熱核を用いた De Philippis-Gigli の予想の解決

東北大学理学研究科数学専攻　本多正平
Shouhei Honda
Mathematical Institute,
Tohoku Univeristy

1　紹介したいこと

講演では，De Philippis と Gigli によって [DePhG18] で提出された予想が，空間がコンパクトなときに解決された，という事実を紹介した [H20]．そのアブストラクトでは，おそらく講演を行うときには，一般の場合で予想が解決されているだろうと述べた．概ねそれは正しくて，講演のおおよそ 3 か月後に [BGHZ21] で解決された．その主張は次のようになる：

定理 1.1. 測度距離空間 $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ が適当な $K \in \mathbb{R}, N \in [1, \infty)$ で

$$\mathrm{Ric}_{(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})} \geq K, \quad \dim_{(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})} \leq N \tag{1.1}$$

が ***synthetic* な意味で**成り立ち，かつ $\mathfrak{m}$ は $\mathcal{H}^N$ に絶対連続である (それを $\mathfrak{m} \ll \mathcal{H}^N$ とかく) とすれば，ある正の定数 $c > 0$ が存在して

$$\mathfrak{m} = c\mathcal{H}^N \tag{1.2}$$

が成り立つ．

測度距離空間の定義は本稿の最後の章を見てほしい (定義 3.1)．条件 (1.1) を満たす測度距離空間を $\mathrm{RCD}(K, N)$ 空間という．その正確な定義も最後の章に書いてある (定義 3.10)．

本稿の目的はこの定理の証明をナイーブに紹介することである．証明の鍵となるアイデアは (適切な体積の仮定 (2.25) の下で)n 次元ハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^n$ に関する部分積分公式 (f_1 か f_2 かどちらかはコンパクト台を持つと仮定する)：

$$\int_X \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n = -\int_X f_1 \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}_{f_2}) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n \tag{1.3}$$

の**熱核**を用いた新証明を与えることである．ここで n は $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ の**本質的次元**と呼ばれるもので (定理 3.11)，それは N 以下で，$\mathfrak{m}$ が $\mathcal{H}^N$ に絶対連続であるとき $n = N$ であることが知られていることに注意しておく．

その証明は例えば閉リーマン多様体に限っても新しく，例えば**重み付きリーマン多様体** $(M^n, g, \mathrm{vol}_g^f)$(例 3.2参照) からスタートしてその証明の議論を走らせると，(重みのない！)(1.3) が得られる．これは少し驚きである．

それでは証明を紹介しよう．

2　証明

以下 $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を条件 (1.1) を synthetic な意味で満たす測度距離空間 (すなわち $\mathrm{RCD}(K, N)$ 空間) として一つ固定して話を進める．

2.1 熱核

熱流と呼ばれる滑らかな写像:

$$h_t : L^2(X, \mathfrak{m}) \to L^2(X, \mathfrak{m}) \tag{2.1}$$

が

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_t f = \Delta h_t f, \quad \lim_{t \to 0^+} \|h_t f - f\|_{L^2} \to 0 \tag{2.2}$$

を満たすものとして一意的に定義される．$(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ が体積の 2 倍条件およびポワンカレの不等式を満たすことも知られているため，そのような空間の一般論から (例えば [St95, St96]) 局所ヘルダー連続な関数 $p : X \times X \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ が一意的に存在して

$$h_t f(x) = \int_X f(y) p(x, y, t) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \tag{2.3}$$

