方を示そう．

1. $\lambda > 1$ とし，粘性劣解 u を次のようにスケール変換する：

$$u_\lambda(x,t) = \frac{1}{\lambda^2} u(\lambda x, \lambda^2 t).$$

このとき u_λ は，

$$u_t(x,t) + F(\nabla u(x,t), \nabla^2 u(x,t)) + \nu\lambda|\nabla u(x,t)| = c\chi_{\Omega/\lambda}(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \tag{3.4}$$

の粘性劣解である．ただし F の性質 (2.5) を用いた．定数 c_λ を，

$$c_\lambda := \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \left| \frac{1}{\lambda^2} u_0(\lambda x) - u_0(x) \right|$$

と定める．初期値について $u_0 \in C_0(\mathbf{R}^n)$ なので，$\lim_{\lambda\to 1+0} c_\lambda = 0$ となる．ここで，

$$\tilde{u}_\lambda(x,t) := u_\lambda(x,t) - c_\lambda$$

とおく．$\tilde{u}_\lambda$ もやはり (3.4) の粘性劣解である．さらに c_λ の定義より，$\mathbf{R}^n$ 上で $\tilde{u}_\lambda(\cdot,0) \leqq v(\cdot,0)$ が成り立つ．

2. $\mathbf{R}^n \times (0,\infty)$ 上で $u_* \leqq v$ であることを示すには，各 $T>0$ に対して，

$$\liminf_{\lambda\to 1+0} \tilde{u}_\lambda \leqq v \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,T) \tag{3.5}$$

であることを示せば十分である．結論を否定すれば，ある点 $(x_0,t_0) \in \mathbf{R}^n \times (0,T)$ で，

$$\liminf_{\lambda\to 1+0} \tilde{u}_\lambda(x_0,t_0) - v(x_0,t_0) > 0$$

となるものが存在する．ここで「変数倍化」を行う．$\lambda > 1$ $(\lambda \approx 1)$ とし，関数 $\Psi : \mathbf{R}^n \times [0,T) \times \mathbf{R}^n \times [0,T] \to \mathbf{R}$ を，

$$\Psi(x,t,y,s) := \tilde{u}_\lambda(x,t) - v(y,s) - \phi(x,t,y,s),$$
$$\phi(x,t,y,s) := \frac{|x-y|^4}{\varepsilon} + \frac{|t-s|^2}{\varepsilon} + \frac{\sigma}{T-t}$$

で定める．ここで $\varepsilon, \sigma > 0$ であり，σ は λ に依存させず十分小さく取ることで，

$$\Psi(x_0,t_0,x_0,t_0) > 0 \tag{3.6}$$

とできる．

3. (3.6) と，粘性解に対する比較定理の証明における標準的な議論で，次が分かる：

- Ψ は最大点 $Z_\varepsilon = (x_\varepsilon, t_\varepsilon, y_\varepsilon, s_\varepsilon)$ を持つ．特に $\phi_1(x,t) := \phi(x,t,y_\varepsilon,s_\varepsilon)$, $\phi_2(y,s) := -\phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon,y,s)$ とするとき，

$$\tilde{u}_\lambda - \phi_1 \text{ は点 } (x_\varepsilon,t_\varepsilon) \text{ で最大，} v - \phi_2 \text{ は点 } (y_\varepsilon,s_\varepsilon) \text{ で最小．} \tag{3.7}$$

- 最大点 $\{Z_\varepsilon\}$ は，λ と ε について一様に有界．
- 各 $\lambda > 1$ に対し，必要なら部分列を取ることで，ある $(\bar{x},\bar{t}) \in \mathbf{R}^n \times (0,T)$ に対し，

$$\lim_{\varepsilon\to+0} Z_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to+0} (x_\varepsilon,t_\varepsilon,y_\varepsilon,s_\varepsilon) = (\bar{x},\bar{t},\bar{x},\bar{t}).$$

4.

$$p_\varepsilon := \nabla_x \phi(Z_\varepsilon) = -\nabla_y \phi(Z_\varepsilon) = \frac{4}{\varepsilon}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2(x_\varepsilon - y_\varepsilon),$$
$$\tau_\varepsilon := \phi_t(Z_\varepsilon) - \frac{\sigma}{(t_\varepsilon - T)^2} = -\phi_s(Z_\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon}(t_\varepsilon - s_\varepsilon)$$