が成り立つことがわかる．この p を $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ の**熱核**という．リッチ曲率の下限を適切に用いると p はリプシッツ連続となる．より正確には次の**ガウス型評価**が成り立つことが知られている [JLZ16]：任意の $\epsilon > 0$ に対して[1] (ϵ, K, N だけに依存する) 正の定数 $C := C(\epsilon, K, N) > 1$ が存在して，任意の $0 < t < 1$ および任意の $x, y \in X$ に対して次が成り立つ．

$$\frac{C^{-1}}{\mathfrak{m}(B_{\sqrt{t}}(x))} \exp\left(-\frac{\mathsf{d}^2(x,y)}{(4-\epsilon)t} - Ct\right) \le p(x,y,t) \le \frac{C}{\mathfrak{m}(B_{\sqrt{t}}(x))} \exp\left(-\frac{\mathsf{d}^2(x,y)}{(4+\epsilon)t} + Ct\right), \tag{2.4}$$

$$\mathrm{Lip}_x p(x,y,t) \le \frac{C}{\sqrt{t}\mathfrak{m}(B_{\sqrt{t}}(x))} \exp\left(-\frac{\mathsf{d}^2(x,y)}{(4+\epsilon)t} + Ct\right). \tag{2.5}$$

2.2 熱核を使って定まる幾何学的流 g_t

次に熱核を使って $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を**正則化**することを試みる．正確には，$t > 0$ を固定して写像 $\Phi_t : X \to L^2(X, \mathfrak{m})$ を

$$\Phi_t(x) := (y \mapsto p(x, y, t)) \tag{2.6}$$

で定め，この写像による $L^2(X, \mathfrak{m})$ の平坦計量 g_{L^2} の**引き戻し**を g_t と書く：

$$g_t := \Phi_t^* g_{L^2}. \tag{2.7}$$

写像 Φ_t が well-defined であることは (2.4)(の上からの評価) からわかる．これは形式的には次のように書くことができ，実際に well-defined である：

$$g_t = \int_X \mathrm{d}_x p(x, y, t) \otimes \mathrm{d}_x p(x, y, t) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \tag{2.8}$$

これと (2.5) から次の評価が得られる：

$$t\mathfrak{m}(B_{\sqrt{t}}(\cdot))|g_t| \le C(K, N). \tag{2.9}$$

次に g_t が**幾何学的流**の一種であることを見るために，g_t の $t \to 0^+$ での挙動を調べる．結論は次のようになる：$(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ の本質的次元 n だけに依存する正の定数 $c_n > 0$ が存在して，任意の $p \in [1, \infty)$ に対して

$$t\mathfrak{m}(B_{\sqrt{t}}(\cdot)) g_t \overset{L^p_{\mathrm{loc}}}{\to} c_n g \tag{2.10}$$

[1] 実際には $\epsilon = 1$ の場合だけ後で用いる．

が成り立つ．ここで g は $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ の**自然なリーマン計量**であるが，その正確な定義は省略する．[2]実際に g_t が $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ の正則化としての役割を果たしていることについては，例えば [HS21] を見てほしい (しかし以下ではその事実は使わない).

次に (2.10) の証明のアイデアを述べよう．まず $(\mathbb{R}^n, \mathsf{d}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{H}^n)$ で以上の議論を行うと，熱核を具体的に書き下すことができることから直接計算で g_t が $g_{\mathbb{R}^n}$ の定数倍になることがわかる．この事実を $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ の**正則点**の周りで局所化することで (2.10) が達成される．[3]局所化を行うための道具に**測度付き点付きグロモフ・ハウスドルフ収束**や**それに沿ったチーガーエネルギーのモスコ収束**が使われるが，その詳細は省略する．興味を持たれた方は [AH17, AH18, AHPT21, BGHZ21, GMS13] を見てほしい．

最後に，この章で自然なリーマン計量がでてきたので，後で使う Han による次の事実をここで紹介しておこう [Han18]：

$$\mathfrak{m} \ll \mathcal{H}^N \Longrightarrow \Delta f = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}(f)) := \langle \mathrm{Hess}(f), g \rangle. \tag{2.11}$$

2.3 $\nabla^* g_t$ の計算

ここでのゴールは X 上の 1 次微分形式 ω で以下の等式を満たすものを見つけることである．

$$\int_X \langle g_t, \nabla \eta \rangle \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_X \langle \omega, \eta \rangle \, \mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{2.12}$$

ここで η は X 上の (適切な正則性を持った) 任意の 1 次微分形式である．このような ω を $\nabla^* g_t$ と書いて g_t の**共役**という．この共役を決定することができて，答えは次のようになる：

$$\nabla^* g_t = -\frac{1}{4} \mathrm{d}\Delta p(x, x, 2t). \tag{2.13}$$

これは直接計算するだけでチェックできそうであるが，意外に難しい．その証明は次のようなものである．

まず X 上の (適当な正則性を持つ) 関数 f に対して X 上の $(0, 2)$ 型のテンソル場 $\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f$ の共役は直接計算で簡単にわかって，次のようになる：

$$\nabla^* (\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f) = -\Delta f \, \mathrm{d}f - \frac{1}{2} \mathrm{d}|\mathrm{d}f|^2. \tag{2.14}$$

これを $y \in X, t > 0$ を固定して $f = p(\cdot, y, t)$ として適用して次を得る：

$$\nabla^* (\mathrm{d}_x p(x, y, t) \otimes \mathrm{d}_x p(x, y, t)) = -\Delta p(\cdot, y, t) \, \mathrm{d}p(\cdot, y, t) - \frac{1}{2} \mathrm{d}|\mathrm{d}p(\cdot, y, t)|^2. \tag{2.15}$$

これを $y \in X$ に関してボホナー積分して

$$\int_X \nabla^* (\mathrm{d}_x p(x, y, t) \otimes \mathrm{d}_x p(x, y, t)) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = -\int_X \left(\Delta p(\cdot, y, t) \, \mathrm{d}p(\cdot, y, t) + \frac{1}{2} \mathrm{d}|\mathrm{d}p(\cdot, y, t)|^2 \right) \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \tag{2.16}$$

を得る．この左辺が $\nabla^* g_t$ に等しいことは (2.8) から容易にわかるので，結局次を得たことになる：

$$\nabla^* g_t = -\int_X \left(\Delta p(\cdot, y, t) \, \mathrm{d}p(\cdot, y, t) + \frac{1}{2} \mathrm{d}|\mathrm{d}p(\cdot, y, t)|^2 \right) \mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \tag{2.17}$$

次に，以下の等式を示す：

$$\int_X \Delta_x p(x, y, t) \, \mathrm{d}_x p(x, y, t) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \int_X p(x, y, t) \, \mathrm{d}_x \Delta_x p(x, y, t) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \tag{2.18}$$

[2]滑らかな測度距離空間 $(M^n, \mathsf{d}_g, \mathrm{vol}_g^f)$ のときには g のことに他ならない．

[3]滑らかな場合にはもっとよい収束が成り立つことが知られていて，それについては [BBG94, HZ20] をみてほしい．

これを認めると (2.17) の右辺は

$$
\begin{aligned}
&-\int_X \left(\frac{1}{2}\Delta p(\cdot,y,t)\,\mathrm{d}p(\cdot,y,t) + \frac{1}{2}p(\cdot,y,t)\,\mathrm{d}\Delta p(\cdot,y,t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}|\,\mathrm{d}p(\cdot,y,t)|^2\right)\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\\
&= -\frac{1}{2}\int_X \mathrm{d}_x\left(p(x,y,t)\Delta_x p(x,y,t) + |\,\mathrm{d}_x p(x,y,t)|^2\right)\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\\
&= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}_x\int_X \left(p(x,y,t)\Delta_x p(x,y,t) + |\,\mathrm{d}_x p(x,y,t)|^2\right)\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\\
&= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}_x\int_X \frac{1}{2}\Delta_x(p(x,y,t)^2)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\\
&= -\frac{1}{4}\,\mathrm{d}_x\Delta_x\int_X p(x,y,t)^2\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\\
&= -\frac{1}{4}\,\mathrm{d}_x\Delta_x p(x,x,2t)
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

となって (2.13) が得られる．よって残るは (2.18) のチェックのみとなった．最後にそれを示そう．[4]

まず

$$\int_X p(x,y,t)p(y,z,s)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = p(x,z,t+s) \tag{2.20}$$