と定める．ここで $\lambda > 1$ は固定して，以下の場合分けをする．

Case 1: 部分列 $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty \subset (0,1]$ で，$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ かつ $p_{\varepsilon_k} \neq 0$ $(k \in \mathbf{N})$ を満たすものが存在する場合．(添字の k は以降省略する．) このとき，Crandall-石井の補題 ([2, Theorem 8.3]) により，ある $X_\varepsilon, Y_\varepsilon \in \mathbf{S}^n$ で $X_\varepsilon + Y_\varepsilon \leqq O$ を満たすものが存在して，

$$\tau_\varepsilon + \frac{\sigma}{(t_\varepsilon - T)^2} + F(p_\varepsilon, X_\varepsilon) + \nu\lambda|p_\varepsilon| \leqq c\chi_{\overline{\Omega}/\lambda}(x_\varepsilon),$$
$$\tau_\varepsilon + F(p_\varepsilon, -Y_\varepsilon) + \nu|p_\varepsilon| \geqq c\chi_{\Omega^\circ}(y_\varepsilon)$$

が成り立つ．なお $p_\varepsilon \neq 0$ なので，$F_*(p_\varepsilon, X_\varepsilon) = F(p_\varepsilon, X_\varepsilon)$, $F^*(p_\varepsilon, -Y_\varepsilon) = F(p_\varepsilon, -Y_\varepsilon)$ となることを用いた．上記の 2 つの不等式の差を取る．(2.3) より $F(p_\varepsilon, X_\varepsilon) \geqq F(p_\varepsilon, -Y_\varepsilon)$ であることに注意すると，

$$\frac{\sigma}{T^2} + \nu(\lambda - 1)|p_\varepsilon| \leqq c\chi_{\overline{\Omega}/\lambda}(x_\varepsilon) - c\chi_{\Omega^\circ}(y_\varepsilon). \tag{3.8}$$

そして今，$\nu > 0$ かつ $\lambda > 1$ であるから，

$$\frac{\sigma}{T^2} \leqq c\chi_{\overline{\Omega}/\lambda}(x_\varepsilon) - c\chi_{\Omega^\circ}(y_\varepsilon) \tag{3.9}$$

となる．

Case 2: 十分小さい全ての $\varepsilon > 0$ に対して $p_\varepsilon = 0$ である場合．このとき，(3.7) の関数 ϕ_1 と ϕ_2 は，

$$\nabla\phi_1(x_\varepsilon, t_\varepsilon) = \nabla\phi_2(y_\varepsilon, s_\varepsilon) = 0, \quad \nabla^2\phi_1(x_\varepsilon, t_\varepsilon) = \nabla^2\phi_2(y_\varepsilon, s_\varepsilon) = O$$

を満たす．従って粘性解の定義により，

$$\tau_\varepsilon + \frac{\sigma}{(t_\varepsilon - T)^2} + F_*(0, O) \leqq c\chi_{\overline{\Omega}/\lambda}(x_\varepsilon),$$
$$\tau_\varepsilon + F^*(0, O) \geqq c\chi_{\Omega^\circ}(y_\varepsilon).$$

これらの差を取れば，(2.4) より再び (3.9) を得る．

最後に (3.9) で $\varepsilon \to +0$ として，

$$\frac{\sigma}{T^2} \leqq c\chi_{\overline{\Omega}/\lambda}(\bar{x}) - c\chi_{\Omega^\circ}(\bar{x}).$$

Ω が星型であるという仮定 (3.3) より右辺は 0 以下なので，これは矛盾である． □

上記の定理3.1の証明では，(3.8) の部分で，$\nu > 0$ であることを用いて $\nu(\lambda-1)|p_\varepsilon|$ を非負の項として切り捨てた．一方で $\nu < 0$ の場合には，同様の処理はできない．しかし，粘性劣解 u と粘性優解 v のどちらか一方が空間変数 x についてリプシッツ連続であれば，$\{p_\varepsilon\}$ が λ と ε について一様に有界となるので，$\varepsilon \to +0$, $\lambda \to 1+0$ の順に極限を取って，同様に矛盾を得ることができる．

リプシッツ連続性について，具体的には，u または v に対して次を仮定する：

$$\begin{cases} \text{全ての } T>0 \text{ に対して，ある } L>0 \text{ が存在して，} \\ \text{全ての } x,y \in \mathbf{R}^n \text{ と } t \in [0,T] \text{ に対して，} |w(x,t)-w(y,t)| \leqq L|x-y|. \end{cases} \tag{3.10}$$