であるから，これを x に関して微分して

$$\int_X p(y,z,s)\,\mathrm{d}_x p(x,y,t)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \mathrm{d}_x p(x,z,t+s). \tag{2.21}$$

この両辺に $p(x,z,t)$ を書けて z に関して積分すると左辺は

$$
\begin{aligned}
&\int_X p(x,z,t)\int_X p(y,z,s)\,\mathrm{d}_x p(x,y,t)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(z)\\
&= \int_X\int_X p(x,z,t)p(y,z,s)\,\mathrm{d}_x p(x,y,t)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(z)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\\
&= \int_X p(x,y,t+s)\,\mathrm{d}_x p(x,y,t)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

となるので，結局次を得たことになる：

$$\int_X p(x,y,t+s)\,\mathrm{d}_x p(x,y,t)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \int_X p(x,y,t)\,\mathrm{d}_x p(x,y,t+s)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \tag{2.23}$$

これは次のように書き換えることができることに注意する：

$$\int_X \frac{p(x,y,t+s)-p(x,y,t)}{s}\,\mathrm{d}_x p(x,y,t)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \int_X p(x,y,t)\,\mathrm{d}\left(\frac{p(x,y,t+s)-p(x,y,t)}{s}\right)\mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \tag{2.24}$$

ここで $s \to 0^+$ とすると (2.18) が得られる．

2.4 証明の完成

ここから次を仮定する：X の任意の空でないコンパクト部分集合 $A \subset X$ に対して

$$\inf_{x\in A, r\in(0,1)} \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))}{r^n} > 0. \tag{2.25}$$

[4] この部分は空間がコンパクトだと熱核を固有関数を使って書いて，直接計算でチェックできる [H20]．空間が非コンパクトのときには以下のように**もう一度熱流で正則化**して達成される．

ここで n は $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ の本質的次元であったこと，および $\mathfrak{m} \ll \mathcal{H}^N$ であれば $n = N$ であり，かつ (2.25) はビショップ・グロモフの不等式により自動的に満たされることを思い出しておく．

今コンパクトサポートを持ち，かつ適切な正則性を持つ X 上の関数 f_1, f_2 に対して，(2.13) から

$$\sqrt{t}^{N+2}\int_X \langle \nabla^* g_t f_1 \,\mathrm{d}f_2\rangle = -\frac{\sqrt{t}^{N+2}}{4}\int_X \langle \mathrm{d}\Delta p(x,x,2t), f_1\,\mathrm{d}f_2\rangle\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \tag{2.26}$$

がわかる．ここで極限 $t \to 0^+$ をとることを考える．このとき (2.4) から右辺は 0 に収束することがわかる．一方で (2.10) と優収束定理を用いると，左辺は定数倍を除いて次に収束することがわかる：

$$\int_X (f_1\langle \mathrm{Hess}(f_2), g\rangle + \langle \nabla f_1, \nabla f_2\rangle)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n. \tag{2.27}$$

ここで (2.25) は優関数を見つける際に用いられる．よって次 (すなわち (1.3)) が得られたことになる：

$$\int_X \langle \nabla f_1, \nabla f_2\rangle\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n = -\int_X f_1 \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}(f_2))\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n. \tag{2.28}$$

ここから $\mathfrak{m} \ll \mathcal{H}^N$ を仮定する．このとき (2.11) を用いると (2.28) は次のように書き換えることができる：

$$\int_X \langle \nabla f_1, \nabla f_2\rangle \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}^N}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = -\int_X f_1 \Delta f_2 \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}^N}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{2.29}$$

これが任意の f_1, f_2 で成り立つことを考慮して少し頑張ると $\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}^N}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}$ が定数であることがわかって定理 1.1の証明が完成する．ここでは空間がコンパクトなときにこの最後のステップの証明を以下のように与えて本章を終える．

f_1 として定数関数 1 を，f_2 として $-\Delta$ の固有関数をとると，(2.29) は次のようになる：

$$0 = \lambda \int_X f_2 \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}^N}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{2.30}$$

ここで λ は f_2 の固有値である．よって $\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}^N}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}$ は任意の非自明な固有関数と L^2 直交する．これは $-\Delta$ に関するスペクトル分解を考えれば $\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}^N}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}$ が定数であることを意味する．

3 RCD 空間およびその本質的次元の定義

この最後の章では，$\mathrm{RCD}(K, N)$ 空間の正確な定義と本質的次元の定義，そして滑らかな測度距離空間との関係を述べることが目的である．前章でリーマン計量やヘッシアンなどを用いたが，その説明を加えるとページがかなり膨らむので，興味を持たれた方は参考文献をご覧になっていただきたい (例えば [A19] はよいサーベイである)．

定義 3.1 (測度距離空間)**.** 3 つ組 $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ が測度距離空間であるとは，次の 2 性質を満たすときをいう：

1. (X, d) は完備可分な距離空間．
2. $\mathfrak{m}$ が X 上のボレル測度で，そのサポートは X に一致する．

典型例は重み付きリーマン多様体である：

例 3.2. 完備な n 次元リーマン多様体 (M^n, g) と滑らかな関数 $f \in C^\infty(M^n)$ に対して

$$(M^n, \mathsf{d}_g, \mathrm{vol}_g^f) \tag{3.1}$$

は定義 3.1の意味で測度距離空間である．ここに d_g は g から誘導される M^n 上の自然な距離で，vol_g は g から誘導される自然なリーマン測度 (すなわち d_g に関する n 次元ハウスドルフ測度といってもよい)，そして vol_g^f は次で定まる M^n 上の Borel 測度である：

$$\mathrm{vol}_g^f A := \int_A e^{-f} \, \mathrm{dvol}_g.$$

この測度距離空間 (3.1) を**滑らかな測度距離空間**という．

以下，測度距離空間 $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を一つ固定して話を進める．

定義 3.3 (チーガーエネルギー)**.** **チーガーエネルギー** $\mathsf{Ch} : L^2(X, m) \to [0, \infty]$ を次で定義する：

$$\mathsf{Ch}(f) := \inf\left\{\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_X \mathrm{Lip}^2(f_n)\, \mathrm{d}\mathfrak{m};\ f_n \in \mathrm{Lip_b}(X, \mathsf{d}) \cap L^2(X, \mathfrak{m}),\ \|f_n - f\|_{L^2} \to 0\right\}, \tag{3.2}$$

ここに $\mathrm{Lip_b}(X, \mathsf{d})$ で X 上定義された有界なリプシッツ関数全体を，$\mathrm{Lip}(f)$ で f の局所リプシッツ定数を表す，すなわち $x \in X$ が孤立点でないとき，

$$\mathrm{Lip} f(x) := \limsup_{y\to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{\mathsf{d}(x, y)} \tag{3.3}$$

とし，孤立点のときは 0 と約束する (本稿で扱うケースでは孤立する場合はない)．

定義 3.4 (ソボレフ空間)**.** **ソボレフ空間** $H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を次のように定義する：

$$H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m}) := \left\{f \in L^2(X, \mathfrak{m}); \mathsf{Ch}(f) < \infty\right\}.$$

これは自然なノルム $\|f\|_{W^{1,2}}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + 2\mathsf{Ch}(f)$ に関してバナッハ空間になる．

一般に $H^{1,2}(X)$ はヒルベルト空間でない．例えば $(\mathbb{R}^2, |x| + |y|, \mathcal{L}^2)$ は測度距離空間だが，この $H^{1,2}$ はヒルベルト空間でない．

定義 3.5 (リラックスされた勾配)**.** 各 $f \in H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ に対して次を満たす $h \in L^2(X, \mathfrak{m})$ を f の**リラックスされた勾配**といい，それ全体を $R_f \subset L^2(X, \mathfrak{m})$ と書く．