定理 3.2 (弱比較定理2)**.** 有界集合 Ω は星型 (3.3) であると仮定する．$\nu < 0$ と仮定する．$u \in \mathrm{SUB}$, $v \in \mathrm{SUP}$ とする．さらに，u または v の少なくとも一方は (3.10) を満たすと仮定する．このとき，(3.2) が成り立つ．

証明の概略. 定理3.1の証明の記号を引き続き用いる．u または v のリプシッツ連続性 (3.10) により，$\{p_\varepsilon\}$ は λ と ε について一様有界となる．よって各 $\lambda > 1$ に対し，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} p_\varepsilon = \bar{p}_\lambda \in \mathbf{R}^n$$

と仮定してよい．このとき，(3.8) で $\varepsilon \to +0$ とし，(3.3) を用いると，

$$\frac{\sigma}{T^2} + \nu(\lambda-1)|\bar{p}_\lambda| \leqq c\chi_{\overline{\Omega}/\lambda}(\bar{x}) - c\chi_{\Omega^\circ}(\bar{x}) \leqq 0.$$

$\{\bar{p}_\lambda\}$ は λ について有界である．また，σ は λ に依存しないのであった．従って $\lambda \to 1+0$ として，矛盾を得る． □

注意 3.3. 証明を振り返ると，定理3.1, 3.2は，次のように方程式を一般化しても成り立つことが分かる．

- $F : (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{S}^n \to \mathbf{R}$ は (2.1) に限らず，(2.2)–(2.5) を満たすものであればよい．
- (1.1) の右辺は $c\chi_\Omega(x)$ に限らず，関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ で，

  $$\text{任意の } \lambda > 1 \text{ と } x \in \mathbf{R}^n \text{ に対して，} f^*(\lambda x) \leqq f_*(x)$$

  を満たすものであればよい．

弱比較定理3.1の下では，次の一意性の結果が得られる：

系 3.4 (一意性)**.** 有界集合 Ω は星型 (3.3) であると仮定する．$u, v \in \mathrm{SOL}$ とする．

(1) $\mathbf{R}^n \times [0,\infty)$ 上で $u^* = v^*$, $u_* = v_*$ が成り立つ．

(2) u, v の一方が $\mathbf{R}^n \times [0,\infty)$ 上で連続ならば，$\mathbf{R}^n \times [0,\infty)$ 上で $u = v$ が成り立つ．

注意 3.5. 系3.4の (1) は，上半連続な粘性解，下半連続な粘性解が，それぞれ一意であることを主張している．また (2) は，連続な粘性解がもし存在するならば (何らかの方法で連続な粘性解が見つかれば)，それ以外には解が無いことを保証する．

4　解の漸近形

例 2.4 では，Ω が球のとき，解は Ω 上での垂直方向の成長と，水平方向に縮む動きとを組み合わせた挙動をすることを観察した．また解は，有限時刻で定常形に達した．このようなことが，一般の Ω に対しても成り立つことを示そう．解が水平方向に縮むためには，(1.4) で与えられる成長速度 V が負であればよい．そこで，Ω の形状に関して，次の条件を一時的に考える：

$$\kappa_{\partial\Omega} < \nu \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{4.1}$$

ここで $\kappa_{\partial\Omega} = \kappa_{\partial\Omega}(x)$ は，$x \in \partial\Omega$ における，Ω から Ω^c の方向への $\partial\Omega$ の平均曲率を表す．このとき，等高面が $\partial\Omega$ に一致すれば $V = \kappa - \nu < 0$ となるため，Ω 上で垂直方向に積もった結晶が，$\partial\Omega$ から縮んでいくことが期待される．全ての等高面で縮むことは自明ではないものの，解が例 2.4 のものと同様の挙動をすることを，実際に示すことができる．

以降，$\partial\Omega$ の滑らかさを要求する曲率の条件 (4.1) の代わりに，対応する**外部球条件**を考える．すなわち，半径が $1/\nu$ より大きい外部球が存在する，という次の条件を課す：

$$\begin{cases} \text{任意の } z \in \partial\Omega \text{ に対して，ある } x_0 \in \Omega^c \text{ と } r > \dfrac{1}{\nu} \text{ が存在して，} \\ B_r(x_0) \text{ が } z \text{ における } \Omega \text{ の外部球となる．} \end{cases} \tag{4.2}$$