- f に L^2 強収束する関数列 $f_n \in \mathrm{Lip}_b(X, \mathsf{d}) \cap L^2(X, \mathfrak{m})$ と，$\mathrm{Lip} f_n$ の L^2 弱極限 $F \in L^2(X, \mathfrak{m})$ が存在して，$F \le h$ が $\mathfrak{m}$-a.e. で成り立つ．

R_f は $L^2(X, \mathfrak{m})$ で凸かつ閉集合であることが容易に確かめられる．よって次を満たす $|\nabla f| \in R_f$ が一意的に定まり，これを f の**最小弱勾配**という：

$$\||\nabla f|\|_{L^2} = \inf_{h\in R_f} \|h\|_{L^2}. \tag{3.4}$$

このとき次が成り立つことが知られている：

命題 3.6. 任意の $f \in H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ に対して次が成り立つ：

$$\mathsf{Ch}(f) = \frac{1}{2}\int_X |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{3.5}$$

定義 3.7 (無限小ヒルベルト的). $H^{1,2}(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$ がヒルベルト空間となるとき，$(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$ を**無限小ヒルベルト的**と呼ぶ.

以下では $(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$ は無限小ヒルベルト的とする．このとき任意の $f,h\in H^{1,2}(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$ に対して

$$\langle\nabla f,\nabla h\rangle := \lim_{\epsilon\to 0}\frac{|\nabla(f+\epsilon h)|^2-|\nabla f|^2}{2\epsilon} \tag{3.6}$$

と置く．これは $\mathfrak{m}$-a.e. で意味を持ち，$L^1(X,\mathfrak{m})$ に属する.

ここで**ラプラシアン**が定義できる.

定義 3.8 (ラプラシアン). 線形作用素 $\Delta : D(\Delta)\to L^2(X,\mathfrak{m})$ を次で定義する：

$$f\in D(\Delta) \iff \exists h:=\Delta f\in L^2(X,\mathfrak{m}) \text{ s.t. } \int_X hg\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = -\int_X\langle\nabla f,\nabla g\rangle\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\ \ \forall g\in H^{1,2}(X,\mathsf{d},\mathfrak{m}).$$

例 3.9. 滑らかな測度距離空間 (3.1) は無限小ヒルベルト的であって，$C_c^\infty(M^n)$ は $H^{1,2}(M^n,\mathsf{d}_g,\mathrm{vol}_g^f)$ の稠密部分集合である．そして任意の $\varphi,\psi\in C_c^\infty(M^n)$ に対して $\langle\nabla\varphi,\nabla\psi\rangle = g(\nabla\varphi,\nabla\psi)$ が成り立つ．すなわちこの場合 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ はリーマン計量 g に他ならなく，特に測度によらない概念である．一方で直接計算でラプラシアンは

$$\Delta\varphi = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}_\varphi) - g(\nabla\varphi,\nabla f) \tag{3.7}$$

となることがわかり，これは測度による概念である.

ここで少し考察をしよう．説明の簡略化のため，n 次元完備リーマン多様体 (M^n,g) を固定する．このとき**ボホナー公式**とは任意の $f\in C^\infty(M^n)$ に対して，各点で次の等号が成り立つことを主張する：

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\mathrm{Hess}_f|^2 + g(\nabla\Delta f,\nabla f) + \mathrm{Ric}_g(\nabla f,\nabla f). \tag{3.8}$$

これから次が直ちにわかる：$\mathrm{Ric}_g\ge K$ かつ $n\le N$ を満たすための必要十分条件は

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 \ge \frac{(\Delta f)^2}{N} + g(\nabla\Delta f,\nabla f) + K|\nabla f|^2 \tag{3.9}$$

が任意の $f\in C^\infty(M^n)$ で成り立つことである．これは積分で書いた

$$\frac{1}{2}\int_{M^n}\Delta\varphi|\nabla f|^2\,\mathrm{dvol}_g \ge \int_{M^n}\varphi\left(\frac{(\Delta f)^2}{N} + g(\nabla\Delta f,\nabla f) + K|\nabla f|^2\right)\mathrm{dvol}_g \tag{3.10}$$

が任意の $f\in C^\infty(M^n)$ と $\varphi\ge 0$ を満たす任意の $\varphi\in C_c^\infty(M^n)$ で成り立つこととも同値であることに注意しよう.

以上の考察の下に，RCD 空間の定義を今与えよう ([AGS14b, AMS19, CM21, EKS15] も参照).

定義 3.10 ($\mathrm{RCD}(K,N)$ 空間). 測度付き距離空間 $(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$ がある $K\in\mathbb{R}$ とある $N\in[1,\infty]$ に対して $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空間であるとは以下の 4 条件を満たすときをいう.

1. $(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})$ は無限小ヒルベルト的である.
2. ある $x\in X$ とある $C>1$ が存在して，

$$\mathfrak{m}(B_r(x)) \le Ce^{Cr^2} \tag{3.11}$$

   が任意の $r>0$ で成り立つ.

3. もし $f \in H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m}) \cap L^\infty(X, \mathfrak{m})$ が $|\nabla f| \le 1$ を $\mathfrak{m} - a.e.$ で満たせば，X 上の 1-リプシッツ関数 $\hat{f}$ が存在して $f = \hat{f}$ が $\mathfrak{m}$-a.e. で成り立つ．

4. 次の不等式が，$\Delta f \in H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を満たす任意の $f \in D(\Delta)$ と $\Delta\varphi \in L^\infty(X, \mathfrak{m})$ を満たす $\mathfrak{m}$-a.e. で非負値の任意の $\varphi \in D(\Delta) \cap L^\infty(X, \mathfrak{m})$ に対して成り立つ：

$$\frac{1}{2}\int_X \Delta\varphi |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \ge \int_X \varphi \left(\frac{(\Delta f)^2}{N} - \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + K|\nabla f|^2 \right) \mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{3.12}$$

次に本質的次元の定義を与えよう．次は [BS20] で証明された．

定理 3.11 (本質的次元)**.** $K, \in \mathbb{R}, N \in [1, \infty)$ とし，$(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を 1 点ではない $\mathrm{RCD}(K, N)$ 空間とする．一意的な $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathfrak{m}$-$a.e.$ $x \in X$ で

$$\left(X, \frac{1}{r}\mathsf{d}, \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}(B_r(x))}, x \right) \stackrel{\mathrm{pmGH}}{\to} \left(\mathbb{R}^n, \mathsf{d}_{\mathbb{R}^n}, \frac{\mathcal{L}^n}{\mathcal{L}^n(B_1(0_n))}, 0_n \right) \tag{3.13}$$

が成り立つ．ここに上の収束は点付きグロモフ・ハウスドルフ収束の意味である．この n を $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ の**本質的次元**という．

例 3.12. 滑らかな測度距離空間 $(M^n, \mathsf{d}_g, \mathrm{vol}_g^f)$ が $\mathrm{RCD}(K, N)$ 空間であるための必要十分条件は次の 2 条件を満たすことである：

1. $n \le N$.

2.
$$\mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}_f - \frac{\mathsf{d}f \otimes \mathsf{d}f}{N - n} \ge K. \tag{3.14}$$

ここで，これらが $n = N$ で成り立つということは，$\mathrm{Ric}_g \ge K$ かつ f が定数であることを意味するものとする．そして実際に $\mathrm{RCD}(K, N)$ 空間となったとき，その本質的次元は n に他ならない．

最後に**ヘッシアン**についてコメントを残す．

注意 3.13. $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を $\mathrm{RCD}(K, N)$ 空間とすると，任意の $f \in D(\Delta)$ に対してその**ヘッシアン**が定義でき，それを含んだ形でボホナー不等式が定式化できることが知られている [G18]（[H18] も参照）．このヘッシアンが本稿の主結果の証明で基本的な役割を果たしていることは前章から明らかであろう．

References

[A19] L. Ambrosio: *Calculus, heat flow and curvature-dimension bounds in metric measure spaces*, Proceedings of the ICM 2018, Vol. 1, World Scientific, Singapore, (2019), 301–340.