ここで，球 $B_r(x_0)$ が $z \in \partial\Omega$ における Ω の外部球であるとは，$B_r(x_0) \subset \Omega^c$ かつ $z \in \partial B_r(x_0)$ であることを意味する．

解の定常形を得るため，例 2.4 と同様，(1.1) に対応する楕円型方程式の境界値問題：

$$-\Delta_1 U(x) + \nu|\nabla U(x)| = c \quad \text{in } \Omega, \tag{4.3}$$

$$U(x) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{4.4}$$

を考える．未知関数は $U : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ で，Ω は開集合としておく．方程式 (4.3) は Ω 上で考えるので，不連続性はやはり消えていることに注意しよう．なお境界条件 (4.4) は，いわゆる粘性解の意味 ([2, Section 7]) ではなく通常の意味，つまり「全ての $x \in \partial\Omega$ で $U(x) = 0$」という条件として以下扱う．

(4.3)–(4.4) の粘性解は一意に存在する．

定理 4.1 (楕円型問題の解の一意存在)．有界開集合 Ω は外部球条件 (4.2) を満たすと仮定する．このとき，(4.3)–(4.4) の粘性解 U が一意的に存在する．また U は，$\overline{\Omega}$ 上で非負かつ連続である．

証明の概略．1. 粘性解の一意性と連続性は，比較定理より導かれる．この比較定理は，方程式 (4.3) の左辺の同次性を利用することで，1 階のアイコナール方程式に対する比較定理 ([12]) と同様の方法で証明できる．

2. 粘性解の存在は，ペロンの方法で示す．そのために，境界条件 (4.4) を満たす粘性劣解 W^- と粘性優解 W^+ が必要になる．粘性劣解としては，定数関数 $W^- \equiv 0$ を用いればよい．なおこれより，解の非負性が分かる．一方で粘性優解を構成するために，外部球条件

(4.2) を用いる．具体的には，各 $z \in \partial\Omega$ に対応する (4.2) の外部球 $B_r(x_0)$ に対し，その境界 $\partial B_r(x_0)$ を 0-等高面とする錐状の関数：

$$l_z(x) := \frac{c}{\nu - (1/r)}(|x - x_0| - r)$$

をまず考える．各 l_z は (4.3) の粘性優解であることが，直接計算で分かる．また $\overline{\Omega}$ 上で $l_z \geqq 0$ かつ $l_z(z) = 0$ を満たす．そこで，

$$W^+(x) := \inf_{z \in \partial\Omega} l_z(x)$$

と定めれば，粘性解の安定性により W^+ は (4.3) の粘性優解となる．さらに W^+ は，境界条件 (4.4) も満たしている． □

注意 4.2. 外部球条件 (4.2) は，より一般的な次の条件に置き換えられる：

$$\text{任意の } z \in \partial\Omega \text{ に対して，} \inf_{r > 1/\nu} \frac{c}{\nu - (1/r)}(\mathrm{dist}(z, \Omega_r) - r) = 0.$$

ここで，$\Omega_r = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \overline{B_r(x)} \subset \Omega^c\}$ である．この条件を用いると，境界 $\partial\Omega$ 上の点で，外部球の半径がちょうど $1/\nu$ となる点も，場合によっては許せることが分かる．詳しくは [11] を参照.

定理 4.1 で得た一意解 U が，(1.1)–(1.2) の粘性解の定常形を与える．有限時刻で U に達することも証明できる.

定理 4.3 (解の漸近形). 有界開集合 Ω は星型 (3.3) で，外部球条件 (4.2) を満たすと仮定する．U を (4.3)–(4.4) の粘性解とし，$t_0 := (\max_{\overline{\Omega}} U)/c$ と定める.

(1) $\mathbf{R}^n$ 上で $u_0 \equiv 0$ と仮定する．このとき，

$$u(x,t) = \begin{cases} \min\{U(x),\, ct\} & (x \in \Omega), \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases} \tag{4.5}$$

が (1.1)–(1.2) の一意解となる．特に，

$$u(x,t) = \begin{cases} U(x) & (x \in \Omega), \\ 0 & (x \notin \Omega), \end{cases} \quad (t \geqq t_0) \tag{4.6}$$

が成り立つ.

(2) Ω 上で $u_0 \geqq 0$，Ω^c 上で $u_0 \equiv 0$ と仮定する．このとき，任意の $u \in \mathrm{SOL}$ に対して，(4.6) が成り立つ.