[AGS14b] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré: *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J. **163** (2014), 1405–1490.

[AH17] L. Ambrosio, S. Honda: *New stability results for sequences of metric measure spaces with uniform Ricci bounds from below*, in Measure Theory in Non-Smooth Spaces, 1–51, De Gruyter Open, Warsaw, 2017.

[AH18] L. Ambrosio, S. Honda: *Local spectral convergence in* $\mathrm{RCD}^*(K, N)$ *spaces*, Nonlinear Anal. **177** Part A (2018), 1–23.

[AHPT21] L. Ambrosio, S. Honda, J. W. Portegies, D. Tewodrose: *Embedding of* $\mathrm{RCD}^*(K,N)$*-spaces in* L^2 *via eigenfunctions*, J. Funct. Anal. **280** (2021), no. 10, Paper No. 108968, 72 pp.

[AMS19] L. Ambrosio, A. Mondino, G. Savaré: *Nonlinear diffusion equations and curvature conditions in metric measure spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **262** (2019), no. 1270.

[BBG94] P. Bérard, G. Besson, S. Gallot: *Embedding Riemannian manifolds by their heat kernel*, Geom. Funct. Anal. **4**(4) (1994), 373–398.

[BGHZ21] C. Brena, N. Gigli, S. Honda, X. Zhu: *Weakly non-collapsed RCD spaces are strongly non-collapsed*, arXiv:2110.02420.

[BS20] E. Brué, D. Semola: *Constancy of dimension for* $\mathrm{RCD}(K,N)$ *spaces via regularity of Lagrangian flows*, Comm. Pure and Appl. Math. **73** (2020), 1141–1204.

[CM21] F. Cavalletti, E. Milman: *The Globalization Theorem for the Curvature Dimension Condition*, Invent. Math. **226** (2021), no. 1, 1–137.

[DePhG18] G. De Philippis, N. Gigli: *Non-collapsed spaces with Ricci curvature bounded from below*. J. Éc. Polytech. Math. **5** (2018), 613-650.

[EKS15] M. Erbar, K. Kuwada, K.-T. Sturm: *On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces,* Invent. Math., **201** (2015), 993–1071.

[G18] N. Gigli: *Nonsmooth differential geometry – An approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below*, Mem. Amer. Math. Soc. **251** (2018), no. 1196.

[GMS13] N. Gigli, A. Mondino, G. Savaré: *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows.* Proceedings of the London Mathematical Society, **111** (2015), 1071–1129.

[Han18] B.-X. Han, *Ricci tensor on* $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ *spaces.* J. Geom. Anal **28** (2018), 1295–1314.

[H18] S. Honda: *A weakly second-order differential structure on rectifiable metric measure spaces.* Geom. Topol., **18** (2014), no. 2, 633–668.

[H20] S. Honda: *New differential operator and non-collapsed RCD spaces.* Geom. Topol., **24** (2020), no. 4, 2127—2148.

[HS21] S. Honda, Y. Sire: *Sobolev mapping between* RCD *spaces and applications to harmonic maps: a heat kernel appoach.* arXiv:2105.08578.

[HZ20] S. Honda, X. Zhu: *A characterization of non-collapsed* $\mathrm{RCD}(K,N)$ *spaces via Einstein tensors*, ArXiv preprint: 2010.02530v3.

[JLZ16] R. Jiang, H. Li, and H.-C. Zhang: *Heat Kernel Bounds on Metric Measure Spaces and Some Applications*, Potent. Anal. **44** (2016), 601–627.

[St95] K.-T. Sturm: *Analysis on local Dirichlet spaces. II. Upper Gaussian estimates for the fundamental solutions of parabolic equations*, Osaka J. Math. **32**(2) (1995), 275–312.

[St96] K.-T. Sturm: *Analysis on local Dirichlet spaces. III. The parabolic Harnack inequality*, J. Math. Pures Appl. **75**(9) (1996), 273-297.