証明の概略. (1) (4.5) の u が解であることの証明は省略する．u は $\mathbf{R}^n \times [0, \infty)$ 上で連続なので，系 3.4 (2) によりこれが一意解となる.

(2) (4.5) の関数を u^- で表すことにすると，$u^- \in \mathrm{SUB}$ となる．一方で，

$$u^+(x,t) := \begin{cases} U(x) & (x \in \Omega,\ U(x) \leqq ct), \\ ct + \sup\limits_{\mathbf{R}^n} |u_0| & (x \in \Omega,\ U(x) > ct), \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases} \tag{4.7}$$

と定めると，$u^+ \in \mathrm{SUP}$ であることが証明できる．すると弱比較定理 3.1 より，$\mathbf{R}^n \times [0,\infty)$ 上で $u^- \leqq u \leqq u^+$ となる．$u^\pm$ は (4.6) を満たすので，u も (4.6) を満たす． □

5　おわりに

論文 [11] では，定常形の決定以外に，[13] に基づく方法で初期値問題 (1.1)–(1.2) に対する離散ゲーム解釈を与え，値関数の極限としての解の表示を導いている．方程式のソース項 $c\chi_\Omega(x)$ は，ゲームのランニングコストとして解釈される．さらにその公式を応用して，ある Ω の場合に，非自明解 u の存在と，その漸近速度 $\lim_{t\to\infty} u(x,t)/t$ を求めている．ゲームの各プレイヤーの戦略を解析することで，値関数を評価して示している．

2 次元核生成による結晶成長は，ステップ源の位置が，ある領域 $U \subset \mathbf{R}^n$ の境界 ∂U とみなせる場合，初期値・境界値問題としても記述できる．このとき，方程式にソース項を付ける代わりに，領域境界で，解の成長速度を指定する動的境界条件：

$$u_t(x,t) = c \quad \text{on } \partial U \times (0,\infty) \tag{5.1}$$

を課す．このような動的境界値問題の粘性解の一意存在を，U が半空間の場合に [10] で示している．動的境界条件 (5.1) の下での粘性解は，ディリクレ境界条件：

$$u(x,t) = ct + u_0(x) \quad \text{on } \partial U \times (0,\infty)$$

の下での粘性解とは一般に異なるので注意したい．

参考文献

[1] W. K. Burton, N. Cabrera, F. C. Frank, *The growth of crystals and the equilibrium structure of their surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. **243** (1951), 299–358.

[2] M. G. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), 1–67.

[3] Y. Giga, *Viscosity solutions with shocks*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), 431–480.

[4] Y. Giga, *Surface evolution equations: A level set approach*, Monographs in Mathematics **99**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[5] Y. Giga, N. Hamamuki, *Hamilton-Jacobi equations with discontinuous source terms*, Comm. Partial Differential Equations **38** (2013), 199–243.

[6] Y. Giga, H. Mitake, H. V. Tran, *On asymptotic speed of solutions to level-set mean curvature flow equations with driving and source terms*, SIAM J. Math. Anal. **48** (2016), 3515–3546.

[7] Y. Giga, H. Mitake, H. V. Tran, *Remarks on large time behavior of level-set mean curvature flow equations with driving and source terms*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **25** (2020), 3983–3999.

[8] Y. Giga, H. Mitake, T. Ohtsuka, H. V. Tran, *Existence of asymptotic speed of solutions to birth-and-spread type nonlinear partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J. **70** (2021), 121–156.

[9] N. Hamamuki, *On large time behavior of Hamilton-Jacobi equations with discontinuous source terms*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. **36** (2013), Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences, 83–112.

[10] N. Hamamuki, *Uniqueness and existence of viscosity solutions under a degenerate dynamic boundary condition*, preprint, Hokkaido University Preprint Series in Mathematics, `https://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/handle/2115/77215`

[11] N. Hamamuki, K. Misu, *Asymptotic shape of solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms*, in preparation.

[12] H. Ishii, *A simple, direct proof of uniqueness for solutions of the Hamilton-Jacobi equations of eikonal type*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 247–251.

[13] R. V. Kohn, S. Serfaty, *A deterministic-control-based approach to motion by curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **59** (2006), 344–407.

[14] M. Ohara, R. C. Reid, *Modeling Crystal Growth Rates from Solution*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[15] G. Sazaki, S. Zepeda, S. Nakatsubo, E. Yokoyama, Y. Furukawa, *Elementary steps at the surface of ice crystals visualized by advanced optical microscopy*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **107** (2010), 19702–19707.